DISKRETUS JUNGTINIS ELIPSINIŲ KREIVIŲ L-FUNKCIJŲ REIKŠMIŲ PASISKIRSTYMAS

Lina Šadbaraitė, Roma Kačinskaitė
Šiaulių universitetas, Šiaulių valstybinė kolegija

1. Įvadas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, **N**, **Z**, **Q**, **C** atitinkamai pažymėkime natūraliųjų, sveikųjų, racionaliųjų ir kompleksinių skaičių aibes. Tegul E yra elipsinė kreivė virš racionaliųjų skaičių kūno **Q** užrašoma Vejerštraso lygtimi

$$y^2 = x^3 + ax + b, \ a,b \in \mathbf{Z}.$$

Kreivės E diskriminantą pažymėkime $\Delta = -16\left(4a^3 + 27b^2\right)$ ir tarkime, kad $\Delta \neq 0$. Tada kubinio trinario $x^3 + ax + b$ šaknys yra skirtingos ir kreivė E yra nesinguliarioji.

Kiekvienam pirminiam skaičiui p pažymėkime $\nu(p)$ lyginio

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod p$$

sprendinių skaičių, o $\lambda(p) = p - \nu(p)$. Pagal klasikinį H. Hasės rezultatą teisingas įvertis

$$|\lambda(p)| < 2\sqrt{p}. \qquad (1)$$

Skaičių $\lambda(p)$ tyrimui H. Hasė ir H. Veilis apibrėžė L-funkciją, susijusią su kreive E. Pastaroji funkcija apibrėžiama Oilerio sandauga

$$L_E(s) = \prod_{p|\Delta}\left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\nmid\Delta}\left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1}.$$

Atsižvelgiant į (1) įvertį, funkcija $L_E(s)$ konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{3}{2}$. Pagal Šimuros-Tanijamos teoremą [2], funkcija $L_E(s)$ yra analiziškai pratęsiama į sveikąją funkciją ir tenkina funkcinę lygtį

$$\left(\frac{\sqrt{q}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) L_E(s) = \eta \left(\frac{\sqrt{q}}{2\pi}\right)^{2-s} \Gamma(2-s) L_E(2-s);$$

čia q – teigiamas sveikasis skaičius, sudarytas iš diskriminanto Δ pirminių daugiklių, $\eta = \pm 1$, o $\Gamma(s)$ – Oilerio gama funkcija.

Elipsinių kreivių L-funkcijų tolydų universalumą, kartu ir reikšmių pasiskirstymą analizinių funkcijų erdvėje tyrė V. Garbaliauskienė ir kt. (2005).

Tolydi jungtinė ribinė teorema silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme elipsinių kreivių L-funkcijoms analizinių funkcijų erdvėje yra įrodyta [5, 1 lema].

Straipsnio tikslas – gauti diskretų jos analogą. Priminsime, jog diskrečiu reikšmių pasiskirstymu yra vadinamas pasiskirstymas, kai kompleksinio kintamojo menamoji dalis įgyja reikšmes iš aritmetinės progresijos su tam tikru fiksuotu realiu teigiamu žingsniu h.

Tegul $n \geq 2$ yra teigiamas sveikasis skaičius. Sudarome rinkinį iš n elipsinių kreivių $E_1,\dots,E_n$ užrašomų Vejerštraso lygtimis

$$y^2 = x^3 + a_j x + b_j, \ a_j, b_j \in \mathbf{Z}$$

su atitinkamais diskriminantais $\Delta_j = -16\left(4a_j^3 + 27b_j^2\right) \neq 0, \ j = 1,\dots,n.$ Tegu, kaip ir anksčiau, $\lambda_j(p) = p - \nu_j(p)$, o $\nu_j(p)$ yra lyginio $y^2 \equiv x^3 + a_j x + b_j \pmod p$, $j = 1,\dots,n$, sprendinių skaičius.

