Liet. matem. rink., **46**, *No.* 2, 2006, 215–255

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ДВУПОЛОЙ ПОПУЛЯЦИИ С УЧЕТОМ СИЛЬНОГО МАТЕРИНСКОГО ПРИСМОТРА ЗА ДЕТЬМИ

В. Скакаускас

Вильнюсский университет, Наугардуко 24, 03225 Вильнюс, Литва
(e-mail: vladas.skakauskas@maf.vu.lt)

Резюме. Предложена детерминистическая модель динамики двуполой немигрирующей популяции с учетом сильного материнского и слабого отцовского присмотра за детьми. Модель включает функцию формирования пар типа гармонического среднего с весами и пренебрегает распадом пар. Предполагается, что каждый пол имеет дорепродуктивный и репродуктивный возрастные интервалы. Все взрослые особи делятся на самцов и самок одиночек, постоянные пары полов и самок-вдов, после гибели партнеров по паре присматривающих за детьми-сиротами. Пары делятся на два типа: пары, в данный момент не имеющие детей в возрасте, когда нужен присмотр, и пары, присматривающие за детьми. Все особи дорепродуктивного возраста разделены на группы младенцев (детенышей) и подростков. Предполагается, что младенцы находятся под присмотром пары родителей или только под присмотром матери (после гибели отца). Подростки могут жить самостоятельно, но не могут сочетаться. Также предполагается, что детей производят только пары. Модель состоит из девяти интегродифференциальных уравнений в частных производных с условиями интегрального типа. Получены достаточные условия существования и несуществования сепарабельных решений и дана система уравнений, описывающая эволюцию макропараметров в случае витальных скоростей, не зависящих от возрастов.

Ключевые слова: формирование пар, присмотр за детьми, родительский присмотр, материнский присмотр.

Поступило в редакцию 21 02 2006

1. ВВЕДЕНИЕ

В математической биологии хорошо известны модели Шарпа–Лотки–Маккендрика–фон Ферстера (см., например, [5, 17]) и Гоппенштеда–Староверова [4, 16] (или ее более простая версия, предложенная Фредриксоном). Когда информация о соотношении полов не важна для описания динамики популяции с учетом возрастной структуры, обычно используется однополая модель Шарпа–Лотки–Маккендрика-фон Ферстера (или ее обобщение Гуртина–МакКами [2]). Вторая (или ее модификация Гаделера [3], включающая период половой зрелости), описывает эволюцию популяции, формирующей постоянные пары. Однако эти модели не описывают феномен присмотра за детьми, который является врожденным для многих видов птиц и млекопитающих.

Мосс де Оливейра (см. [8] и там данные ссылки) была первой, которая изучала последствия этого феномена. Она включила присмотр за детьми в модель Пенна, которая хорошо известна в компьютерном моделировании биологического старения.

В статьях [10]–[15] мы предложили пять моделей динамики популяции с учетом возрастной структуры и присмотра за детьми: две для однополой и три для двуполой популяции.

Одна из двух моделей однополой популяции ([10, 11, 13]) описывает динамику популяции, производящей потомков при фиксированных возрастах, в то время как другая посвящена динамике популяции, производящей потомков при любом репродуктивном возрасте. В двух из трех моделей двуполой популяции (см. [10, 14]) изучается популяция, формирующая временные (на период скрещивания) пары. Третья модель двуполой популяции [15] обобщает модель немигрирующей популяции Гоппенштеда–Староверова и описывает эволюцию популяции, формирующей постоянные пары, присматривающие за детьми. Основное требование для моделей немигрирующих популяций, предложенных в этих работах, заключается в том, что все дети, находящиеся под материнским (или родительским) присмотром, погибают в случае гибели их матери (или любого из родителей).

В настоящей работе предложено другое обобщение модели немигрирующей популяции Гоппенштеда–Староверова. Эта модель включает функцию формирования пар типа гармонического среднего с весами и пренебрегает распадом пар. Каждый пол имеет дорепродуктивный и репродуктивный возрастные интервалы. Все взрослые особи (репродуктивного возраста) делятся на самцов и самок одиночек в данный момент и постоянные пары полов. Все пары разделены на два типа: пары, в данный момент не имеющие детей, нуждающихся в присмотре, и пары, присматривающие за детьми. Все особи дорепродуктивного возраста разделены на групы младенцев и подростков. Предполагается, что потомки младенческого возраста находятся под материнским (или родительским) присмотром, а подростки могут жить без такого присмотра. Также предполагается, что только пары могут производить детей. Допускается *сильный материнский и слабый отцовский присмотр.* Это означает, что *все дети младенческого возраста погибают в случае гибели их матери, но они не обязаны погибнуть, если погибает их отец.* Модель состоит из девяти интегродифференциальных уравнений с условиями интегрального типа.

В случае независящих от времени витальных (жизненно важных) скоростей изучено существование или несуществование сепарабельных решений этой модели, а в случае витальных скоростей, независящих от возрастов, получена система уравнений, описывающая эволюцию макромоментов.

Анализ сепарабельных решений модели, рассмотренной в настоящей работе, и моделей, предложенных в [15], основан на методе Прусса и Шапахера [9], который они использовали при изучении персистентных решений (с положительным ростом) уравнения Гоппенштеда–Староверова с функцией формирования пар типа гармонического среднего. Марчева [7] изучала сепарабельные решения модели Гоппенштеда–Староверова в репрезентации Фредриксона [1]. Она доказала существование сепарабельных решений этой модели с однородной функцией общего типа формирования пар. В статьях [7] и [9] рассматривается существование решений с положительной скоростью роста. В [7] также указан возможный путь расширения результатов на случай отрицательной скорости роста решения. Захер [18] также изучал модель Гоппенштеда–Староверова с однородной функцией общего вида формирования пар и получил ограничения на витальные скорости и функцию скрещивания, гарантирующие существование или несуществование экспоненциально растущих персистентных решений. В частности, в случае функции скрещивания обобщенно однородного типа в эти ограничения входят только параметры модели. Как указано в [18], метод Захера может быть использован для вывода достаточных условий существования сепарабельных решений модели Гоппенштеда–Староверова с отрицательной скоростью роста.

Условия, данные в настоящей работе, допускают существование сепарабельных решений модели (3.1) со скоростью роста в конечном интервале с отрицательной нижней границей.

Настоящая работа организована следующим образом. В параграфе 3 дана модель. В параграфе 4 изучаются сепарабельные решения для общего типа витальных скоростей. В параграфе 5 изучены сепарабельные решения модели в случае постоянных витальных скоростей. В параграфе 6 доказаны две леммы. Система уравнений, описывающих эволюцию во времени макромоментов в случае не зависящих от возрастов витальных скоростей, дана в параграфе 7. Несколько замечаний в параграфе 8 завершают работу.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Для анализа динамики популяции с сильным материнским и слабым отцовским присмотром за детьми мы используем следующую систему обозначений.

T, τ $(T < \tau)$: период присмотра за детьми и половой зрелости соответственно;

$u_s(t, \tau_s)\,\mathrm{d}\tau_s$: среднее число особей возраста $\xi \in [\tau_s, \tau_s + \mathrm{d}\tau_s]$ в момент t ($\tau_s \in (T, \tau)$ для подростков, $\tau_s \in (\tau, \infty)$ для взрослых одиноких особей, $s = 1$ для самцов, $s = 2$ для самок);

$p_s(\tau_s)u_s(t, \tau_s)\,\mathrm{d}\tau_s$: среднее число особей возраста $\xi \in [\tau_s, \tau_s + \mathrm{d}\tau_s]$ в момент t ($s = 1$ для самцов, $s = 2$ для самок), которые желают образовать пары;

$u_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2\,\mathrm{d}\tau_3$: среднее число пар, которые образованы из самцов и самок возраста $\xi \in [\tau_1, \tau_1 + \mathrm{d}\tau_1]$ и $\xi \in [\tau_2, \tau_2 + \mathrm{d}\tau_2]$ соответственно, сушествуют в течение времени $\xi \in [\tau_3, \tau_3 + \mathrm{d}\tau_3]$ и в момент t не имеют детей младенческого возраста;

$u_4(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2\,\mathrm{d}\tau_3\,\mathrm{d}\tau_4$: среднее число пар, которые образованы из самцов и самок возраста $\xi \in [\tau_1, \tau_1 + \mathrm{d}\tau_1]$ и $\xi \in [\tau_2, \tau_2 + \mathrm{d}\tau_2]$ соответственно, сушествуют в течение времени $\xi \in [\tau_3, \tau_3 + \mathrm{d}\tau_3]$ и в момент t присматривают за детьми возраста $\xi \in [\tau_4, \tau_4 + \mathrm{d}\tau_4]$;

$u_{4s}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2\,\mathrm{d}\tau_3\,\mathrm{d}\tau_4$: среднее число в момент t потомков-младенцев ($s = 1$ для самцов, $s = 2$ для самок) возраста $\xi \in [\tau_4, \tau_4 + \mathrm{d}\tau_4]$, пары родителей которых образованы из отцов и матерей возраста $\xi \in [\tau_1, \tau_1 + \mathrm{d}\tau_1]$ и $\xi \in [\tau_2, \tau_2 + \mathrm{d}\tau_2]$ соответственно, и существуют в течение времени $\xi \in [\tau_3, \tau_3 + \mathrm{d}\tau_3]$;

$u_5(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2\,\mathrm{d}\tau_3\,\mathrm{d}\tau_4\,\mathrm{d}\tau_5$: среднее число в момент t самок-вдов возраста $\xi \in [\tau_2, \tau_2 + \mathrm{d}\tau_2]$, до гибели партнеров находившихся в парах в течение времени $\xi \in [\tau_3, \tau_3 + \mathrm{d}\tau_3]$ и в момент t присматривающих за детьми-сиротами возраста $\xi \in [\tau_5, \tau_5 + \mathrm{d}\tau_5]$, которые в возрасте $\xi \in [\tau_4, \tau_4 + \mathrm{d}\tau_4]$ лишились отцов (из-за гибели последних), имевших возраст $\xi \in [\tau_1, \tau_1 + \mathrm{d}\tau_1]$ в момент рождения детей (будущих сирот);

$u_{5s}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2\,\mathrm{d}\tau_3\,\mathrm{d}\tau_4\,\mathrm{d}\tau_5$: среднее число потомков-сирот ($s = 1$ для самцов, $s = 2$ для самок) младенческого возраста $\xi \in [\tau_5, \tau_5 + \mathrm{d}\tau_5]$ в момент t, которые в возрасте $\xi \in [\tau_4, \tau_4 + \mathrm{d}\tau_4]$ лишились отцов (из-за гибели последних), имевших возраст $\xi \in [\tau_1, \tau_1 + \mathrm{d}\tau_1]$ в момент рождения детей (будущих сирот), и которые были рождены матерями до гибели партнеров, находившимися в парах в течение времени $\xi \in [\tau_3, \tau_3 + \mathrm{d}\tau_3]$ и в момент t имеющими возраст $\xi \in [\tau_2, \tau_2 + \mathrm{d}\tau_2]$;

$\nu_s(t, \tau_s)\,\mathrm{d}t$: вероятность умереть в интервале времени $[t, t + \mathrm{d}t]$ для особи возраста τ_s ($\tau_s \in (T, \tau)$ для подростка, $\tau_s \in (\tau, \infty)$ для одинокой взрослой особи, $s = 1$ для самца, $s = 2$ для самки);

$\nu_{3s}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3)\,\mathrm{d}t$: вероятность умереть в интервале времени $[t, t + \mathrm{d}t]$ для особи ($s = 1$ для самца, $s = 2$ для самки) из пары, состоящей из самца и самки возраста τ_1 и τ_2 соответственно, и существующей в течение времени τ_3;

$\nu_{4s}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)\,\mathrm{d}t$: вероятность умереть в интервале времени $[t, t + \mathrm{d}t]$ для особи ($s = 1$ для самца, $s = 2$ для самки) из пары, состоящей из самца и самки возраста τ_1 и τ_2 соответственно, существующей в течение времени τ_3 и присматривающей за детьми возраста τ_4;

$\tilde{\nu}_{4s}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)\,\mathrm{d}t$: вероятность умереть в интервале времени $[t, t + \mathrm{d}t]$ для потомка-младенца в возрасте τ_4, чей отец и мать из пары, существующей в течении времени τ_3, имеют возраст τ_1 и τ_2 соответственно;

$\nu_5(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)\,\mathrm{d}t$: вероятность умереть в интервале времени $[t, t + \mathrm{d}t]$ самке-вдове в возрасте τ_2, до гибели партнера находившейся в паре в течение времени τ_3, которая присматривает за детьми-сиротами возраста τ_5, имевших возраст τ_4 в момент гибели их отца, имевшего возраст τ_1 в момент рождения его детей (будущих сирот);

$\tilde{\nu}_{5s}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)\,\mathrm{d}t$: вероятность умереть в интервале времени $[t, t + \mathrm{d}t]$ потомку-сироте младенческого возраста τ_5 ($s = 1$ для самца, $s = 2$ для самки), который в возрасте τ_4 лишился отца (из-за гибели последнего), имевшего возраст τ_1 в момент рождения его детей (будущих сирот), а мать которого до гибели партнера находилась в паре в течение времени τ_3 и в момент t имеет возраст τ_2;

$\alpha(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3)\,\mathrm{d}t$: вероятность родить потомков в интервале времени $[t, t + \mathrm{d}t]$ паре, состоящей из самца и самки возраста τ_1 и τ_2 соответственно, и существующей в течение времени τ_3;

$b_s(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3)\alpha(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3)\,\mathrm{d}t$: среднее число потомков ($s = 1$ для самцов, $s = 2$ для самок), рожденных в интервале времени $[t, t + \mathrm{d}t]$ парой, состоящей из самца и самки возраста τ_1 и τ_2 соответственно, и существующей в течение времени τ_3;

$L_s(t, \tau_s)\,\mathrm{d}\tau_s\,\mathrm{d}t$: среднее число одиноких особей возраста $\xi \in [\tau_s, \tau_s + \mathrm{d}\tau_s]$ ($s = 1$ для самцов, $s = 2$ для самок), которые сформируют пары в интервале времени $[t, t + \mathrm{d}t]$;

$S_1(t, \tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}t$: среднее число самцов возраста $\xi \in [\tau_1, \tau_1 + \mathrm{d}\tau_1]$, находящихся в браке (присматривающих за детьми или не имеющих детей в возрасте, когда необходим присмотр), которые станут одинокими в интервале времени $[t, t + \mathrm{d}t]$ по причине гибели их жен;

$S_2(t, \tau_2)\,\mathrm{d}\tau_2\,\mathrm{d}t$: среднее число замужних самок возраста $\xi \in [\tau_2, \tau_2 + \mathrm{d}\tau_2]$, которые не имеют детей возраста, нуждающегося в присмотре, и которые станут одинокими в интервале времени $[t, t + \mathrm{d}t]$ по причине гибели их мужей плюс среднее число самок-вдов, которые в том же интервале времени завершат присмотр за детьми;

$S_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2\,\mathrm{d}\tau_3\,\mathrm{d}t$: среднее число пар, состоящих из самцов и самок возраста τ_1 и τ_2 соответственно, которые существуют в течение времени τ_3 и которые завершат присмотр за детьми в интервале времени $[t, t + \mathrm{d}t]$;