Apibrėžkime

$$L_{E_j}(s) = \prod_{p\nmid\Delta_j}\left(1 - \frac{\lambda_j(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1} \prod_{p|\Delta_j}\left(1 - \frac{\lambda_j(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

$j = 1,\dots,n.$

Jungtinės diskrečios ribinės teoremos analizinių funkcijų erdvėje įrodymui reikalingos tam tikros papildomos sąlygos, kurias turi tenkinti funkcijos $L_{E_j}(s)$. Tegu **P** yra visų pirminių skaičių aibė, o P_l – aibės pirminių skaičių tokios, kad $P_{l_1} \cap P_{l_2} = \varnothing$, kai $l_1 \neq l_2$, ir

$$\mathbf{P} = \bigcup_{l=1}^{r} P_l,$$

$l = 1,\dots,r, \ r \geq n.$ Dar daugiau, pareikalaukime, kad

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \in P_l}} \frac{1}{p} = \kappa_l \log\log x + b_l + O(\log^{-\theta_l} x), \ \text{kai}\ x \to \infty; \qquad (2)$$

čia $\kappa_1 + \dots + \kappa_r = 1, \ \kappa_l > 0, \ \rho_l(x) = O(\log^{-\theta_l} x)$ su $\theta_l > 1$, o b_l yra tam tikri realūs skaičiai. Pažymėkime

$$B_j(p) = \frac{\lambda_j(p)}{\sqrt{p}}$$

ir tarkime, kad $B_j(p)$ yra konstanta, kai $p \in P_l$, t. y., kai $p \in P_l$, $B_1(p) = B_{l1},\dots, B_n(p) = B_{ln}$. Tegu

$$B_{rn} = \begin{pmatrix} B_{11} \dots B_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ B_{r1} \dots B_{rn} \end{pmatrix}.$$

Tarkime, kad $V > 0$. D_V pažymėkime sritį

$$D_V = \left\{ s \in \mathbf{C} : 1 < \sigma < \frac{3}{2},\ |t| < V \right\}.$$

$H(G)$ pažymėkime analizinių srityje G funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija. $H^n(G)$ pažymėkime n erdvių $H(G)$ Dekarto sandaugą, t. y.

$$H^n(G) = \underbrace{H(G) \times \ldots \times H(G)}_{n},\quad n \geq 2.$$

$\mathcal{B}(S)$ pažymėkime erdvės S Borelio aibių klasę.

Tarkime γ yra vienetinis kompleksinės plokštumos apskritimas, t. y. $\gamma = \{s \in \mathbf{C} : |s| = 1\}$ ir

$$\Omega = \prod_p \gamma_p;$$

čia $\gamma_p = \gamma$ visiems pirminiams p. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba toras Ω yra kompaktiška topologinė Abelio grupė, todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas m_H. Tokiu būdu gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. $\omega(p)$ pažymėkime $\omega \in \Omega$ projekciją į koordinacinę erdvę γ_p. $\omega(m)$ apibrėžkime formule

$$\omega(m) = \prod_{p^\alpha \| m} \omega^\alpha(p);$$

čia $p^\alpha \| m$ reiškia, kad $p^\alpha \mid m$, bet $p^{\alpha+1} \nmid m$. Taip gauname $\omega(p)$ pratęsimą į visą natūraliųjų skaičių aibę $\mathbf{N}$. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime $H^n(D_V)$-reikšmį atsitiktinį elementą $L(s, \omega)$ formule

$$L(s,\omega) = (L_{E_1}(s,\omega), \ldots, L_{E_n}(s,\omega));$$

čia

$$L_{E_j}(s,\omega) = \prod_{p \nmid \Delta_j} \left(1 - \frac{\lambda_j(p)\omega(p)}{p^s} + \frac{\omega^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1} \prod_{p \mid \Delta_j} \left(1 - \frac{\lambda_j(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

$s \in D_V$, $j = 1, \ldots, n$. Šio atsitiktinio elemento skirstinys tegul yra

$$P_L(A) = m_H(\omega \in \Omega : L(s,\omega) \in A),\quad A \in \mathcal{B}(H^n(D_V)).$$

Tegul $N \in \mathbf{N}$ ir pažymėkime

$$\mu_N(\ldots) = \frac{1}{N+1} \#\{0 \leq m \leq N : \ldots\};$$

čia vietoje daugtaškio įrašomos sąlygos, kurias tenkina m. Tegul $h > 0$ yra fiksuotas realus teigiamas skaičius toks, kad $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ būtų iracionalusis skaičius bet kokiam $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Teorema. *Tarkime, kad $h > 0$ yra fiksuotas skaičius toks, kad $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ būtų iracionalusis skaičius visiems $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, o* $\operatorname{rank}(B_{rn}) = n$. *Tada, kai $N \to \infty$, tikimybinis matas*

$$P_N(A) = \mu_N((L_{E_1}(s+imh), \ldots, L_{E_n}(s+imh)) \in A),$$

$A \in \mathcal{B}(H^n(D_V))$ silpnai konverguoja į matą $P_L(A)$.