$m(t, \tau_1, \tau_2)\,\mathrm{d}t$: вероятность образовать пару в интервале времени $[t, t + \mathrm{d}t]$ из самца возраста τ_1 и самки возраста τ_2;

$u_1^0(\tau_1)$, $u_2^0(\tau_2)$, $u_3^0(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, $u_4^0(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$, $u_{4s}^0(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$, $u_5^0(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)$, $u_{5s}^0(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)$, $s = 1, 2$: начальные распределения;

$[u_s\big|_{\tau_s=\tau}]$ и $[u_3\big|_{\tau_3=T}]$: скачок разрывности функций u_s при $s = 1, 2$ и u_3 на плоскостях $\tau_s = \tau$ и $\tau_3 = T$ соответственно;

$\tilde{m}(t, \tau_1, \tau_2) = p_1(\tau_1)p_2(\tau_2)m(t, \tau_1, \tau_2)$;

$\nu_3 = \alpha + \nu_{31} + \nu_{32}$, $\nu_4 = \nu_{41} + \nu_{42}$, $\widehat{\nu}_{4s} = \tilde{\nu}_{4s} + \nu_{42}$, $\widehat{\nu}_{5s} = \tilde{\nu}_{5s} + \nu_5$, $s = 1, 2$;

$Q_s = (T, \tau) \cup (\tau, \infty)$, $Q'_s = (T, \infty)$,

$Q_3 = \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\colon\ \tau_s \in (\tau + \tau_3, \infty),\ s = 1, 2;\ \tau_3 \in (0, T) \cup (T, \infty)\}$;

$Q'_3 = \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\colon\ \tau_s \in (\tau + \tau_3, \infty),\ s = 1, 2;\ \tau_3 \in (0, \infty)\}$;

$Q_{3*} = \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\colon\ \tau_s \in (\tau + \tau_3, \infty),\ s = 1, 2;\ \tau_3 \in (0, T)\}$;

$Q_3^* = \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\colon\ \tau_s \in (\tau + \tau_3, \infty),\ s = 1, 2;\ \tau_3 \in (T, \infty)\}$;

$Q_4 = \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)\colon\ \tau_s \in (\tau + \tau_3, \infty),\ s = 1, 2;\ \tau_3 \in (\tau_4, \tau_4 + T) \cup (\tau_4 + T, \infty),\ \tau_4 \in (0, T)\}$;

$Q'_4 = \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)\colon\ \tau_s \in (\tau + \tau_3, \infty), s = 1, 2;\ \tau_3 \in (\tau_4, \infty), \tau_4 \in (0, T)\}$;

$Q_5 = \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)\colon\ \tau_1 \in (\tau + \tau_3, \infty), \tau_5 \in (\tau_4, T), \tau_4 \in (0, T), \tau_2 \in (\tau + \tau_3 + \tau_5 - \tau_4, \infty), \tau_3 \in (\tau_4, \infty)\}$;

3. МОДЕЛЬ

В этом параграфе мы представляем детерминистическую модель немигрирующей популяции, обладающей половой и возрастной структурой и брачной возможностью, и принимаем во внимание родительский присмотр за детьми. Мы включаем сильный материнский и слабый отцовский присмотр. Это означает, что дети младенческого возраста погибают в случае гибели их матерей, но они защищены от обязательной гибели в случае смерти их отцов. В случае гибели партнера по паре мать-вдова присматривает за детьми-сиротами. Мы включаем отцовский присмотр косвенно, т. е. допуская случаи $\nu_{31} \neq \nu_{41}$ и $\tilde{\nu}_{4s} \neq \tilde{\nu}_{5s}$. В качестве функции скрещивания мы используем функцию типа гармонического среднего с весами. Ясно, что любая другая функция может быть использована. Мы пренебрегаем распадом пар и беременностью самок. Включение этих явлений ведет к очень сложному ветвящемуся процессу, который в настоящей работе мы рассматривать не будем. Мы также предполагаем, что детей производят только пары. Используя закон баланса мы выводим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial_t u_s + \partial_{\tau_s} u_s = -\nu_s u_s - L_s + S_s, & \tau_s \in Q_s,\ s=1,2,\ t>0, \\ \partial_t u_3 + \sum_{k=1}^{3} \partial_{\tau_k} u_3 = -\nu_3 u_3 + S_3, & (\tau_1,\tau_2,\tau_3) \in Q_3,\ t>0, \\ \partial_t u_4 + \sum_{k=1}^{4} \partial_{\tau_k} u_4 = -\nu_4 u_4, & (\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4) \in Q_4,\ t>0, \\ \partial_t u_{4s} + \sum_{k=1}^{4} \partial_{\tau_k} u_{4s} = -\widehat{\nu}_{4s} u_{4s}, & s=1,2,\ (\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4) \in Q_4,\ t>0, \\ \partial_t u_5 + \sum_{k=2,5} \partial_{\tau_k} u_5 = -\nu_5 u_5, & (\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5) \in Q_5,\ t>0, \\ \partial_t u_{5s} + \sum_{k=2,5} \partial_{\tau_k} u_{5s} = -\widehat{\nu}_{5s} u_{5s}, & s=1,2,\ (\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5) \in Q_5,\ t>0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где

$$L_s = \begin{cases} 0, & \tau_s \in (T,\tau), \\ \int_\tau^\infty u_3\big|_{\tau_3=0} \mathrm{d}\tau_k, & \tau_s \in (\tau,\infty), \quad s,k=1,2, \quad s \neq k, \end{cases}$$

$$S_1 = \begin{cases} 0, & \tau_1 \in (T,\tau), \\ \int_0^{\tau_1-\tau} \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3}^\infty \left\{ \nu_{32} u_3 + \int_0^{\min(\tau_3,T)} \nu_{42} u_4 \,\mathrm{d}\tau_4 \right\} \mathrm{d}\tau_2, & \tau_1 \in (\tau,\infty), \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} 0, & \tau_2 \in (T,\tau), \\ \int_0^{\tau_2-\tau} \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3}^\infty \nu_{31} u_3 \,\mathrm{d}\tau_1, & \tau_2 \in (\tau,\infty), \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 0, & \tau_2 \in (T,\tau+T), \\ \int_0^T \mathrm{d}\tau_4 \int_{\tau_4}^{\tau_4+\tau_2-\tau-T} \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3}^\infty u_5\big|_{\tau_5=T} \mathrm{d}\tau_1, & \tau_2 \in (\tau+T,\infty), \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} 0, & (\tau_1,\tau_2,\tau_3) \in Q_{3*}, \\ u_4\big|_{\tau_4=T}, & (\tau_1,\tau_2,\tau_3) \in Q_3^*, \end{cases}$$

с условиями:

$$u_3\big|_{\tau_3=0} = \tilde{m} u_1 u_2 \Big/ \sum_{k=1}^{2} \int_\tau^\infty p_k(x) u_k(t,x) \,\mathrm{d}x,$$

$$
\begin{aligned}
& u_4\big|_{\tau_4=0} = \alpha u_3, \quad u_{4s}\big|_{\tau_4=0} = b_s\alpha u_3, \quad s=1,2,\\
& u_5\big|_{\tau_5=\tau_4} = \nu_{41}u_4, \quad u_{5s}\big|_{\tau_5=\tau_4} = \nu_{41}u_{4s}, \quad s=1,2,\\
& u_s\big|_{\tau_s=T} = \int_T^\infty \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3}^\infty \mathrm{d}\tau_2 \int_{\tau+\tau_3}^\infty u_{4s}\big|_{\tau_4=T}\,\mathrm{d}\tau_1\\
& \qquad + \int_0^T \mathrm{d}\tau_4 \int_{\tau_4}^\infty \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3+T-\tau_4}^\infty \mathrm{d}\tau_2 \int_{\tau+\tau_3}^\infty u_{5s}\big|_{\tau_5=T}\,\mathrm{d}\tau_1, \quad s=1,2,\\
& [u_s\big|_{\tau_s=\tau}] = [u_3\big|_{\tau_3=T}] = 0, \quad s=1,2,\\
& u_i\big|_{t=0} = u_i^0, \quad i=1,\dots,5;\\
& u_{ks}\big|_{t=0} = u_{ks}^0, \quad k=4,5; \quad s=1,2.
\end{aligned}
$$

Здесь ∂_t и ∂_{τ_k} означают частные производные. Из вышесказанного следует, что данные $\nu_s, \nu_{3s}, \nu_{4s}, \tilde{\nu}_{4s}, \nu_5, \tilde{\nu}_{5s}, b_s, \alpha, m, p_s, u_i^0,\ u_{ks}^0$ и неизвестные функции $u_s, u_3, u_4,\ u_{4s}, u_5,\ u_{5s}$ при $s=1,2,\ i=1,\dots,5$ и $k=4,5$ должны быть положительными, в противном случае они лишены биологического смысла. Положительные постоянные T и τ также должны быть заданными. Предположение $T<\tau$, высказанное в параграфе 2, для многих видов является естественным.

Дополнительно мы сформулируем следующие условия совместимости:

$$
\begin{aligned}
& u_3^0\big|_{\tau_3=0} = \tilde{m}\big|_{t=0}u_1^0u_2^0 \Big/ \sum_{k=1}^{2}\int_\tau^\infty p_k u_k^0\,\mathrm{d}x,\\
& u_4^0\big|_{\tau_4=0} = \alpha\big|_{t=0}u_3^0, \quad u_{4s}^0\big|_{\tau_4=0} = (b_s\alpha)\big|_{t=0}u_3^0, \quad s=1,2,\\
& u_5^0\big|_{\tau_5=\tau_4} = \nu_{41}\big|_{t=0}u_4^0, \quad u_{5s}^0\big|_{\tau_5=\tau_4} = \nu_{41}\big|_{t=0}u_{4s}^0, \quad s=1,2,\\
& u_s^0\big|_{\tau_s=T} = \int_T^\infty \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3}^\infty \mathrm{d}\tau_2 \int_{\tau+\tau_3}^\infty u_{4s}^0\big|_{\tau_4=T}\,\mathrm{d}\tau_1\\
& \qquad + \int_0^T \mathrm{d}\tau_4 \int_{\tau_4}^\infty \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3+T-\tau_4}^\infty \mathrm{d}\tau_2 \int_{\tau+\tau_3}^\infty u_{5s}^0\big|_{\tau_5=T}\,\mathrm{d}\tau_1, \quad s=1,2,\\
& [u_s^0(\tau)] = [u_3^0\big|_{\tau_3=T}] = 0, \quad s=1,2.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Ясно, что $p_s u_s^0,\ u_{4s}^0\big|_{\tau_4=T}$ и $u_{5s}^0\big|_{\tau_5=T}$ должны быть интегрируемы, а $p_s u_s^0$ должна иметь основание положительной меры. Сильный материнский присмотр учтен прибавлением смертности матери к естественной смертности ее младенцев.

4. СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

В настоящем параграфе мы рассмотрим систему (3.1) с независящими от времени t витальными скоростями $\nu_s, \nu_{3s}, \nu_{4s}, \tilde{\nu}_{4s}, \nu_5, \tilde{\nu}_{5s}, b_s, \alpha$ и m при $s=1,2$ и будем искать ее решение в виде

$$\begin{aligned}
&u_s = U_s(\tau_s)\exp\{\lambda t\}, \quad s=1,2,\\
&u_3 = U_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\exp\{\lambda t\},\\
&u_4 = U_4(\tau_1,\dots,\tau_4)\exp\{\lambda t\},\\
&u_{4s} = U_{4s}(\tau_1,\dots,\tau_4)\exp\{\lambda t\}, \quad s=1,2,\\
&u_5 = U_5(\tau_1,\dots,\tau_5)\exp\{\lambda t\},\\
&u_{5s} = U_{5s}(\tau_1,\dots,\tau_5)\exp\{\lambda t\}, \quad s=1,2,\\
&u_i^0 = U_i, \quad i=1,\dots,5, \quad u_{ks}^0 = U_{ks}, \quad s=1,2; \quad k=4,5,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где функции U_i, U_{ks} и постоянная λ должны быть определены. Подставляя (4.1) в (3.1) мы получим систему

$$\begin{cases}
U_s' = -(\nu_s+\lambda)U_s - \tilde{L}_s + \tilde{S}_s \ \text{ в } Q_s, \quad s=1,2,\\
\sum_{k=1}^3 \partial_{\tau_k} U_3 = -(\nu_3+\lambda)U_3 + \tilde{S}_3 \ \text{ в } Q_3,\\
\sum_{k=1}^4 \partial_{\tau_k} U_4 = -(\nu_4+\lambda)U_4 \ \text{ в } Q_4,\\
\sum_{k=1}^4 \partial_{\tau_k} U_{4s} = -(\widehat{\nu}_{4s}+\lambda)U_{4s} \ \text{ в } Q_4, \quad s=1,2,\\
\sum_{k=2,5} \partial_{\tau_k} U_5 = -(\nu_5+\lambda)U_5 \ \text{ в } Q_5,\\
\sum_{k=2,5} \partial_{\tau_k} U_{5s} = -(\widehat{\nu}_{5s}+\lambda)U_{5s} \ \text{ в } Q_5,
\end{cases} \tag{4.2}$$

$$\tilde{L}_s = \begin{cases} 0 \ \text{ в } (T,\tau),\\ \int_\tau^\infty U_3\big|_{\tau_3=0} \mathrm{d}\tau_k \ \text{ в } (\tau,\infty), \quad s,k=1,2, \quad s\neq k, \end{cases}$$

$$\tilde{S}_1 = \begin{cases} 0 \ \text{ в } (T,\tau),\\ \int_0^{\tau_1-\tau} \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3}^\infty \left\{\nu_{32}U_3 + \int_0^{\min(\tau_3,T)} \nu_{42}U_4\,\mathrm{d}\tau_4\right\}\mathrm{d}\tau_2 \ \text{ в } (\tau,\infty), \end{cases}$$

$$\tilde{S}_2 = \begin{cases} 0 \ \text{ в } (T,\tau),\\ \int_0^{\tau_2-\tau} \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3}^\infty \nu_{31}U_3\,\mathrm{d}\tau_1 \ \text{ в } (\tau,\infty) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 0 \ \text{ в } (T,\tau+T),\\ \int_0^T \mathrm{d}\tau_4 \int_{\tau_4}^{\tau_4+\tau_2-\tau-T} \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3}^\infty U_5\big|_{\tau_5=T}\mathrm{d}\tau_1 \ \text{ в } (\tau+T,\infty); \end{cases}$$

$$\tilde{S}_3 = \begin{cases} 0 \ \text{ в } Q_{3*},\\ U_4\big|_{\tau_4=T} \ \text{ в } Q_3^*, \end{cases}$$

с условиями

$$
\begin{aligned}
&U_3\big|_{\tau_3=0} = \tilde{m} U_1 U_2 / f, \quad f = \sum_{k=1}^{2} \int_{\tau}^{\infty} p_k U_k \, \mathrm{d}x, \\
&U_4\big|_{\tau_4=0} = \alpha U_3, \quad U_{4s}\big|_{\tau_4=0} = b_s \alpha U_3, \quad s = 1, 2, \\
&U_5\big|_{\tau_5=\tau_4} = \nu_{41} U_4, \quad U_{5s}\big|_{\tau_5=\tau_4} = \nu_{41} U_{4s}, \quad s = 1, 2, \\
&U_s(T) = \int_T^{\infty} \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3}^{\infty} \mathrm{d}\tau_2 \int_{\tau+\tau_3}^{\infty} U_{4s}\big|_{\tau_4=T} \, \mathrm{d}\tau_1 \\
&\qquad + \int_0^T \mathrm{d}\tau_4 \int_{\tau_4}^{\infty} \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3+T-\tau_4}^{\infty} \mathrm{d}\tau_2 \int_{\tau+\tau_3}^{\infty} U_{5s}\big|_{\tau_5=T} \, \mathrm{d}\tau_1, \quad s = 1, 2, \\
&[U_s\big|_{\tau_s=\tau}] = [U_3\big|_{\tau_3=T}] = 0, \quad s = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Здесь и ниже штрих означает дифференцирование по переменной τ_s. Предполагая, что $m, \alpha, \nu_4, \widehat{\nu}_{4s}, \nu_5, \widehat{\nu}_{5s}$ и U_s при $s = 1, 2$ являются функциями класса C^1, и интегрируя уравнения $(4.2)_{3,\ldots,9}$, получим:

$$
\begin{aligned}
&U_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = f^{-1} \tilde{m}(\tau_1 - \tau_3, \tau_2 - \tau_3) v^{\lambda}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) U_1(\tau_1 - \tau_3) U_2(\tau_2 - \tau_3), \\
&U_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = (a^{\lambda}(\cdot, \tau_4) U_3)\big|_{(\tau_1-\tau_4, \tau_2-\tau_4, \tau_3-\tau_4)} \\
&\quad = (a^{\lambda}(\cdot, \tau_4) v^{\lambda})\big|_{(\tau_1-\tau_4, \tau_2-\tau_4, \tau_3-\tau_4)} f^{-1} \tilde{m}(\tau_1 - \tau_3, \tau_2 - \tau_3) U_1(\tau_1 - \tau_3) U_2(\tau_2 - \tau_3), \\
&U_{4s}(\tau_1, \ldots, \tau_4) = (\beta_s^{\lambda}(\cdot, \tau_4) U_3)\big|_{(\tau_1-\tau_4, \tau_2-\tau_4, \tau_3-\tau_4)} \\
&\quad = (\beta_s^{\lambda}(\cdot, \tau_4) v^{\lambda})\big|_{(\tau_1-\tau_4, \tau_2-\tau_4, \tau_3-\tau_4)} f^{-1} \tilde{m}(\tau_1 - \tau_3, \tau_2 - \tau_3) U_1(\tau_1 - \tau_3) U_2(\tau_2 - \tau_3), \\
&U_5(\tau_1, \ldots, \tau_5) = \xi^{\lambda}(\tau_1, \ldots, \tau_5) U_4(\tau_1, \tau_2 + \tau_4 - \tau_5, \tau_3, \tau_4) \\
&\quad = \xi^{\lambda}(\tau_1, \ldots, \tau_5) (a^{\lambda}(\cdot, \tau_4) v^{\lambda})\big|_{(\tau_1-\tau_4, \tau_2-\tau_5, \tau_3-\tau_4)} f^{-1} \tilde{m}(\tau_1 - \tau_3, \tau_2 + \tau_4 - \tau_3 - \tau_5) \\
&\qquad \times U_1(\tau_1 - \tau_3) U_2(\tau_2 + \tau_4 - \tau_3 - \tau_5), \\
&U_{5s}(\tau_1, \ldots, \tau_5) = \xi_s^{\lambda}(\tau_1, \ldots, \tau_5) U_{4s}(\tau_1, \tau_2 + \tau_4 - \tau_5, \tau_3, \tau_4) \\
&\quad = \xi_s^{\lambda}(\tau_1, \ldots, \tau_5) (\beta_s^{\lambda}(\cdot, \tau_4) v^{\lambda})\big|_{(\tau_1-\tau_4, \tau_2-\tau_5, \tau_3-\tau_4)} f^{-1} \tilde{m}(\tau_1 - \tau_3, \tau_2 + \tau_4 - \tau_3 - \tau_5) \\
&\qquad \times U_1(\tau_1 - \tau_3) U_2(\tau_2 + \tau_4 - \tau_3 - \tau_5),
\end{aligned}
$$

где:

$$
a^{\lambda}(\tau_1, \ldots, \tau_4) = \alpha(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \exp\left\{ - \int_0^{\tau_4} \big(\lambda + \nu_4(\xi + \tau_1, \xi + \tau_2, \xi + \tau_3, \xi)\big) \, \mathrm{d}\xi \right\},
$$

$$\beta_s^\lambda(\tau_1,\dots,\tau_4)=(\alpha b_s)\big|_{(\tau_1,\tau_2,\tau_3)}\exp\bigg\{-\int_0^{\tau_4}\big(\lambda+\widehat{\nu}_{4s}(\xi+\tau_1,\xi+\tau_2,\xi+\tau_3,\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi\bigg\},$$

$$\xi^\lambda(\tau_1,\dots,\tau_5)=\nu_{41}(\tau_1,\tau_2+\tau_4-\tau_5,\tau_3,\tau_4)\times\exp\bigg\{-\int_{\tau_4}^{\tau_5}\big(\lambda+\nu_5(\tau_1,\xi+\tau_2-\tau_5,\tau_3,\tau_4,\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi\bigg\},$$

$$\xi_s^\lambda(\tau_1,\dots,\tau_5)=\nu_{41}(\tau_1,\tau_2+\tau_4-\tau_5,\tau_3,\tau_4)\times\exp\bigg\{-\int_{\tau_4}^{\tau_5}\big(\lambda+\widehat{\nu}_{5s}(\tau_1,\xi+\tau_2-\tau_5,\tau_3,\tau_4,\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi\bigg\},$$

а $v^\lambda(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ является положительным решением уравнения

$$\sum_{k=1}^{3}\partial_{\tau_k}v^\lambda=-(\lambda+\nu_3)v^\lambda+\begin{cases}0 \text{ в } Q_{3*},\ v^\lambda\big|_{\tau_3=0}=1,\\ (v^\lambda a^\lambda(\cdot,T))\big|_{(\tau_1-T,\tau_2-T,\tau_3-T)} \text{ в } Q_3^*,\ [v^\lambda\big|_{\tau_3=T}]=0,\end{cases}\tag{4.3}$$

где $[v^\lambda\big|_{\tau_3=T}]$ означает скачок разрывности функции v^λ при $\tau_3=T$. Здесь и ниже $(z\phi(\cdot,\tau_4))\big|_{(\tau_1,\tau_2,\tau_3)}=z(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\phi(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)$ для любых z и ϕ. Ясно, что $v^\lambda(\tau_1,\tau_2,\tau_3)=v^0(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\exp\{-\lambda\tau_3\}$.

Используя обозначение $w_s(\tau_s)=f^{-1}U_s(\tau_s)$ и определение параметра f, выводим следующее характеристическое уравнение для λ:

$$\sum_{s=1}^{2}\int_\tau^\infty p_s(x)w_s(x)\,\mathrm{d}x=1.\tag{4.4}$$

Тогда из (4.2) находим функцию

$$w_s(\tau_s)=w_s(T)\exp\bigg\{-\int_T^{\tau_s}(\lambda+\nu_s(x))\,\mathrm{d}x\bigg\}\quad\text{при}\quad \tau_s\in[T,\tau],$$

и получаем следующую систему для w_1 и w_2:

$$\begin{cases} w_1'=-(\nu_1+\lambda+r_1(\tau_1;w_2)w_1+\int_\tau^{\tau_1}w_1(x)R_1^\lambda(\tau_1,x;w_2)\,\mathrm{d}x, & \tau_1>\tau,\\[2ex] w_2'=-(\nu_2+\lambda+r_2(\tau_2;w_1)w_1+\int_\tau^{\tau_2}w_2(x)R_{21}^\lambda(\tau_2,x;w_1)\,\mathrm{d}x\\ \qquad+\begin{cases}0, & \tau_2\in(\tau,\tau+T),\\ \int_\tau^{\tau_2-T}w_2(x)R_{22}^\lambda(\tau_2,x;w_1)\,\mathrm{d}x, & \tau_2>\tau+T,\end{cases}\end{cases}\tag{4.5}$$

с условиями

$$w_s(\tau) = w_s(T) f_s^\lambda \quad \text{при} \quad s = 1, 2, \tag{4.6}$$

и $[w_2(\tau + T)] = 0$, где:

$$f_s^\lambda = \exp\left\{ -\int_\tau^\tau (\lambda + \nu_s(x))\,\mathrm{d}x \right\},$$

$$w_s(T) = \int_\tau^\infty w_1(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_2(y)\kappa_s^\lambda(x, y; v^\lambda)\,\mathrm{d}y,$$

$$\kappa_s^\lambda(x, y; v^\lambda) = \kappa_{1s}^\lambda(x, y; v^\lambda) + \kappa_{2s}^\lambda(x, y; v^\lambda),$$

$$\kappa_{1s}^\lambda(x, y; v^\lambda) = \tilde{m}(x, y) \int_0^\infty (\beta_s^\lambda(\cdot, T)v^\lambda)\big|_{(x+z, y+z, z)}\,\mathrm{d}z,$$

$$\kappa_{2s}^\lambda(x, y; v^\lambda) = \tilde{m}(x, y) \int_0^\infty v^\lambda(x+z, y+z, z)\alpha_s^\lambda(x, y, z)\,\mathrm{d}z,$$

$$\alpha_s^\lambda(x, y, z) = \int_0^T \beta_s^\lambda(x+z, y+z, z, \tau_4)\xi_s^\lambda(x+z+\tau_4, y+z+T, z+\tau_4, \tau_4, T)\,\mathrm{d}\tau_4,$$

$$r_s(\tau_s; w_k) = \int_\tau^\infty \tilde{m}(\tau_1, \tau_2) w_k(\tau_k)\,\mathrm{d}\tau_k, \quad s \neq k; \quad s, k = 1, 2,$$

$$R_{21}^\lambda(\tau_2, x; w_1) = \int_\tau^\infty w_1(y)\tilde{m}(y, x)(v^\lambda \nu_{31})\big|_{(\tau_2 - x + y, \tau_2, \tau_2 - x)}\,\mathrm{d}y,$$

$$R_{22}^\lambda(\tau_2, x; w_1) = \int_\tau^\infty w_1(y)\tilde{m}(y, x)v^\lambda(\tau_2 + y - x - T, \tau_2 - T, \tau_2 - x - T)\delta^\lambda(\tau_2, x, y)\,\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}\delta^\lambda(\tau_2, x, y) = \int_0^T &\xi^\lambda(\tau_4 + \tau_2 + y - x - T, \tau_2, \tau_4 + \tau_2 - x - T, \tau_4, T)\\ &\times a^\lambda(\tau_2 + y - x - T, \tau_2 - T, \tau_2 - x - T, \tau_4)\,\mathrm{d}\tau_4,\end{aligned}$$

$$R_1^\lambda(\tau_1, x; w_2) = \int_\tau^\infty w_2(y) K^\lambda(\tau_1, \tau_1 - x + y, \tau_1 - x; v^\lambda)\,\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}K^\lambda(\tau_1, \tau_1 - x + y, \tau_1 - x; v^\lambda) &= \tilde{m}(x, y)\big\{(v^\lambda \nu_{32})\big|_{(\tau_1, \tau_1 - x + y, \tau_1 - x)}\\ &+ \int_{\gamma(\tau_1 - x, T)}^{\tau_1 - x} \nu_{42}(\tau_1, \tau_1 - x + y, \tau_1 - x, \tau_1 - x - z)(v^\lambda a^\lambda(\cdot, \tau_1 - x - z))\big|_{(z+x, z+y, z)}\,\mathrm{d}z\big\},\end{aligned}$$

$$\gamma(\tau_1 - x, T) = \begin{cases} 0, & \tau_1 - x \leqslant T, \\ \tau_1 - x - T, & \tau_1 - x > T. \end{cases}$$

Таким образом, сепарабельные решения (4.1) уравнений (3.1) соответствуют решению (w_1, w_2, λ) проблемы (4.5), (4.6) с $w_s > 0$ и вещественной λ. Для изучения существования или несуществования сепарабельных решений мы воспользуемся методом Прусса и Шапахера [9], примененным при изучении сепарабельных решений модели Гоппенштеда–Староверова [4, 6]. Согласно их методу мы должны соответствующим образом видоизменить систему (4.5) и потом применить принцип неподвижной точки Шаудера [6]. Для этого выберем пространство

$$X = \left\{(w_1, w_2)\colon\ w_s \in L^1_+(\tau, \infty),\ s = 1, 2\right\}$$

и классы

$$D = \left\{(w_1, w_2)\colon\ (w_1, w_2) \in X, \sum_{k=1}^{2} \|w_k p_k\| = 1,\ \sum_{k=1}^{2} \|w_k\| \leqslant \Gamma^\lambda\right\} \subset X,$$

$$D_1 = \left\{(w_1, w_2)\colon\ (w_1, w_2) \in X,\ \sum_{k=1}^{2} \|w_k p_k\| = 1\right\} \supset D,$$

где $p_s \in C^0_+([\tau, \infty))$ – ограниченные функции, а постоянная Γ^λ определена с помощью (4.21). Здесь и ниже $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^1(\tau,\infty)}$. Очевидно, D – замкнутое, ограниченное и выпуклое множество. Для построения оператора F^λ: $D \mapsto D$ с неподвижной точкой в D линеаризуем систему (4.5), задавая w_1, входящую в $r_2(\tau_2; w_1)$, $R^\lambda_{21}(\tau_2, x; w_1)$ и $R^\lambda_{22}(\tau_2, x; w_1)$, и w_2, входящую в $r_1(\tau_1; w_2)$ и $R^\lambda_1(\tau_1, x; w_2)$. Тогда для заданных $(w_1, w_2) \in D_1$ и вещественного λ определяем

$$l^\lambda_s(\tau_s) = \lambda + \nu_s(\tau_s) + r_s(\tau_s; w_k), \quad s, k = 1, 2;\quad s \neq k,$$
$$\begin{cases} g^\lambda_1(\tau_1, x) = R^\lambda_1(\tau_1, x; w_2), \\ g^\lambda_{2s}(\tau_2, x) = R^\lambda_{2s}(\tau_2, x; w_1), \quad s = 1, 2, \end{cases} \tag{4.7}$$

и записываем систему (4.5) в следующем виде:

$$\begin{cases} w_1' = -l^\lambda_1 w_1 + \int_\tau^{\tau_1} w_1(x) g^\lambda_1(\tau_1, x)\,\mathrm{d}x, \quad w_1\big|_{\tau_1=\tau} = w_1(\tau), \\ w_2' = -l^\lambda_2 w_2 + \int_\tau^{\tau_2} w_2(x) g^\lambda_{21}(\tau_2, x)\,\mathrm{d}x \\ \qquad + \begin{cases} 0, & \tau_2 \in (\tau, \tau + T), \quad w_2\big|_{\tau_2=\tau} = w_2(\tau), \\ \int_\tau^{\tau_2 - T} w_2(x) g^\lambda_{22}(\tau_2, x)\,\mathrm{d}x, & \tau_2 > \tau + T,\ [w_2(\tau + T)] = 0, \end{cases} \end{cases} \tag{4.8}$$