2. Teoremos įrodymas

Kadangi funkcija $L_{E_j}(s)$ pusplokštumėje $\sigma > \frac{3}{2}$ konverguoja absoliučiai, todėl ją galima užrašyti sandauga

$$L_{E_j}(s) = \prod_{p \nmid \Delta_j} \left(1 - \frac{\alpha_j(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_j(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \mid \Delta_j} \left(1 - \frac{\lambda_j(p)}{p^s}\right)^{-1};$$

čia $\alpha_j(p) + \beta_j(p) = \lambda_j(p)$, o pagal (1) nelygybę

$$|\alpha_j(p)| \leq 2\sqrt{p},\quad |\beta_j(p)| \leq 2\sqrt{p},\quad j = 1, \ldots, n.$$

Vadinasi, $L_{E_j}(s)$ yra Matsumoto dzeta funkcijos atskiras atvejas su $\alpha = 0$ ir $\beta = \frac{1}{2}$ ir galioja augimo įverčiai [9]:

$$L_{E_j}(\sigma + it) = O(|t|^{\alpha_j}),\ |t| \geq t_0,\ \alpha_j > 0$$

ir

$$\int_0^T |L_{E_j}(\sigma + it)|^2\, dt = O(T),\quad T \to \infty.$$

Teoremos įrodymui reikės Prochorovo teoremų, susiejančių tikimybinių matų šeimos reliatyvų kompaktiškumą su suspaustumu.

Tegul $\{P\}$ yra tikimybinių matų šeima erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Priminsime, kad tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra reliatyviai kompaktiška, jei kiekviena šeimos $\{P\}$ elementų seka turi silpnai konverguojantį posekį. Šeima $\{P\}$ yra suspausta, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktiška aibė $K \subset S$ tokia, kad visiems matams $P \in \{P\}$ galiotų nelygybė $P(K) > 1 - \varepsilon$.

1 lema. *Tikimybinių matų šeima $\{P_N\}$ yra reliatyviai kompaktiška.*

Įrodymas. Tegul P_{E_j} yra atsitiktinio elemento $L_{E_j}(s,\omega)$ skirstinys, $j = 1, \ldots, n$. Apibrėžkime tikimybinį matą

$$P_{j,N}(A) = \mu_N(L_{E_j}(s+imh) \in A),\ A \in \mathcal{B}(H(D_V)).$$

Tuomet tikimybinis matas $P_{j,N}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_{E_j}, $j = 1, \ldots, n$ [6]. Vadinasi, tikimybinių matų šeima $\{P_{j,N}\}$ yra reliatyviai kompaktiška, $j = 1, \ldots, n$. Kadangi $H(D_V)$ yra pilna separabili metrinė erdvė [3], tuomet remiantis Prochorovo teorema [1] gauname, kad šeima $\{P_{j,N}\}$ yra suspausta. Tai reiškia, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktiška aibė $K_j \subset H(D_V)$ tokia, kad

$$P_{j,N}(H(D_V)\setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{n},\ j = 1,...,\ n. \quad (3)$$

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega_0,\ \mathrm{B}(\Omega_0),\ \mathrm{P})$ apibrėžkime atsitiktinį dydį θ tokį, kad

$$\mathrm{P}(\theta_N = mh) = \frac{1}{N+1},\quad m = 0,1,...,N;$$

čia $N \in \mathbf{N}$ ir $H(D_V)$-reikšmis atsitiktinis elementas $L_N(s)$ yra apibrėžtas formule

$$L_N(s) = (L_{E_{1,N}}(s),...,L_{E_{n,N}}(s));$$

čia $L_{E_{j,N}}(s) = L_{E_j}(s + i\theta_N),\ j = 1,...,\ n.$

Tuomet pagal $P_{j,N}$ apibrėžimą ir (3) gauname

$$\mathrm{P}(L_{E_{j,N}} \in H(D_V)\setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{n},\ j = 1,...,\ n. \quad (4)$$

Dabar tegul $K = K_1 \times ... \times K_n$. Tuomet aibė K yra kompaktiška erdvėje $H^n(D_V)$ ir pagal (4) gauname

$$P_N(H^n(D_V)\setminus K) = \mathrm{P}(L_N(s) \in H^n(D_V)\setminus K)$$

$$= \mathrm{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n}(L_{E_{j,N}}(s) \in H(D_V)\setminus K_j)\right)$$

$$\le \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathrm{P}(L_{E_{j,N}}(s) \in H(D_V)\setminus K_j) < \varepsilon. \quad (5)$$

Pastaroji nelygybė parodo, kad šeima $\{P_N\}$ yra suspausta. Taigi, pagal Prochorovo teoremą [1] šeima $\{P_N\}$ yra reliatyviai kompaktiška. Lema įrodyta.