где $w_s(\tau)$, определена уравнением (4.6). Полагая

$$w_s(\tau_s) = w_s(\tau) z_s(\tau_s), \quad s = 1, 2, \tag{4.9}$$

из (4.8) получаем систему

$$\begin{cases} z_1' = -l_1^\lambda z_1 + \int_\tau^{\tau_1} z_1(x) g_1^\lambda(\tau_1, x)\, \mathrm{d}x, \quad z_1(\tau) = 1, \\ z_2' = -l_2^\lambda z_2 + \int_\tau^{\tau_2} z_2(x) g_{21}^\lambda(\tau_2, x)\, \mathrm{d}x \\ \qquad + \begin{cases} 0, & \tau_2 \in (\tau, \tau + T),\ z_2(\tau) = 1, \\ \int_\tau^{\tau_2 - T} z_2(x) g_{22}^\lambda(\tau_2, x)\, \mathrm{d}x, & \tau_2 > \tau + T,\ \ [z_2(\tau + T)] = 0. \end{cases} \end{cases} \tag{4.10}$$

Заметим, что уравнения (4.10) могут быть изучены независимо и $z_s = z_s^\lambda(\tau_s) = z_s^0(\tau_s) \exp\{-\lambda(\tau_s - \tau)\}$. Формально интегрируя (4.10), получим систему

$$\begin{cases} z_1 = \exp\big\{ -\int_\tau^{\tau_1} l_1^\lambda(\xi)\, \mathrm{d}\xi \big\} + \int_\tau^{\tau_1} \exp\big\{ -\int_\eta^{\tau_1} l_1^\lambda(\xi)\, \mathrm{d}\xi \big\} \big(\int_\tau^\eta z_1(x) g_1^\lambda(\eta, x)\, \mathrm{d}x \big)\, \mathrm{d}\eta, \\ z_2 = \exp\big\{ -\int_\tau^{\tau_2} l_2^\lambda(\xi)\, \mathrm{d}\xi \big\} \\ \qquad + \int_\tau^{\tau_2} \exp\big\{ -\int_\eta^{\tau_2} l_2^\lambda(\xi)\, \mathrm{d}\xi \big\} \big(\int_\tau^\eta z_2(x) g_{21}^\lambda(\eta, x)\, \mathrm{d}x \big)\, \mathrm{d}\eta \\ \qquad + \begin{cases} 0, \quad \tau_2 \in [\tau, \tau + T], \\ \int_{\tau+T}^{\tau_2} \exp\big\{ -\int_\eta^{\tau_2} l_2^\lambda(\xi)\, \mathrm{d}\xi \big\} \big(\int_\tau^{\eta - T} z_2(x) g_{22}^\lambda(\eta, x)\, \mathrm{d}x \big)\, \mathrm{d}\eta, \quad \tau_2 > \tau + T, \end{cases} \end{cases} \tag{4.11}$$

которая может быть записана в виде

$$\begin{cases} z_1 = \exp\big\{ -\int_\tau^{\tau_1} l_1^\lambda(\xi)\, \mathrm{d}\xi \big\} + \int_\tau^{\tau_1} z_1(x) G_1^\lambda(\tau_1, x)\, \mathrm{d}x, \\ z_2 = \exp\big\{ -\int_\tau^{\tau_2} l_2^\lambda(\xi)\, \mathrm{d}\xi \big\} + \int_\tau^{\tau_2} z_2(x) G_{21}^\lambda(\tau_2, x)\, \mathrm{d}x \\ \qquad + \begin{cases} 0, \quad \tau_2 \in [\tau, \tau + T], \\ \int_\tau^{\tau_2 - T} z_2(x) G_{22}^\lambda(\tau_2, x)\, \mathrm{d}x, \quad \tau_2 > \tau + T, \end{cases} \end{cases} \tag{4.12}$$

где

$$\begin{cases} G_1^\lambda(\tau_1, x) = \int_x^{\tau_1} g_1^\lambda(\eta, x) \exp\big\{ -\int_\eta^{\tau_1} l_1^\lambda(\xi)\, \mathrm{d}\xi \big\}\, \mathrm{d}\eta, \\ G_{21}^\lambda(\tau_2, x) = \int_x^{\tau_2} g_{21}^\lambda(\eta, x) \exp\big\{ -\int_\eta^{\tau_2} l_2^\lambda(\xi)\, \mathrm{d}\xi \big\}\, \mathrm{d}\eta, \\ G_{22}^\lambda(\tau_2, x) = \int_{x+T}^{\tau_2} g_{22}^\lambda(\eta, x) \exp\big\{ -\int_\eta^{\tau_2} l_2^\lambda(\xi)\, \mathrm{d}\xi \big\}\, \mathrm{d}\eta. \end{cases} \tag{4.13}$$

Заметим, что уравнение для z_2 в (4.12) имеет запаздывающую структуру. При подходящих ограничениях (см. ниже) уравнения Волтерры (4.10), (4.11) или (4.12) имеют единственное положительное решение $(z_1^\lambda(w_2), z_2^\lambda(w_1))$. Учитывая это, из (4.6) находим

$$w_s(\tau) = (f_k^\lambda h_k^\lambda(w_1, w_2))^{-1}, \quad s, k = 1, 2; \quad s \neq k,$$

с

$$h_k^\lambda(w_1, w_2) = \int_\tau^\infty \{z_1^\lambda(w_2)\}(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty \kappa_k^\lambda(x, y)\{z_2^\lambda(w_1)\}(y)\,\mathrm{d}y, \tag{4.14}$$

а тогда из (4.9) и (4.4) получаем систему для w_1, w_2 и λ:

$$w_s = z_s^\lambda(w_k)(f_k^\lambda h_k^\lambda(w_1, w_2))^{-1}, \quad s, k = 1, 2; \quad s \neq k, \tag{4.15}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \int_\tau^\infty p_k(x) w_k(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4.16}$$

Прежде чем приступить к изучению этой системы, изучим уравнения (4.10) и вспомогательные уравнения

$$w_s = z_s^\lambda(w_k)(q^\lambda f_k^\lambda h_k^\lambda(w_1, w_2))^{-1}, \quad s, k = 1, 2; \quad s \neq k, \tag{4.17}$$

$$q^\lambda = \sum_{k=1}^{2} \int_\tau^\infty \bigl\{(z_k^\lambda(w_s))\bigr\}(x) p_k(x)\,\mathrm{d}x \bigl(f_s^\lambda h_s^\lambda(w_1, w_2)\bigr)^{-1}, \quad s = 1, 2; \; s \neq k. \tag{4.18}$$

Наша цель – доказать существование хотя бы одного решения $(w_1^\lambda, w_2^\lambda) \in D$ уравнений (4.17), (4.18) для достаточно большого λ, и тогда доказать существование хотя бы одного вещественного $\lambda = \tilde{\lambda}$ (или несуществование такого $\tilde{\lambda}$), для которого $q^{\tilde{\lambda}} = 1$. При существовании $\tilde{\lambda}$ задача (4.17), (4.18) совпадет с (4.15), (4.16). Следовательно, $(w_1^{\tilde{\lambda}}, w_2^{\tilde{\lambda}}, \tilde{\lambda})$ будет решением задачи (4.15), (4.16).

Прежде чем изучать уравнения (4.10) и (4.17), (4.18), обратимся к изучению уравнения (4.3) *при следующих предположениях*:

$$(H_0) \quad \begin{cases} \alpha \in C^1(\overline{Q}_3), & 0 < \alpha_* := \inf_{Q_3'} \alpha, \quad \alpha^* := \sup_{Q_3'} \alpha < \infty, \\ \nu_{3s} \in C^1(\overline{Q}_3), & 0 < \nu_{3s*} := \inf_{Q_3'} \nu_{3s}, \\ \nu_{4s} \in C^1(\overline{Q}_4), & 0 < \nu_{4s*} := \inf_{Q_4'} \nu_{4s}. \end{cases}$$

ЛЕММА 1. *Пусть условия* (H_0) *выполнены. Тогда для любого фиксированного вещественного* λ *и* $q_1, q_2 > \tau$ *уравнение* (4.3) *имеет единственное положительное в* $\overline{Q}_3$ *решение* $v^\lambda \in C^0(\overline{Q}_3) \cap C^1(Q_3)$ *такое, что:*

$$\int_0^\infty v^\lambda(x + q_1, x + q_2, x)\,\mathrm{d}x \leqslant p_0^{-1}(\lambda) \quad \text{при} \;\; \lambda > \lambda_0$$

и

$$\int_0^\infty (v^\lambda \nu_{3s})\big|_{(x+q_1,x+q_2,x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 1 + a^*(\lambda)p_0^{-1}(\lambda)$$
$$\text{при}\quad \lambda > \max\big(\lambda_0,\ -(\alpha_* + \min(\nu_{31*},\nu_{32*}))\big),$$

где $\lambda_0 > -\nu_{3*}$ – *единственный вещественный корень уравнения* $p_0(\lambda) := \lambda + \nu_{3*} - a^*(\lambda)$ *при* $a^*(\lambda) := \alpha^* \exp\{-T(\lambda + \nu_{4*})\}$, $\nu_{3*} = \nu_{31*} + \nu_{32*} + \alpha_*$ *и* $\nu_{4*} = \nu_{41*} + \nu_{42*}$;

$v^\lambda(\tau_1,\tau_2,\tau_3) \leqslant \overline{v}^\lambda(\tau_3) := \exp\{\rho(\lambda)(\tau_3 - T)\}\,\forall \tau_3 \in [0,\infty)$, *где* $\rho(\lambda) \in (-(\lambda + \nu_{3*}), 0)$ – *единственное вещественное решение уравненния* $\rho + \lambda + \nu_{3*} = a^*(\lambda) \times \exp\{-T\rho\}$ *при* $\lambda > \lambda_0$, *которое монотонно убывает к* $-\infty$ *при* λ, *стремящемся к* ∞.

Заметим, что $\lambda_0 < 0$, если $\alpha^* \exp\{-T\nu_{4*}\} < \nu_{3*}$. Доказательство этой леммы дано в параграфе 6. При изучении уравнения (4.10) относительно функций $m, p_s, b_s, \nu_s, \tilde\nu_{4s}, \nu_5$, и $\tilde\nu_{5s}$, $s = 1,2$, мы используем *следующие предположения*:

$$(H_1)\quad \begin{cases} m, p_s, \ \text{и}\ b_s\ \text{неотрицательны (нетривиальны), ограничены и} \\ \text{такие, что}\ \kappa_s^\lambda\ \text{имеет основание положительной меры и}: \\ m \in C^0([\tau,\infty)^2), \quad p_s \in C^0([\tau,\infty)), \quad b_s \in C^0(\overline{Q}_3), \quad \nu_s \in C^0(\overline{Q}_s), \\ 0 < \nu_{s*} := \inf_{(\tau,\infty)} \nu_s, \quad \tilde\nu_{4s} \in C^0(\overline{Q}_4), \quad 0 < \nu_5 \in C^0(\overline{Q}_5), \\ 0 < \nu_{5*} := \inf_{Q_5} \nu_5, \quad 0 < \tilde\nu_{5s} \in C^0(\overline{Q}_5). \end{cases}$$

Положим

$$\nu = -\min(\nu_{1*},\nu_{2*},\nu_{31*},\nu_{32*},\nu_{41*},\nu_{42*}), \qquad \overline{\delta} = \sup_{\tau_2,x,y} \tilde\delta,$$
$$\begin{aligned}\tilde\delta(\tau_2,x,y) = \int_0^T &\nu_{41}(\tau_4+\tau_2-x-T+y, \tau_4+\tau_2-T, \tau_4+\tau_2-x-T, \tau_4)\\ &\times \exp\Big\{-\int_{\tau_4}^T \nu_5(\tau_4+\tau_2-x-T+y, z+\tau_2-T, \tau_4+\tau_2-x-T, \tau_4, z)\,\mathrm{d}z\Big\}\\ &\times \alpha(\tau_2-x-T+y, \tau_2-T, \tau_2-x-T)\\ &\times \exp\Big\{-\int_0^{\tau_4} \nu_4(z+\tau_2-x-T+y, z+\tau_2-T, z+\tau_2-x-T, z)\,\mathrm{d}z\Big\}\,\mathrm{d}\tau_4.\end{aligned}$$

Легко заметить, что

$$\delta^\lambda(\tau_2,x,y) = \exp\{-T\lambda\}\tilde\delta(\tau_2,x,y) \quad \text{и} \quad \overline{\delta} \leqslant \alpha^* \exp\{-T\min(\nu_{4*},\nu_{5*})\}.$$

Положим

$$\begin{cases} m^* := \sup_{(\tau,\infty)^2} m < \infty, \quad p^* := \sup_{(\tau,\infty)} p < \infty, \quad \overline{\lambda} := \max(\lambda_0, \tilde{\lambda}), \\ \overline{\nu}_s(\tau_s) = \min\left\{\nu_s(\tau_s), \min_{(\tau_k,\tau_3)} \nu_{3s}, \min_{(\tau_k,\tau_3,\tau_4)} \nu_{4s}\right\}, \quad s,k=1,2; \quad s \neq k, \\ z^{\lambda}_{s*}(\tau_s) = \exp\left\{-\int_\tau^{\tau_s} (\lambda + m^* p^*_s + \nu_s(x))\,\mathrm{d}x\right\}, \quad s=1,2, \\ z^{\lambda*}_1(\tau_1) = \exp\left\{-\int_\tau^{\tau_1} (\lambda + \overline{\nu}_1(x)\,\mathrm{d}x\right\}, \\ z^{\lambda*}_2 = \exp\left\{\rho(\lambda)(\tau_2 - \tau - T)\right\}, \end{cases} \tag{4.19}$$

где $\tilde{\lambda} \in (-\nu, 0)$ – единственный вещественный корень уравнения $\lambda + \nu = \overline{\delta}\exp\{-\lambda T\}$ при $\overline{\delta} < \nu$, а $\rho(\lambda) \in \big(-(\lambda+\nu), 0\big)$ – единственный вещественный корень уравнения $\rho + \lambda + \nu = \overline{\delta}\exp\{-(\lambda+\rho)T\}$ при $\lambda > \tilde{\lambda}$.

Определим класс

$$D_2 = \left\{(z_1, z_2)\colon\ z_s \in C^1([\tau,\infty)),\ z^{\lambda}_{s*} \leqslant z_s \leqslant z^{\lambda*}_s,\ \|z'_s\| \leqslant \omega^{\lambda}_s,\ s=1,2\right\} \subset X$$

с

$$\omega^{\lambda}_1 := 1 + 2m^*\|p_1 z^{\lambda*}_1\|(1 + 2\alpha^*/p_0(\lambda)),$$
$$\omega^{\lambda}_2 := 1 + 2m^*\|p_2 z^{\lambda*}_2\|\Big(1 + \big(\alpha^* + \overline{\delta}\exp\{-T\lambda\}\big)/p_0(\lambda)\Big)$$

и фиксированным параметром $\lambda > \overline{\lambda}$.

Лемма 2. *Пусть предположения* (H_0) *и* (H_1) *имеют место,* $(w_1, w_2) \in D_1$, $\overline{\delta} < \nu$, *а* $\lambda > \overline{\lambda}$ *фиксирован. Тогда:*

(i) *система (4.10) имеет единственное решение* $(z^{\lambda}_1(w_2), z^{\lambda}_2(w_1)) \in D_2$,

(ii) *оператор* $\tilde{F}\colon (w_1, w_2) \mapsto (z^{\lambda}_1(w_2), z^{\lambda}_2(w_1))$ *из* D *в* X *вполне непрерывный, более того,* $\tilde{F}(D) \subset D_2$.

Доказательство Леммы 2 приведено в параграфе 6. Теперь построим оператор $F^{\lambda}\colon D \mapsto D$. Из уравнений (4.6) и (4.9) находим:

$$w_s(\tau) = (f^{\lambda}_k h^{\lambda}_k(w_1, w_2))^{-1}, \quad s,k=1,2; \quad s \neq k,$$

где

$$h^{\lambda}_k(w_1, w_2) = \int_\tau^\infty \{z^{\lambda}_1(w_2)\}(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty \kappa^{\lambda}_k(x,y)\{z^{\lambda}_2(w_1)\}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Отсюда и с помощью (4.9) заключаем, что $(w_1, w_2) \in D$ должна быть решением системы

$$w_s = z^{\lambda}_s(w_k)\big(f^{\lambda}_k h^{\lambda}_k(w_1, w_2)\big)^{-1}, \quad s,k=1,2; \quad s \neq k. \tag{4.20}$$

Для изучения этой системы определим оператор

$$F^\lambda\colon\ (w_1, w_2) \mapsto \Big(z_1^\lambda(w_2)\big(q^\lambda f_2^\lambda h_2^\lambda(w_1, w_2)\big)^{-1},\ z_2^\lambda(w_1)\big(q^\lambda f_1^\lambda h_1^\lambda(w_1, w_2)\big)^{-1}\Big),$$

$$q^\lambda = \sum_{s=1}^{2} \big\| p_s z_s^\lambda(w_k)\big(f_k^\lambda h_k^\lambda(w_1, w_2)\big)^{-1} \big\|,$$

где $k, s = 1, 2$; $s \neq k$, а $\lambda > \overline{\lambda}$ – фиксированный параметр. Мы покажем, что оператор F^λ в D имеет хотя бы одну неподвижную точку. Очевидно, что F^λ: $D \mapsto D$. Теперь покажем, что F^λ непрерывен в D. В силу Леммы 2 оператор $\tilde{F}^\lambda$: $(w_1, w_2) \mapsto (z_1^\lambda(w_2), z_2^\lambda(w_1))$ непрерывен в D и $\tilde{F}^\lambda(D) \subset D_2$. Благодаря предположениям (H_0) и (H_1) функции β_s^λ при $\lambda > \overline{\lambda}$ и $\tilde{m}$ ограничены. Тогда согласно с леммами 1 и 2, κ_s^λ и $h_k^\lambda(w_1, w_2)$ положительные для $\lambda > \overline{\lambda}$ и имеют верхнюю и нижнюю границы, зависящие от λ. Это и тот факт, что $(z_1^\lambda(w_2), z_2^\lambda(w_1)) \in D_2$, дает нам возможность доказать, что отображение $(w_1, w_2) \mapsto h_k^\lambda(w_1, w_2)$, $k = 1, 2$, непрерывно для $\lambda > \overline{\lambda}$. Ясно, что, при $\lambda > \overline{\lambda}$, q^λ положительно, а отображение $(w_1, w_2) \mapsto q^\lambda$ тоже непрерывно. Таким образом, при $\lambda > \overline{\lambda}$, оператор F^λ – непрерывен в D, $F^\lambda(D) \subset X$ – относительно компактное множество и $F^\lambda(D) \subset D$. Поэтому F^λ вполне непрерывен и принцип неподвижной точки Шаудера гарантирует существование хотя бы одной неподвижной точки в D. Это означает, что система

$$w_s = z_s^\lambda(w_k)\big(f_k^\lambda h_k^\lambda(w_1, w_2) q^\lambda\big)^{-1}, \quad s, k = 1, 2; \quad s \neq k,$$

при $\lambda > \overline{\lambda}$ имеет хотя бы одно решение $(w_1^\lambda, w_2^\lambda) \in D$. Если существует $\tilde{\lambda} > \overline{\lambda}$ такое, что $q^{\tilde{\lambda}} = 1$, то эта система совпадает с (4.20) при $\lambda = \tilde{\lambda}$, а пара $(w_1^{\tilde{\lambda}}, w_2^{\tilde{\lambda}})$ представляет решение уравнения (4.20). Остается получить достаточные условия для существования (или несуществования) величины $\tilde{\lambda}$.

Положим

$$\widehat{\lambda} = \overline{\lambda} + \epsilon \quad \text{с произвольно малым} \quad \epsilon > 0;$$

$$\widehat{\kappa}_s^\lambda(\tau_1, \tau_2; \overline{v}^\lambda) = \kappa_s^\lambda(\tau_1, \tau_2; \overline{v}^\lambda)/p_s(\tau_s);$$

$$\overline{\kappa}_s^\lambda(\tau_1, \tau_2; v^\lambda) = \kappa_s^\lambda(\tau_1, \tau_2; v^\lambda)/p_s(\tau_s);$$

$$\rho_s^\lambda = f_s^\lambda \sup_{\tau_k \in [\tau, \infty)} \int_\tau^\infty \overline{\kappa}_s^\lambda(\tau_1, \tau_2; v^\lambda) z_s^{\lambda *}(\tau_s)\, \mathrm{d}\tau_s, \quad s, k = 1, 2; \quad k \neq s;$$

$$\widehat{\rho}_s^\lambda = f_s^\lambda \sup_{\tau_k \in [\tau, \infty)} \int_\tau^\infty \widehat{\kappa}_s^\lambda(\tau_1, \tau_2; \overline{v}^\lambda) z_s^{\lambda *}(\tau_s)\, \mathrm{d}\tau_s, \quad s, k = 1, 2; \quad s \neq k;$$

$$\gamma_s^\lambda = f_s^\lambda \int_\tau^\infty z_{1*}^\lambda(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty \kappa_s^\lambda(x,y) z_{2*}^\lambda\,\mathrm{d}y \|p_k z_k^{\lambda *}\|^{-1}, \quad k,s=1,2; \quad s\neq k;$$

$$h_k^{\lambda *} = \int_\tau^\infty \mathrm{d}x \int_\tau^\infty \kappa_k^\lambda(x,y) z_1^{\lambda *}(x) z_2^\lambda(y)\,\mathrm{d}y;$$

$$h_{k*}^\lambda = \int_\tau^\infty \mathrm{d}x \int_\tau^\infty \kappa_k^\lambda(x,y) z_{1*}^\lambda(x) z_{2*}^\lambda(y)\,\mathrm{d}y;$$

$$q_*^\lambda = \sum_{s=1}^2 \|p_s z_{s*}^\lambda (f_k^\lambda h_k^{\lambda *})^{-1}\|.$$

Тогда при $\lambda > \overline{\lambda}$

$$\begin{aligned} 1/\rho_1^\lambda + 1/\rho_2^\lambda &\leqslant \sum_{k=1}^2 \|p_s w_s^\lambda\| = q^\lambda \\ &= \sum_{s=1}^2 \|p_s z_s^\lambda(w_k^\lambda)(f_k^\lambda h_k^\lambda(w_1^\lambda, w_2^\lambda))^{-1}\| \leqslant 1/\gamma_1^\lambda + 1/\gamma_2^\lambda \end{aligned}$$

и

$$\sum_{s=1}^2 \|w_s\| \leqslant \Gamma^\lambda := \sum_{s=1}^2 \left\| z_s^{\lambda *} (f_k^\lambda h_{k*}^\lambda q_*^\lambda)^{-1} \right\|, \quad k=1,2;\ k\neq s. \tag{4.21}$$

Ясно, что $\widehat{\kappa}_s^\lambda \geqslant \overline{\kappa}_s^\lambda$, $\widehat{\rho}_s^\lambda \geqslant \rho_s^\lambda$ и $q^\lambda \in C^0(\overline{\lambda}, \infty)$. Следовательно, $1/\rho_1^\lambda + 1/\rho_2^\lambda \geqslant 1/\widehat{\rho}_1^\lambda + 1/\widehat{\rho}_2^\lambda \to \infty$ при $\lambda \to \infty$, поскольку $\overline{v}^\lambda$, f_s^λ, $z_s^{\lambda *}$ и β_s^λ экспоненциально изчезают при $\lambda \to \infty$. Функция $1/\widehat{\rho}_1^\lambda + 1/\widehat{\rho}_2^\lambda$ монотонно растет к ∞ с ростом λ. Это позволяет сформулировать следующиее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть условия* (H_0) *и* (H_1) *выполнены и* $\overline{\delta} < \nu$. *Тогда следующие утверждения имеют место:*

(i) *если*

$$q^{\widehat{\lambda}} \leqslant 1 \quad \textit{(или более грубо, если} \ \ 1/\gamma_1^{\widehat{\lambda}} + 1/\gamma_2^{\widehat{\lambda}} \leqslant 1), \tag{4.22}$$

то система (4.5), (4.6) *имеет хотя бы одно решение* $(w_1^{\tilde{\lambda}}(\tau_1), w_2^{\tilde{\lambda}}(\tau_2))$ *с* $\tilde{\lambda} \geqslant \widehat{\lambda}$ *такое, что*

$$\begin{aligned} &w_s^{\tilde{\lambda}} \in C^1([\tau,\infty)) \cap L^1(\tau,\infty), \\ &(f_k^{\tilde{\lambda}} h_k^{\tilde{\lambda} *})^{-1} z_{s*}^{\tilde{\lambda}} \leqslant w_s^{\tilde{\lambda}} \leqslant (f_k^{\tilde{\lambda}} h_{k*}^{\tilde{\lambda}})^{-1} z_s^{\tilde{\lambda} *}, \quad s,k=1,2; \quad s\neq k; \end{aligned}$$

(ii) *если*

$$\min_{\lambda\in[\widehat{\lambda},\lambda_1]} q^{\lambda} > 1 \quad \textit{(или более грубо, если } 1/\widehat{\rho}_1^{\widehat{\lambda}} + 1/\widehat{\rho}_2^{\widehat{\lambda}} > 1) \tag{4.23}$$

с единственным корнем λ_1 *уравнения* $1/\widehat{\rho}_1^{\lambda} + 1/\widehat{\rho}_2^{\lambda} = 1$, *то при* $\lambda \geqslant \widehat{\lambda}$ *система* (4.5), (4.6) *не имеет положительных решений.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (H_0) *и* (H_1) *и* $\overline{\delta} < \nu$. *Дополнительно предположим что:*

$$p_s \in C^1([\tau,\infty)), \quad m \in C^1([\tau,\infty)^2), \quad b_s \in C^1(\overline{Q}_3), \quad \tilde{\nu}_{4s} \in C^1(\overline{Q}_4),$$
$$\nu_5 \ \ и \ \ \nu_{5s} \in C^1(\overline{Q}_5).$$

Тогда следующие утверждения имеют место:

(i) *при выполнении условия* (4.22) *система* (3.1) *имеет однопараметрический класс (с параметром* f*) положительных решений типа* (4.1) *таких, что:*

$$\begin{aligned}
&U_s \in C^1([\tau,\infty)), \quad U_{4s} \in C^0(\overline{Q}_4) \cap C^1(Q_4),\\
&U_{5s} \in C^0(\overline{Q}_5) \cap C^1(Q_5) \ \ с \ \ s = 1,2,\\
&U_3 \in C^0(\overline{Q}_3) \cap C^1(Q_3), \quad U_4 \in C^0(\overline{Q}_4) \cap C^1(Q_4),\\
&U_5 \in C^0(\overline{Q}_5) \cap C^1(Q_5) \ \ и \ \ \lambda = \tilde{\lambda} \geqslant \widehat{\lambda};
\end{aligned}$$

(ii) *при выполнении условия* (4.23) *система* (3.1) *при* $\lambda \geqslant \widehat{\lambda}$ *не имеет положительных решений типа* (4.1).

5. СЛУЧАЙ ПОСТОЯННЫХ ВИТАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ

Предположим, что p_s, b_s, ν_s, ν_{3s}, ν_{4s}, $\tilde{\nu}_{4s}$, ν_5, $\tilde{\nu}_{5s}$, m и α положительные и постоянные. Тогда функции a^{λ}, ξ^{λ}, β_s^{λ} и ξ_s^{λ}, использованные в параграфе 4, и уравнение (4.3) могут быть записаны так:

$$\begin{aligned}
&a^{\lambda}(\tau_4) = \alpha \exp\big\{-\tau_4(\lambda+\nu_4)\big\},\\
&\xi^{\lambda}(\tau_4,\tau_5) = \nu_{41} \exp\big\{-(\tau_5-\tau_4)(\lambda+\nu_5)\big\},\\
&\beta_s^{\lambda}(\tau_4) = \alpha b_s \exp\big\{-\tau_4(\lambda+\widehat{\nu}_{4s})\big\},\\
&\xi_s^{\lambda}(\tau_4,\tau_5) = \nu_{41} \exp\big\{-(\tau_5-\tau_4)(\lambda+\widehat{\nu}_{5s})\big\},\\
&v^{\lambda\prime}(\tau_3) = -(\nu_3+\lambda)v^{\lambda} + \begin{cases} 0, & \tau_3 < T, \quad v^{\lambda}(0) = 1,\\ a^{\lambda}(T)v^{\lambda}(\tau_3 - T), & \tau_3 > T, \quad [v^{\lambda}(T)] = 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Отсюда следует, что

$$v^\lambda = \exp\big\{ -(\nu_3+\lambda)\tau_3\big\} \quad \text{при} \quad \tau_3 \in [0,T],$$
$$v^\lambda = \exp\big\{ -(\nu_3+\lambda)\tau_3\big\} + a^\lambda(T)\int_T^{\tau_3} v^\lambda(x-T)\exp\big\{-(\nu_3+\lambda)(\tau_3-x)\big\}\,\mathrm{d}x \quad (5.2)$$

при $\tau_3 > T$.

По индукции мы покажем, что

$$v^\lambda(\tau_3) = \exp\big\{ -(\nu_3+\lambda)\tau_3\big\}\sum_{i=0}^{k}\big(\alpha\exp\{T(\nu_3-\nu_4)\}\big)^i(\tau_3-iT)^i/i! \qquad (5.3)$$

при $\tau_3 \in [kT,(k+1)T]$, $k=0,1,2\ldots$.