Dabar tegul $s_1,..., s_r$ yra atitinkami srities D_V taškai ir $\sigma_1 = \min\limits_{1\le j\le n}\sigma_j$. Tada $\sigma_2 = \sigma_j - \sigma_1 < 0.$

Imkime sritį

$$\hat{D}_V = \{s \in \mathbf{C} : \sigma < \sigma_2\}.$$

Be to, tegul u_{jl} yra bet kokie kompleksiniai skaičiai, $1 \le j \le n,\quad 1 \le l \le r.$ Apibrėžkime funkciją $u : H^n(D_V) \to H(\hat{D}_V)$ formule

$$u(L_{E_1},...,L_{E_n}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} u_{jl}L_{E_j}(s_l + s),$$

čia $s \in (\hat{D}_V),\ L_{E_j} \in H(D_V),\ j = 1,...,\ n$. Tegul

$$W(s) = u(L_{E_1}(s),...,L_{E_n}(s)).$$

2 lema. $W(s + i\theta_N) \xrightarrow[N\to\infty]{D} u(L(s));$

čia $\xrightarrow[N\to\infty]{D}$ žymi konvergavimą pagal pasiskirstymą.

Įrodymas. Lemos įrodymas analogiškas 14 lemos iš [7] įrodymui. Pagal 1 lemą egzistuoja seka N_1 tokia, kad matas P_{N_1}, kai $N_1 \to \infty$, silpnai konverguoja į tikimybinį matą P srityje $(H^n(D_V),\ \mathrm{B}(H^n(D_V)))$. Tegul P yra $H^n(D_V)$-reikšmio atsitiktinio elemento

$$L_1(s) = (L_{E_{1,1}}(s),...,L_{E_{n,1}}(s))$$

skirstinys. Tada

$$L_{N_1} \xrightarrow[N_1\to\infty]{D} L_1. \quad (6)$$

Funkcija u yra tolydi, todėl

$$u(L_{N_1}) \xrightarrow[N_1\to\infty]{D} u(L_1).$$

Taigi, pagal W apibrėžimą randame

$$W(s + i\theta_{N_1}) \xrightarrow[N_1\to\infty]{D} u(L_1). \quad (7)$$

Pagal funkcijos u apibrėžimą, kai $\sigma > \frac{3}{2}$,

$$W(s) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} u_{jl}L_{E_j}(s_l + s) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^s}; \quad (8)$$

čia $a_m = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}\frac{u_{jl}c_j(m)}{m^{s_l}}$, nes šioje srityje $L_{E_j}(s)$ yra išreiškiama absoliučiai konverguojančia Dirichlė eilute

$$L_{E_j}(s) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m(m)}{m^s},\quad j = 1,...,\ n.$$

Be to, $c_j(m) = O(m^{\alpha+\beta+\varepsilon})$ kiekvienam $\varepsilon > 0.$ Funkcija $W(s)$ tenkina tokias pat sąlygas, kaip ir $L_{E_j}(s)$ funkcija. Taigi, pakartoję teoremos iš [8] įrodymą, gauname, kad tikimybinis matas

$$\mu_N(W(s + imh) \in A),\ A \in \mathrm{B}(H(\hat{D}_V)) \quad (9)$$

silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento

$$W(s,\omega) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m\omega(m)}{m^s}$$

skirstinį. Jeigu $s \in D_V$, turime

$$L_{E_j}(s,\omega) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_j(m)\omega(m)}{m^s},\ j = 1,...,\ n.$$

Iš funkcijos u apibrėžimo ir (8) gauname

$$W(s,\omega) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}u_{jl}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_j(m)\omega(m)}{m^{s_l+s}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}u_{jl}L_{E_j}(s_l + s,\omega) = u(L(s,\omega)).$$

Vadinasi (9) tikimybinis matas, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $u(L(s,\omega))$ skirstinį. Taigi gauname lemos tvirtinimą.