Пусть эта функция удовлетворяет уравнению (5.1) при $\tau_3 \in [kT,(k+1)T]$. Тогда, при $\tau_3 \in [(k+1)T,(k+2)T]$, имеем

$$\begin{aligned}
v^{\lambda\prime} &= -(\nu_3+\lambda)v^\lambda + \exp\{-(\nu_3+\lambda)\tau_3\}\sum_{i=1}^{k+1}\big(\alpha\exp\{T(\nu_3-\nu_4)\}\big)^i(\tau_3-iT)^{i-1}/(i-1)! \\
&= -(\nu_3+\lambda)v^\lambda \\
&\quad + \alpha\exp\{T(\nu_3-\nu_4)-(\nu_3+\lambda)\tau_3\}\sum_{j=0}^{k}\big(\alpha\exp\{T(\nu_3-\nu_4)\}\big)^j(\tau_3-(j+1)T)^j/j! \\
&= -(\nu_3+\lambda)v^\lambda + a^\lambda(T)v^\lambda(\tau_3-T).
\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $p_0(\lambda) = \nu_3+\lambda-a^\lambda(T)$. В (4.19) использованную константу ν можно записать так

$$\nu = \min\{\nu_1,\nu_2,\nu_{31},\nu_{32},\nu_{41},\nu_{42}\}.$$

Так как $p_0(-\nu_3) < 0$, $p_0(-\nu) > 0$ и $p_0'(\lambda) > 0$, то функция $p_0(\lambda)$ имет единственный вещественный корень $\lambda_0 \in (-\nu_3,-\nu)$, а $p_0(\lambda) > 0$ при $\lambda > \lambda_0$. Тогда легко показать, что при $\lambda > \lambda_0$ функция (5.3) имеет мажоранту $\overline{v}^\lambda(\tau_3) = \exp\{\rho(\lambda)(\tau_3-T)\}\,\forall\tau_3\in[0,\infty)$, где $\rho(\lambda)\in(-(\nu_3+\lambda),0)$ – единственный вещественный корень уравнения $\rho+\nu_3+\lambda = a^\lambda(T)\exp\{-\rho T\}$. Более того, $\overline{v}^\lambda(\tau_3)$ удовлетворяет уравнению (5.1) при $\tau_3 > T$ с начальной функцией $\overline{v}^\lambda(\tau_3) = \exp\{\rho(\lambda)(\tau_3-T)\} \geqslant v^\lambda(\tau_3)\,\forall\,\tau_3\in[0,T]$, $\lambda>\lambda_0$.

Из (5.2) следует, что

$$\|v^\lambda\|_1 := \int_0^\infty v^\lambda(x)\,\mathrm{d}x = (\nu_3+\lambda)^{-1}$$

$$+\,a^{\lambda}(T)\int_T^{\infty}\mathrm{d}\tau_3\int_T^{\tau_3}v^{\lambda}(x-T)\exp\{-(\nu_3+\lambda)(\tau_3-x)\}\,\mathrm{d}x$$
$$=(\nu_3+\lambda)^{-1}+a^{\lambda}(T)\int_T^{\infty}\mathrm{d}x\int_x^{\infty}v^{\lambda}(x-T)\exp\{-(\nu_3+\lambda)(\tau_3-x)\}\,\mathrm{d}\tau_3$$
$$=(\nu_3+\lambda)^{-1}\{1+a^{\lambda}(T)\|v^{\lambda}\|_1\},\quad \lambda>-\nu_3.$$

Поэтому $\|v^{\lambda}\|_1=1/p_0(\lambda)>0$ при $\lambda>\lambda_0$. Функции κ^{λ}_{1s}, κ^{λ}_{2s}, K^{λ}, R^{λ}_1, R^{λ}_{21}, R^{λ}_{22}, r_s, α^{λ}_s с $s=1,2$ и уравнения (4.5) можно записать так:

$$\kappa^{\lambda}_{1s}=\tilde m\beta^{\lambda}_s(T)/p_0(\lambda),\quad \kappa^{\lambda}_{2s}=\tilde m\alpha^{\lambda}_s/p_0(\lambda),$$
$$\alpha^{\lambda}_s=\int_0^T\beta^{\lambda}_s(x)\xi^{\lambda}_s(x,T)\,\mathrm{d}x$$
$$=\alpha\nu_{41}b_s\exp\{-(\lambda+\widehat\nu_{5s})\}\begin{cases}T, & \widehat\nu_{4s}=\widehat\nu_{5s},\\ \big(\exp\{(\widehat\nu_{5s}-\widehat\nu_{4s})T\}-1\big)/(\widehat\nu_{5s}-\widehat\nu_{4s}), & \widehat\nu_{4s}\neq\widehat\nu_{5s},\end{cases}$$
$$w_s(T)=mp_0^{-1}(\lambda)\|p_1w_1\|\|p_2w_2\|(\beta^{\lambda}_s(T)+\alpha^{\lambda}_s),$$
$$r_s(w_k)=mp_s\|p_kw_k\|,\quad s,k=1,2;\quad s\neq k,$$
$$K^{\lambda}(\tau_3;v^{\lambda})=\tilde m\mu^{\lambda}(\tau_3),\quad \mu^{\lambda}(\tau_3)=v^{\lambda}(\tau_3)\nu_{32}+\nu_{42}\int_{\gamma(\tau_3,T)}^{\tau_3}v^{\lambda}(z)a^{\lambda}(\tau_3-z)\,\mathrm{d}z,$$
$$\gamma(\tau_3,T)=\tau_3-\min(\tau_3,T),$$
$$R^{\lambda}_1(\tau_1,x;w_2)=mp_1\|p_2w_2\|\mu^{\lambda}(\tau_1-x),$$
$$R^{\lambda}_{21}(\tau_2,x;w_1)=mp_2\nu_{31}\|p_1w_1\|v^{\lambda}(\tau_2-x),$$
$$R^{\lambda}_{22}(\tau_2,x;w_1)=mp_2\|p_1w_1\|\delta^{\lambda}v^{\lambda}(\tau_2-x-T),$$
$$\delta^{\lambda}=\int_0^T\xi^{\lambda}(x,T)a^{\lambda}(x)\,\mathrm{d}x=\alpha\xi\exp\{-(\lambda+\nu_4)T\},$$
$$\xi=\nu_{41}\begin{cases}T, & \nu_4=\nu_5,\\ \big(1-\exp\{-(\nu_5-\nu_4)T\}\big)/(\nu_5-\nu_4), & \nu_4\neq\nu_5,\end{cases}$$
$$\begin{cases} w_1'=-\xi^{\lambda}_{12}w_1+mp_1\|p_2w_2\|\int_{\tau}^{\tau_1}w_1(x)\mu(\tau_1-x)\,\mathrm{d}x, & \tau_1>\tau,\\ w_2'=-\xi^{\lambda}_{21}w_2+mp_2\nu_{31}\|p_1w_1\|\int_{\tau}^{\tau_2}w_2(x)v^{\lambda}(\tau_2-x)\,\mathrm{d}x\\ \qquad+\begin{cases}0, & \tau_2\in(\tau,\tau+T),\\ mp_2\|p_1w_1\|\delta^{\lambda}\int_{\tau}^{\tau_2-T}w_2(x)v^{\lambda}(\tau_2-x-T)\,\mathrm{d}x, & \tau_2>\tau+T,\end{cases}\end{cases}\tag{5.4}$$

где

$$\xi_{sk}^{\lambda} = \nu_s + \lambda + m p_s \| p_k w_k \|, \quad s, k = 1, 2; \quad s \neq k,$$

а

$$w_s(\tau) = w_s(T) f_s^{\lambda}, \quad f_s^{\lambda} = \exp\big\{ -(\tau - T)(\lambda + \nu_s)\big\}, \quad [w_2(\tau + T)] = 0, \quad \lambda > \lambda_0.$$

Мы пользуемся записью $\| p_s w_s \| = \int_{\tau}^{\infty} p_s w_s(x)\,\mathrm{d}x$, поскольку w_s должна быть положительной.

Очевидно, что решение уравнения (5.4) должно находиться в $L_{+}^{1}(\tau, \infty)$ (см. ниже). Итегрируя уравнение (5.4), получим

$$\begin{aligned} w_1 &= w_1(\tau)\exp\{-(\tau_1 - \tau)\xi_{12}^{\lambda}\} \\ &\quad + m\|p_2 w_2\| \int_{\tau}^{\tau_1} \exp\{-(\tau_1 - \eta)\xi_{12}^{\lambda}\}\,\mathrm{d}\eta \int_{\tau}^{\eta} w_1(x) p_1 \mu^{\lambda}(\eta - x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= w_2(\tau)\exp\{-(\tau_2 - \tau)\xi_{21}^{\lambda}\} \\ &\quad + \nu_{31} m \|p_1 w_1\| \int_{\tau}^{\tau_2} p_2 w_2(x)\,\mathrm{d}x \int_0^{\tau_2 - x} \exp\{-(\tau_2 - x - z)\}\,\mathrm{d}z \\ &\quad + m\delta^{\lambda}\|p_1 w_1\| \begin{cases} 0, & \tau_2 \in [\tau, \tau + T], \\ \int_{\tau}^{\tau_2 - T} p_2 w_2(x)\,\mathrm{d}x \int_0^{\tau_2 - x - T} \nu^{\lambda}(z) \\ \quad \times \exp\{-(\tau_2 - z - x - T)\xi_{21}^{\lambda}\}\,\mathrm{d}z, & \tau_2 \geqslant \tau + T. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.6}$$

При заданной положительной $\|p_s w_s\|$, $s = 1, 2$, эти уравненния Волтерра с непрерывным ядром имеют единственное непрерывное положительное решение. Очевидно, что оно непрерывно дифференцируемо. С помощью аргументов, использованных при доказательстве неравенства $z_s \leqslant z_s^{\lambda *}$ в Лемме 2, получаем $w_s(\tau_2) \leqslant w_s(\tau) z_s^{\lambda *}(\tau_2)$, $s = 1, 2$, где $z_1^{\lambda *} = \exp\{-(\lambda + \nu)(\tau_1 - \tau)\}$ и $z_2^{\lambda *} = \exp\{\rho(\lambda)(\tau_2 - \tau - T)\}$ при $\lambda > \overline{\lambda}$. Здесь: $\overline{\lambda} \in (-\nu, 0)$ – единственный вещественный корень уравнения $\lambda + \nu = \alpha\xi\exp\{-T(\lambda + \nu_4)\}$ при $\alpha\xi\exp\{-T\nu_4\} < \nu$, а $\rho(\lambda) \in (-(\lambda + \nu), 0)$ – единственный вещественный корень уравнения $\rho + \lambda + \nu = \delta^{\lambda}\exp\{-\rho T\}$. Отсюда следует, что $w_s \in L_{+}^{1}(\tau, \infty)$, $s = 1, 2$.

Теперь определим $\|p_s w_s\|$, $s = 1, 2$. Интегрируя уравнения (5.5), (5.6) получим:

$$\begin{aligned} \|p_1 w_1\| &= p_1\bigg(w_1(\tau)/\xi_{12}^{\lambda} \\ &\quad + m\|p_2 w_2\| \int_{\tau}^{\infty} \mathrm{d}\tau_1 \int_{\tau}^{\tau_1} \exp\{-(\tau_1 - \eta)\xi_{12}^{\lambda}\}\,\mathrm{d}\eta \int_{\tau}^{\eta} w_1(x)\mu^{\lambda}(\eta - x)\,\mathrm{d}x \bigg) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p_1\Big(w_1(\tau)/\xi_{12}^{\lambda}\\
&\quad + m\|p_2w_2\|\int_{\tau}^{\infty} \mathrm{d}\eta \int_{\eta}^{\infty} \mathrm{d}\tau_1 \exp\{-(\tau_1-\eta)\xi_{12}^{\lambda}\}\int_{\tau}^{\eta} w_1(x)\,p_1\mu^{\lambda}(\eta-x)\,\mathrm{d}x\Big)\\
&= (p_1/\xi_{12}^{\lambda})\Big\{w_1(\tau) + m\|p_2w_2\|\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{d}\eta\int_{\tau}^{\eta} w_1(x)\,p_1\mu^{\lambda}(\eta-x)\,\mathrm{d}x\Big\}\\
&= (p_1/\xi_{12}^{\lambda})\Big\{w_1(\tau) + m\|p_2w_2\|\int_{\tau}^{\infty} w_1(x)\,p_1\,\mathrm{d}x\int_{x}^{\infty}\mu^{\lambda}(\eta-x)\,\mathrm{d}\eta\Big\}\\
&= \big\{f_1^{\lambda}(\beta_1^{\lambda}(T)+\alpha_1^{\lambda})/p_0(\lambda) + \|\mu^{\lambda}\|_1\big\}\,p_1 m\|p_1w_1\|\,\|p_2w_2\|/\xi_{12}^{\lambda}
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\|p_2w_2\| &= p_2\Big(w_2(\tau)/\xi_{21}^{\lambda}\\
&\quad + \nu_{31}\tilde m\|w_1\|\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{d}\tau_2\int_{\tau}^{\tau_2}\exp\{-(\tau_2-\eta)\xi_{21}^{\lambda}\}\,\mathrm{d}\eta\int_{\tau}^{\eta} w_2(x)\,v^{\lambda}(\eta-x)\,\mathrm{d}x\\
&\quad + \tilde m\|w_1\|\delta^{\lambda}\int_{\tau+T}^{\infty}\mathrm{d}\tau_2\int_{\tau+T}^{\tau_2}\exp\{-\xi_{21}^{\lambda}(\tau_2-\eta)\}\,\mathrm{d}\eta\int_{\tau}^{\eta-T} w_2(x)\,v^{\lambda}(\eta-x-T)\,\mathrm{d}x\Big)\\
&= p_2\Big(w_2(\tau)/\xi_{21}^{\lambda}\\
&\quad + \nu_{31}\tilde m\|w_1\|\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{d}\eta\int_{\eta}^{\infty}\exp\{-(\tau_2-\eta)\xi_{21}^{\lambda}\}\,\mathrm{d}\tau_2\int_{\tau}^{\eta} w_2(x)\,v^{\lambda}(\eta-x)\,\mathrm{d}x\\
&\quad + \tilde m\|w_1\|\delta^{\lambda}\int_{\tau+T}^{\infty}\mathrm{d}\eta\int_{\eta}^{\infty}\exp\{-\xi_{21}^{\lambda}(\tau_2-\eta)\}\,\mathrm{d}\tau_2\int_{\tau}^{\eta-T} w_2(x)\,v^{\lambda}(\eta-x-T)\,\mathrm{d}x\Big)\\
&= p_2\Big(w_2(\tau) + \nu_{31}\tilde m\|w_1\|\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{d}\eta\int_{\tau}^{\eta} w_2(x)\,v^{\lambda}(\eta-x)\,\mathrm{d}x\\
&\quad + \tilde m\|w_1\|\delta^{\lambda}\int_{\tau+T}^{\infty}\mathrm{d}\eta\int_{\tau}^{\eta-T} w_2(x)\,v^{\lambda}(\eta-x-T)\,\mathrm{d}x\Big)/\xi_{21}^{\lambda}\\
&= p_2\Big(w_2(\tau) + \nu_{31}\tilde m\|w_1\|\int_{\tau}^{\infty} w_2(x)\,\mathrm{d}x\int_{x}^{\infty} v^{\lambda}(\eta-x)\,\mathrm{d}\eta\\
&\quad + \tilde m\|w_1\|\delta^{\lambda}\int_{\tau}^{\infty} w_2(x)\,\mathrm{d}x\int_{x+T}^{\infty} v^{\lambda}(\eta-x-T)\,\mathrm{d}\eta\Big)/\xi_{21}^{\lambda}\\
&= \Big(f_2^{\lambda}(\beta_2^{\lambda}(T)+\alpha_2^{\lambda}) + \nu_{31} + \delta^{\lambda}\Big)m p_2\|p_1w_1\|\,\|p_2w_2\|\,p_0^{-1}(\lambda)/\xi_{21}^{\lambda}.
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$\|p_2w_2\| = (\nu_1+\lambda)(mp_1)^{-1}\Big/\Big(-1+\{f_1^\lambda(\beta_1^\lambda(T)+\alpha_1^\lambda)+\nu_{32}+\nu_{42}\zeta(\lambda)\}p_0^{-1}(\lambda)\Big)$$

и

$$\|p_1w_1\| = (\lambda+\nu_2)(mp_2)^{-1}\Big/\Big(-1+\Big\{\nu_{31}+\delta^\lambda + \big(\beta_2^\lambda(T)+\alpha_2^\lambda\big)\exp\big\{-(\tau-T)(\lambda+\nu_2)\big\}\Big\}p_0^{-1}(\lambda)\Big),$$

так как

$$\|\mu^\lambda\|_1 = (\nu_{32}+\nu_{42}\zeta(\lambda))/p_0(\lambda),$$

где

$$\zeta(\lambda) = \int_0^T a^\lambda(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \alpha T, & \lambda = -\nu_4, \\ \alpha(\lambda+\nu_4)^{-1}\big(1-\exp\{-T(\lambda+\nu_4)\}\big), & \alpha \neq -\nu_4. \end{cases}$$

Ясно, что $\zeta(\lambda)$ непрерывна и убывает с ∞ до 0 при возрастании λ от $-\infty$ до ∞.

Таким образом, при $\lambda > \overline{\lambda} > -\nu > \lambda_0$

$$\begin{cases} \|p_2w_2\| = (\nu_1+\lambda)\big/mp_1\chi_{12}(\lambda), \\ \|p_1w_1\| = (\nu_2+\lambda)\big/mp_2\chi_{21}(\lambda), \end{cases} \tag{5.7}$$

где

$$\chi_{21}(\lambda) = -1+\Big\{\nu_{31}+\delta^\lambda+(\beta_2^\lambda(T)+\alpha_2^\lambda)\exp\big\{-(\tau-T)(\lambda+\nu_2)\big\}\Big\}/p_0(\lambda),$$

$$\chi_{12}(\lambda) = -1+\Big\{\nu_{32}+\nu_{42}\zeta(\lambda)+(\alpha_1^\lambda+\beta_1^\lambda(T))\exp\big\{-(\tau-T)(\lambda+\nu_1)\big\}\Big\}/p_0(\lambda).$$

Неравенства $\xi_{sk}^\lambda > 0$, $s \neq k$, удовлетворяются при $\lambda > \overline{\lambda}$. Но $\|p_sw_s\|$ должны быть положительными. Поэтому $\chi_{sk}(\lambda)$, $s \neq k$, также должна быть положительной. Из уравнений (4.16) и (5.7) получаем задачу

$$\Lambda(\lambda) := (\lambda+\nu_1)\big/(mp_1\chi_{12}(\lambda)) + (\lambda+\nu_2)\big/(mp_2\chi_{21}(\lambda)) = 1, \tag{5.8}$$

$$\lambda > \overline{\lambda}, \quad \chi_{sk}(\lambda) > 0, \quad s,k = 1,2; \quad s \neq k.$$

При $\lambda > \lambda_0, p_0(\lambda)$ и $p_0'(\lambda)$ положительны. Более того, $p_0(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$, $\zeta(\lambda) > 0$ и $\zeta(\lambda)' < 0$ при всех λ, и поэтому $\zeta(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Тогда $\chi_{sk}'(\lambda) < 0$ и $\chi_{sk}(\lambda)$ убывает от ∞ к --1, когда λ растет от λ_0 до ∞. Следовательно, $\chi_{sk}(\lambda)$ имеет единственный корень $\lambda_{sk} > \lambda_0$, $s \neq k$. Поэтому вещественное решение уравнения (5.8) принадлежит интервалу $(-\nu, \lambda_*)$, где $\lambda_* = \min(\lambda_{12}, \lambda_{21})$ при условии, что $-\nu < \lambda_*$ и $\Lambda(\lambda) < 1$. Функция $\Lambda(\lambda)$ монотонно возрастает от $\Lambda(-\nu)$ до ∞ при $\lambda \in (-\nu, \lambda_*)$. Но λ должна удовлетворять неравенству $\lambda > \overline{\lambda} > -\nu$. Поэтому:

(i) если $\overline{\lambda} < \lambda_*$ и $\Lambda(\overline{\lambda}) < 1$, то задача (5.8) имеет единственное решение $\tilde{\lambda} \in (\overline{\lambda}, \lambda_*)$;

(ii) если $\overline{\lambda} < \lambda_*$ и $\Lambda(\overline{\lambda}) > 1$ (или если $\overline{\lambda} \geqslant \lambda_*$), то положительное $\|p_s w_s\|$, $s = 1, 2$, не существует.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что* $p_s, \nu_s, \nu_{3s}, \nu_{4s}, \tilde{\nu}_{4s}, b_s, \alpha, \nu_5, \nu_{5s}$ *и* m *– положительные постоянные и* $\alpha\xi \exp\{-T\nu_4\} < \nu$. *Тогда имеют место следующие утверждения:*

(i) *если* $\overline{\lambda} < \lambda_*$ *и* $\Lambda(\overline{\lambda}) < 1$, *то задача (3.1) имеет единственный однопараметрический класс сепарабельных решений типа (4.1) с* $\lambda = \tilde{\lambda} \in (\overline{\lambda}, \lambda_*)$;

(ii) *если* $\overline{\lambda} < \lambda_*$ *и* $\Lambda(\overline{\lambda}) > 1$ *(или* $\overline{\lambda} \geqslant \lambda_*$*), то задача (3.1) не имеет сепарабельных решений типа (4.1).*

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 1 И 2

Доказательство Леммы 1. Решая (4.3), получаем

$$v^\lambda = \exp\Big\{-\int_0^{\tau_3} (\lambda + \nu_3(\xi + q_1, \xi + q_2, \xi))\,\mathrm{d}\xi\Big\} \quad \text{при} \quad \tau_3 \in [0, T],$$

$$\begin{aligned} v^\lambda = {}& \exp\Big\{-\int_0^{\tau_3} (\lambda + \nu_3(\xi + q_1, \xi + q_2, \xi))\,\mathrm{d}\xi\Big\} \\ &+ \int_0^{\tau_3 - T} \big(v^\lambda a^\lambda(\cdot, T)\big)\big|_{(\eta+q_1, \eta+q_2, \eta)} \\ &\times \exp\Big\{-\int_{\eta+T}^{\tau_3} (\lambda + \nu_3(\xi + q_1, \xi + q_2, \xi))\,\mathrm{d}\xi\Big\}\,\mathrm{d}\eta \end{aligned} \tag{6.1}$$

при $\tau_3 \in [T, \infty)$, где $q_1 = \tau_1 - \tau_3$, $q_2 = \tau_2 - \tau_3$. Очевидно, что v^λ положительна в $\overline{Q}_3$. Легко показать, что $v^\lambda \in C^0(\overline{Q}_3) \cap C^1(Q_3)$. Используя предположения (H_0) и решая по индукции неравенства

$$v^\lambda \leqslant \exp\{-\tau_3(\lambda + \nu_{3*})\} \quad \text{при} \quad \tau_3 \in [0, T]$$

и

$$\begin{aligned} v^\lambda \leqslant {}& \exp\{-\tau_3(\lambda + \nu_{3*})\} \\ &+ \int_0^{\tau_3 - T} v^\lambda(\eta + q_1, \eta + q_2, \eta) \exp\{-(\tau_3 - \eta - T)(\lambda + \nu_{3*}\} a^*(\lambda)\,\mathrm{d}\eta \quad \text{при } \tau_3 > T \end{aligned}$$

при $a^*(\lambda)=\alpha^*\exp\{-T(\lambda+\nu_{4*})\}$, находим

$$v^\lambda(\tau_3)\leqslant\widehat{v}^\lambda(\tau_3):=\exp\{-(\lambda+\nu_{3*})\tau_3\}\sum_{i=0}^{k}\big(\alpha^*\exp\{T(\nu_{3*}-\nu_{4*})\}\big)^i(\tau_3-iT)^i/i!,$$
$$\tau_3\in[kT,(k+1)T],\quad k=0,1,\ldots.$$

Рассмотрим функцию $p_0(\lambda)=\nu_{3*}+\lambda-a^*(\lambda)$, с $a^*(\lambda)$, определенной выше. Эта функция аналогична функции $p_0(\lambda)$, использованной в параграфе 5. Ясно, что $p_0(\lambda)$ имеет единственный вещественный корень $\lambda_0>-\nu_{3*}$, и $p_0(\lambda)>0$ при $\lambda>\lambda_0$. Более того, $\lambda_0<0$, если $\nu_{3*}>\alpha^*\exp\{-T\nu_{4*}\}$. Заметим, что $\widehat{v}^\lambda$ удовлетворяет уравнению

$$(\widehat{v}^\lambda)'=-(\lambda+\nu_{3*})\widehat{v}^\lambda,\quad \tau_3<T,\quad \widehat{v}^\lambda(0)=1,$$
$$(\widehat{v}^\lambda)'=-(\lambda+\nu_{3*})\widehat{v}^\lambda+a^*(\lambda)\widehat{v}^\lambda(\tau_3-T),\quad \tau_3>T,\quad [\widehat{v}^\lambda(T)]=0. \tag{6.2}$$

Уравнение (6.2) с запаздывающим аргументом и начальной функцией $\overline{v}^\lambda(\tau_3)=\exp\{\rho(\lambda)(\tau_3-T)\}$ при $\tau_3\in[0,T]$ имеет решение $\overline{v}^\lambda(\tau_3)=\exp\{\rho(\lambda)(\tau_3-T)\}$, где $\rho(\lambda)\in(-(\lambda+\nu_{3*}),0)$ – единственный вещественный корень уравнения $\rho+\lambda+\nu_{3*}=a^*(\lambda)\exp\{-\rho T\}$ с $\lambda>\lambda_0$. Очевидно, что $\overline{v}^\lambda(\tau_3)\geqslant\widehat{v}^\lambda(\tau_3)\,\forall\tau_3\geqslant0$. Графический анализ показывает, что $\rho(\lambda)$ убывает к $-\infty$ монотонно с ростом λ к ∞. Теперь из (6.1) находим

$$\begin{aligned}\int_0^\infty v^\lambda(x+q_1,x+q_2,x)\,\mathrm{d}x&\leqslant\int_0^\infty\exp\Big\{-\int_0^x(\lambda+\nu_3(\xi+q_1,\xi+q_2,\xi))\,\mathrm{d}\xi\Big\}\,\mathrm{d}x\\&\quad+a^*(\lambda)\int_T^\infty\mathrm{d}x\int_0^{x-T}v^\lambda(\eta+q_1,\eta+q_2,\eta)\\&\quad\times\exp\Big\{-\int_{\eta+T}^x(\lambda+\nu_3(\xi+q_1,\xi+q_2,\xi))\,\mathrm{d}\xi\Big\}\,\mathrm{d}\eta\\&\leqslant(\lambda+\nu_{3*})^{-1}+a^*(\lambda)\int_0^\infty v^\lambda(\eta+q_1,\eta+q_2,\eta)\,\mathrm{d}\eta\\&\quad\times\int_{\eta+T}^\infty\exp\big\{-(x-\eta-T)(\lambda+\nu_{3*})\big\}\,\mathrm{d}x\\&=(\lambda+\nu_{3*})^{-1}\Big\{1+a^*(\lambda)\int_0^\infty v^\lambda(\eta+q_1,\eta+q_2,\eta)\,\mathrm{d}\eta\Big\}\quad\text{при }\lambda>-\nu_{3*}\text{ и }q_1,q_2>\tau.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty v^\lambda(x+q_1,x+q_2,x)\,\mathrm{d}x\leqslant1/p_0(\lambda),\quad\text{для}\quad\lambda>\lambda_0\quad\text{и}\quad q_1,\ q_2>\tau.$$

Используя эту оценку, получаем

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty (v^\lambda \nu_{3s})\big|_{(x+q_1,x+q_2,x)}\,\mathrm{d}x \\
&\quad\leqslant \int_0^\infty \nu_{3s}(x+q_1,x+q_2,x)\exp\Big\{-\int_0^x \nu_{3s}(\xi+q_1,\xi+q_2,\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big\}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad+\int_T^\infty \nu_{3s}(x+q_1,x+q_2,x)\,\mathrm{d}x\int_0^{x-T}\big(v^\lambda a^\lambda(\cdot,T)\big)\big|_{(\eta+q_1,\eta+q_2,\eta)} \\
&\qquad\times\exp\Big\{-\int_{\eta+T}^x \nu_{3s}(\xi+q_1,\xi+q_2,\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big\}\,\mathrm{d}\eta \\
&\quad\leqslant 1+a^*(\lambda)\int_0^\infty v^\lambda(\eta+q_1,\eta+q_2,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\
&\qquad\times\int_{\eta+T}^\infty \nu_{3s}(x+q_1,x+q_2,x)\exp\Big\{-\int_{\eta+T}^x \nu_{3s}(\xi+q_1,\xi+q_2,\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big\}\,\mathrm{d}x \\
&\quad= 1+a^*(\lambda)/p_0(\lambda)
\end{aligned}
$$

при

$$\lambda>\max\Big(\lambda_0,-\big(\alpha_*+\min(\nu_{31*},\nu_{32*})\big)\Big)\quad \text{и}\quad q_1,\ q_2>\tau.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство Леммы 2. Сперва покажем, что ядра $G_1^\lambda(\tau_1,x)$, $G_{21}(\tau_2,x)$ и $G_{22}(\tau_2,x))$, определенные с помощью (4.13) при достаточно больших λ, непрерывны и ограничены. С помощью Леммы 1 и предположений (H_0) и (H_1) при w_1 и $w_2\in L_+^1(\tau,\infty)$ получаем:

$$
\begin{aligned}
G_1^\lambda(\tau_1,x)&\leqslant\int_x^{\tau_1} g_1^\lambda(\eta,x)\,\mathrm{d}\eta \\
&\leqslant m^*p_1(x)\int_\tau^\infty p_2(y)w_2(y)(A_1(\tau_1,x,y)+A_2(\tau_1,x,y))\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

при $\lambda>-\nu_{1*}$, где

$$A_1(\tau_1,x,y)=\int_x^{\tau_1}\big(v^\lambda\nu_{32}\big)\big|_{(\eta,\eta-x+y,\eta-x)}\,\mathrm{d}\eta\leqslant 1+a^*(\lambda)/p_0(\lambda)$$

при

$$\lambda>\max\Big(\lambda_0,-\big(\alpha_*+\min(\nu_{31*},\nu_{32*})\big)\Big)$$

и

$$\begin{aligned}
&A_2(\tau_1,x,y)\\
&\quad=\int_x^{\tau_1}\mathrm{d}\eta\int_{\gamma(\eta-x,T)}^{\eta-x}\nu_{42}(\eta,\eta-x+y,\eta-x,\eta-x-z)\big(v^\lambda a^\lambda(\cdot,\eta-x-z)\big)\big|_{(z+x,z+y,z)}\,\mathrm{d}z\\
&\quad=\int_0^{\tau_1-x}\mathrm{d}\beta\int_{\max(0,\beta-T)}^{\beta}\nu_{42}(\beta+x,\beta+y,\beta,\beta-z)\big(v^\lambda a^\lambda(\cdot,\beta-z)\big)\big|_{(z+x,z+y,z)}\,\mathrm{d}z\\
&\quad\leqslant\alpha^*\int_0^\infty v^\lambda(z+x,z+y,z)\,\mathrm{d}z\\
&\qquad\times\int_z^{z+T}\nu_{42}(\beta+x,\beta+y,\beta,\beta-z)\\
&\qquad\times\exp\Big\{-\int_0^{\beta-z}\big(\lambda+\nu_4(\xi+z+x,\xi+z+y,\xi+z,\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi\Big\}\,\mathrm{d}\beta\\
&\quad\leqslant\alpha^*\int_0^\infty v^\lambda(z+x,z+y,z)\,\mathrm{d}z\int_z^{z+T}\nu_{42}(\beta+x,\beta+y,\beta,\beta-z)\\
&\qquad\times\exp\Big\{-\int_0^{\beta-z}\nu_{42}(\xi+z+x,\xi+z+y,\xi+z,\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big\}\,\mathrm{d}\beta\\
&\quad=\alpha^*\int_0^\infty v^\lambda(z+x,z+y,z)\,\mathrm{d}z\leqslant\alpha^*/p_0(\lambda)
\end{aligned}$$

при $\lambda>\max\{\lambda_0,-\min(\nu_{41*},\nu_{42*})\}$.