Teoremos įrodymas. Iš 2 lemos turime

$$W(s + i\theta_{N_1}) \xrightarrow[N_1 \to \infty]{D} u(L(s));$$

čia N_1 toks pat, kaip ir 2 lemos įrodyme. Iš čia ir (7) turime, kad atsitiktinis elementas turi tą patį skirstinį, t. y.

$$u(L) \overset{D}{=} u(L_1). \qquad (10)$$

Dabar tegul $u_1 : H(\hat{D}_V) \to \mathbf{C}$ yra apibrėžiama formule

$$u_1(f) = f(0), \quad f \in H(\hat{D}_V).$$

Vadinasi, funkcija u_1 yra mati. Todėl, remiantis (10) lygybe

$$u(L)(0) \overset{D}{=} u(L_1)(0).$$

Tuomet iš funkcijos u apibrėžimo gauname

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} u_{jl} L_{E_j}(s_l) \overset{D}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} u_{jl} L_{E_{1j}}(s_l), \qquad (11)$$

bet kokiems kompleksiniams skaičiams u_{jl}. Erdvės $\mathbf{R}^{2nr}$ hiperplokštuma sudaro apibrėžiančią klasę [1]. Todėl hiperplokštumos taip pat sudaro ir erdvės $\mathbf{C}^{nr}$ apibrėžiančią klasę. Vadinasi, iš (11) matome, kad $\mathbf{C}^{nr}$-reikšmiai atsitiktiniai elementai $L_{E_j}(s_l)$ ir $L_{E_{1j}}(s_l)$, $j = 1,..., n$, $l = 1,..., r$, turi tą patį skirstinį.

Tegul K yra juostos D_V kompaktiškas poaibis ir $f_1,..., f_n \in H(D_V)$. Tuomet kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$G = \{(u_1,...,u_n) \in H^n(D_V) : \sup_{s \in K} |u_j(s) - f_j(s)| \le \varepsilon,$$
$$j = 1,...,n\}.$$

Tegul seka $\{s_l\}$ yra tiršta srityje K. Be to, tegul

$$G_r = \{(u_1,...,u_n) \in H^n(D_V) : |u_j(s_l) - f_j(s_l)| \le \varepsilon,$$
$$j = 1,...,n, \ l = 1,...,r\}.$$

Tuomet iš atsitiktinių elementų $L_{E_j}(s_l)$ ir $L_{E_{1j}}(s_l)$ savybių gauname

$$m_H(\omega \in \Omega : L(s,\omega) \in G_r) = P(L_1(s) \in G_r). \quad (12)$$

Kadangi seka $\{s_l\}$ yra tiršta srityje K, tai $G_r \to G$, kai $r \to \infty$. Todėl, jeigu (12) formulėje r tolinsime į begalybę, gausime

$$m_H(\omega \in \Omega : L(s,\omega) \in G) = P(L_1(s) \in G). \qquad (13)$$

Erdvė $H^n(D_V)$ yra separabili. Todėl baigtinė sferų sankirta sudaro apibrėžiančią klasę [1]. Iš čia ir (12) gauname

$$L \overset{D}{=} L_1.$$

Iš čia ir (6) gauname

$$L_{N_1} \xrightarrow[N_1 \to \infty]{D} L. \qquad (14)$$

Vadinasi, matas P_{N_1}, kai $N_1 \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento L skirstinį. Todėl, remdamiesi 1 lema ir 1.1.9 teorema iš [10] gauname teoremos tvirtinimą, nes atsitiktinis elementas L (14) sąryšyje nepriklauso nuo sekos N_1 parinkimo.

Taigi turime, kad matas $P_N(A)$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $L(s, \omega)$ skirstinį $P_L(A)$.

Literatūra

1. Billingsley P., 1968, *Convergence of Probability Measures*. Wiley. New York.
2. Breuil C., Conrad B., Diamond F., Taylor R., 2001, On the modularity of elliptic curves over Q: wild 3-adic exercises., *J. Amer. Math. Soc*. No. 14. P. 843–939.
3. Conway J. B., 1978, *Functions of one complex variable*. Second edition. Springer. New York.
4. Garbaliauskienė V., 2005, *The universality of L-functions of elliptic curves*. Doctoral Dissertation. Vilnius University.
5. Garbaliauskienė V., Kačinskaitė R., Laurinčikas A., 2004, The joint universality for L-functions of elliptic curves. *Nonlinear Anal., Model. Control*. Vol. 9. No. 4. P. 331–348.
6. Garbaliauskienė V., Genys J., Laurinčikas A., 2008, Discrete universality of the L-functions of elliptic curves. *Sib. Math. J.* Vol. 49. No. 4. P. 612–627.
7. Kačinskaitė R., 2002, Discrete limit theorem for the Matsumoto zeta-function in the space of meromorphic functions. *Lith. Math. J.* No. 42 (1). P. 37–53.
8. Kačinskaitė R., 2001, Discrete limit theorem for the Matsumoto zeta-function in the space of analytic functions. *Liet. Matem. Rink*.
9. Laurinčikas A., 1998, On the Matsumoto zeta-function. *Acta Arith*. No. 84. P. 1–16.
10. Laurinčikas A., 1996, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*. Kluwer, Dordrecht, Boston, London.

JOINT DISCRETE VALUE-DISTRIBUTION FOR THE *L*-FUNCTIONS OF ELLIPTIC CURVES

Lina Šadbaraitė, Roma Kačinskaitė

Summary

The paper aims at analysis of joint discrete value-distribution for L-functions of elliptic curves in the space of analytic functions. We consider the collection of functions $L_{E_j}(s)$ of the curves E_j defined by Euler product

$$L_{E_j}(s)=\prod_{p\nmid\Delta_j}\left(1-\frac{\lambda_j(p)}{p^s}+\frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1}\prod_{p\mid\Delta_j}\left(1-\frac{\lambda_j(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

respectively, $j=1,\ldots,n.$ Here $s=\sigma+it$ is a complex variable, p is a prime number, $\lambda_j(p)=p-\nu_j(p)$, and $\nu_j(p)$ is the number of solutions of the congruence $y^2\equiv x^3+a_jx+b_j(\operatorname{mod}p)$, $j=1,\ldots,n,$ and the elliptic curves E_j are given by the Weierstrass equations $y^2\equiv x^3+a_jx+b_j(\operatorname{mod}p)$ with discriminant $\Delta_j=-16\left(4a_j^3+27b_j^2\right)\neq 0,$ $j=1,\ldots,n,$ respectively. Additionally, we use the step $h>0$ of an arithmetical progression such that $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ is irrational for $k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$. Applying additional conditions for $L_{E_j}(s)$, we obtain a discrete limit theorem in the sense of the weakly convergent probability measures in the space of analytic functions with an explicitly given form.

Keywords: elliptic curve, L-function, probability measure, weak convergence.

DISKRETUS JUNGTINIS ELIPSINIŲ KREIVIŲ *L*-FUNKCIJŲ REIKŠMIŲ PASISKIRSTYMAS

Lina Šadbaraitė, Roma Kačinskaitė

Santrauka

Straipsnis skirtas diskrečiam jungtiniam elipsinių kreivių L-funkcijų reikšmių pasiskirstymo analizinių funkcijų erdvėje tyrimui. Nagrinėjame rinkinį kreivių E_j funkcijų $L_{E_j}(s)$, apibrėžiamų atitinkamomis Oilerio sandaugomis

$$L_{E_j}(s)=\prod_{p\nmid\Delta_j}\left(1-\frac{\lambda_j(p)}{p^s}+\frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1}\prod_{p\mid\Delta_j}\left(1-\frac{\lambda_j(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

Čia $s=\sigma+it$ yra kompleksinis kintamasis, p – pirminis skaičius, $\lambda_j(p)=p-\nu_j(p)$, $\nu_j(p)$ yra lyginio $y^2\equiv x^3+a_jx+b_j(\operatorname{mod}p)$, $j=1,\ldots,n$ sprendinių skaičius, o kreivės E_j yra užrašomos atitinkamomis Vejerštraso lygtimis $y^2\equiv x^3+a_jx+b_j(\operatorname{mod}p)$ su diskriminantu $\Delta_j=-16\left(4a_j^3+27b_j^2\right)\neq 0,$ $j=1,\ldots,n.$ Taip pat mes naudojame aritmetinės progresijos žingsnį $h>0$ tokį, kad $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ būtų iracionalus skaičius, kai $k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$. Pritaikę papildomas sąlygas funkcijoms $L_{E_j}(s)$, gauname diskrečią jungtinę teoremą silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje su išreikštiniu mato pavidalu.

Prasminiai žodžiai: elipsinė kreivė, L-funkcija, tikimybinis matas, silpnas konvergavimas.

Įteikta 2011-06-02

Apžvalginiai straipsniai