Следовательно,

$$G_1^\lambda(\tau_1,x)\leqslant\int_x^{\tau_1}g_1^\lambda(\eta,x)\,\mathrm{d}\eta\leqslant m^*p_1(x)(1+2\alpha^*/p_0(\lambda))\|p_2w_2\| \tag{6.3}$$

при

$$\lambda>\max\Big\{\lambda_0,-\min(\nu_{1*},\nu_{41*},\nu_{42*}),-\big(\alpha_*+\min(\nu_{31*},\nu_{32*})\big)\Big\}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
G_{21}^\lambda(\tau_2,x)&\leqslant\int_x^{\tau_2}g_{21}^\lambda(\eta,x)\,\mathrm{d}\eta\\
&\leqslant\int_x^{\tau_2}\mathrm{d}\eta\int_\tau^\infty w_1(y)\tilde m(y,x)(v^\lambda\nu_{31})\big|_{(\eta-x+y,\eta,\eta-x)}\,\mathrm{d}y\\
&\leqslant m^*p_2(x)(1+\alpha^*/p_0(\lambda))\|p_1w_1\| \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

при $\lambda > \max\{\lambda_0, -(\alpha_* + \min(\nu_{31*}, \nu_{32*}), -\nu_{2*}\}$ и

$$\begin{aligned} G_{22}^{\lambda}(\tau_2, x) &\leqslant \int_{x+T}^{\tau_2} g_{22}^{\lambda}(\eta, x)\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_{x+T}^{\tau_2} \mathrm{d}\eta \int_{\tau}^{\infty} w_1(y)\tilde{m}(y,x)\delta^{\lambda}(\eta,x,y)v^{\lambda}(\eta+y-x-T, \eta-T, \eta-x-T)\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant m^* p_2(x) \int_{\tau}^{\infty} w_1(y)p_1(y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad \times \int_{x+y}^{\tau_2} v^{\lambda}(\eta+y-x-T, \eta-T, \eta-x-T)\delta^{\lambda}(\eta,x,y)\,\mathrm{d}\eta \\ &\leqslant p_2(x)m^* p_0^{-1}(\lambda)\|p_1 w_1\|\overline{\delta}\exp\{-T\lambda\} \end{aligned} \tag{6.5}$$

при $\lambda > \max(-\nu_{2*}, \lambda_0, -\nu_{42*})$, поскольку $\overline{\delta} = \sup_{\tau_2,x,y}\tilde{\delta}$.

Ограничения на λ и предположения (H_0) и (H_1) показывают, что $\int_{\tau}^{\tau_s} l_s^{\lambda}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, $G_1^{\lambda}(\tau_1, x)$ и $G_{2s}^{\lambda}(\tau_2, x)$ непрерывны при всех τ_s, (τ_1, x), (τ_2, x) и w_1, $w_2 \in L_+^1(\tau, \infty)$ соответственно. Поэтому уравнения Волтерры (4.12) имеют единственное глобальное непрерывное положительное решение. Оно, очевидно, удовлетворяет уравнению (4.10), и $z_s \in C^1([\tau,\infty))$ при $\lambda > \max\{\lambda_0, -(\alpha_* + \min(\nu_{31*}, \nu_{32*})), -\min(\nu_{1*}, \nu_{2*}, \nu_{41*}, \nu_{42*})\}$.

Теперь докажем неравенства $z_{s*}^{\lambda} \leqslant z_s \leqslant z_s^{\lambda *}$.

Пусть $(w_1, w_2) \in D_1$. Из уравнения (4.11) непосредственно следует нижняя оценка для $z_s^{\lambda}(w_k)$. Остается показать, что $z_s^{\lambda}(w_k) \leqslant z_s^{\lambda *}$ при $\lambda > \overline{\lambda}$, $s \neq k$, с $\overline{\lambda}$, определенной в (4.19). Положим

$$Z_s = z_s + \varphi_s + \psi_s,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau_1) &= \int_{\tau}^{\tau_1} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_{\tau}^{\infty} w_2(y)\tilde{m}(x,y)v^{\lambda}(\tau_1, \tau_1 - x + y, \tau_1 - x)\,\mathrm{d}y, \\ \varphi_2(\tau_2) &= \int_{\tau}^{\tau_2} z_2(x)\,\mathrm{d}x \int_{\tau}^{\infty} w_1(y)\tilde{m}(x,y)v^{\lambda}(\tau_2 - x + y, \tau_2, \tau_2 - x)\,\mathrm{d}y, \\ \psi_1(\tau_1) &= \int_{\tau}^{\tau_1} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_{\tau}^{\infty} w_2(y)\tilde{m}(y,x)\,\mathrm{d}y \int_{\gamma(\tau_1 - x, T)}^{\tau_1 - x} (v^{\lambda}a^{\lambda}(\cdot, \tau_1 - x - z))\big|_{(z+x, z+y, z)}\,\mathrm{d}z, \\ \psi_2(\tau_2) &= \int_{\tau}^{\tau_2} z_2(x)\,\mathrm{d}x \int_{\tau}^{\infty} w_1(y)\tilde{m}(y,x)\,\mathrm{d}y \int_{\gamma(\tau_2 - x, T)}^{\tau_2 - x} (v^{\lambda}a^{\lambda}(\cdot, \tau_2 - x - z))\big|_{(z+y, z+x, z)}\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

При $\tau_1 \in (\tau, \tau + T)$ имеем $\gamma(\tau_1 - x, T) = 0$, $Z_1' = z_1' + \varphi_1' + \psi_1'$ где, как показывают уравнения (4.3) и $(4.10)_1$,

$$\varphi_1' = z_1 r_1(\tau_1; w_2) - \int_\tau^{\tau_1} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_2(y)\tilde{m}(x, y)((\lambda + \nu_3)v^\lambda)\big|_{(\tau_1, \tau_1 - x + y, \tau_1 - x)}\,\mathrm{d}y,$$

$$\psi'(\tau_1) = \int_\tau^{\tau_1} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_2(y)\tilde{m}(x, y)\,\mathrm{d}y \Big\{(\alpha v^\lambda)\big|_{(\tau_1, \tau_1 - x + y, \tau_1 - x)}$$
$$- \int_0^{\tau_1 - x} \big(v^\lambda a^\lambda(\cdot, \tau_1 - x - z)\big)\big|_{(z + x, z + y, z)} \big(\lambda + \nu_4(\tau_1, \tau_1 - x + y, \tau_1 - x, \tau_1 - x - z)\big)\,\mathrm{d}z\Big\},$$

и

$$z_1' = -(\lambda + \nu_1 + r_1(\tau_1; w_2))z_1$$
$$+ \int_\tau^{\tau_1} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_2(y)\tilde{m}(x, y) \Big\{\big(v^\lambda \nu_{32}\big)\big|_{(\tau_1, \tau_1 - x + y, \tau_1 - x)}\,\mathrm{d}y$$
$$+ \int_0^{\tau_1 - x} \nu_{42}(\tau_1, \tau_1 - x + y, \tau_1 - x, \tau_1 - x - z)\big(v^\lambda a^\lambda(\cdot, \tau_1 - x - z)\big)\big|_{(z + x, z + y, z)}\,\mathrm{d}z\Big\}\,\mathrm{d}y.$$

Отсюда получаем

$$Z_1' = -(\lambda + \nu_1)z_1 - \int_\tau^{\tau_1} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_2(y)\tilde{m}(x, y) \Big\{\big((\lambda + \nu_{31})v^\lambda\big)\big|_{(\tau_1, \tau_1 - x + y, \tau_1 - x)}$$
$$+ \int_0^{\tau_1 - x} \big(v^\lambda a^\lambda(\cdot, \tau_1 - x - z)\big)\big|_{(z + x, z + y, z)}$$
$$\times \big(\lambda + \nu_{41}(\tau_1, \tau_1 - x + y, \tau_1 - x, \tau_1 - x - z)\big)\,\mathrm{d}z\Big\}\,\mathrm{d}y,$$

тогда

$$Z_1' \leqslant -(\lambda + \overline{\nu}_1)Z_1', \quad Z_1'(\tau) = 1,$$
$$\overline{\nu}_1(\tau_1) = \min\Big(\nu_1(\tau_1), \min_{\tau_2, \tau_3} \nu_{31}, \min_{\tau_2, \tau_3, \tau_4} \nu_{41}\Big),$$

и, наконец,

$$z_1(\tau_1) \leqslant Z_1(\tau_1) \leqslant \exp\Big\{-\int_\tau^{\tau_1} (\lambda + \overline{\nu}_1(x))\,\mathrm{d}x\Big\} \leqslant z_1^{\lambda *}, \quad \tau_1 \in [\tau, \tau + T]. \tag{6.6}$$

Аналогично

$$z_2(\tau_2) \leqslant Z_2(\tau_2) \leqslant \exp\Big\{-\int_\tau^{\tau_2} (\lambda + \overline{\nu}_2(x))\,\mathrm{d}x\Big\} \leqslant z_2^{\lambda *} \tag{6.7}$$

для $\tau_2 \in [\tau, \tau+T]$, $\overline{\nu}_2(\tau_1) = \min(\nu_2(\tau_1), \min_{\tau_1,\tau_3} \nu_{32}, \min_{\tau_1,\tau_3,\tau_4} \nu_{42})$.

При $\tau_2 \in (\tau+T, \infty)$ имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \int_\tau^{\tau_1-T} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_2(y)\tilde{m}(x,y)v^\lambda(\tau_1, \tau_1-x+y, \tau_1-x)\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{\tau_1-T}^{\tau_1} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_2(y)\tilde{m}(x,y)v^\lambda(\tau_1, \tau_1-x+y, \tau_1-x)\,\mathrm{d}y, \\
\psi_1 &= \int_\tau^{\tau_1-T} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_2(y)\tilde{m}(x,y)\,\mathrm{d}y \int_{\tau_1-x-T}^{\tau_1-x} \big(v^\lambda a^\lambda(\cdot, \tau_1-x-z)\big)\big|_{(z+x,z+y,z)}\,\mathrm{d}z \\
&\quad + \int_{\tau_1-T}^{\tau_1} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_2(y)\tilde{m}(x,y)\,\mathrm{d}y \int_0^{\tau_1-x} \big(v^\lambda a^\lambda(\cdot, \tau_1-x-z)\big)\big|_{(z+x,z+y,z)}\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Тогда с помощью (4.3) и $(4.10)_2$ находим

$$\begin{aligned}
\varphi_1' &= z_1 r_1(\tau_1; w_2) \\
&\quad - \int_\tau^{\tau_1} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_2(y)\tilde{m}(x,y)\big((\lambda+\nu_3)v^\lambda\big)\big|_{(\tau_1,\tau_1-x+y,\tau_1-x)}\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_\tau^{\tau_1-T} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_2(y)\tilde{m}(x,y)\big(v^\lambda a^\lambda(\cdot, T)\big)\big|_{(\tau_1-T,\tau_1-x_T+y,\tau_1-x-T)}\,\mathrm{d}y, \\
\psi_1' &= \int_\tau^{\tau_1} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_2(y)\tilde{m}(x,y)\bigg\{(\alpha v^\lambda)\big|_{(\tau_1,\tau_1-x+y,\tau_1-x)}\,\mathrm{d}y \\
&\quad - \int_{\gamma(\tau_1-x,T)}^{\tau_1-x} \big(v^\lambda a^\lambda(\cdot, \tau_1-x-z)\big)\big|_{(z+x,z+y,z)} \\
&\qquad \times \big(\lambda+\nu_4(\tau_1, \tau_1-x+y, \tau_1-x, \tau_1-x-z)\big)\,\mathrm{d}z\bigg\} \\
&\quad - \int_\tau^{\tau_1-T} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_2(y)\tilde{m}(x,y)\big\{\big((v^\lambda a^\lambda(\cdot, T)\big)\big)\big|_{(\tau_1-T,\tau_1-x-T+y,\tau_1-x-T)}\,\mathrm{d}y, \\
z' &= -(\lambda+\nu_1+r_1(\tau_1; w_2))z_1 + \int_\tau^{\tau_1} z_1(x) \int_\tau^\infty w_2(y)\tilde{m}(x,y) \\
&\quad \times \bigg\{(v^\lambda \nu_{32})\big|_{(\tau_1,\tau_1-x+y,\tau_1-x)} + \int_{\gamma(\tau_1-x,T)}^{\tau_1-x} \nu_{42}(\tau_1, \tau_1-x+y, \tau_1-x, \tau_1-x-z) \\
&\qquad \times \big(v^\lambda a^\lambda(\cdot, \tau_1-x-z)\big)\big|_{(z+x,z+y,z)}\,\mathrm{d}z\bigg\}\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

и аналогично

$$Z_1' = -(\lambda+\nu_1)z_1$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_\tau^{\tau_1} z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_2(y)\tilde m(x,y)\,\mathrm{d}y \biggl\{ \bigl(v^\lambda(\lambda+\nu_{31})\bigr)\big|_{(\tau_1,\tau_1-x+y,\tau_1-x)} \\
&+ \int_{\gamma(\tau_1-x,T)}^{\tau_1-x} \bigl(v^\lambda a^\lambda(\cdot,\tau_1-x-z)\bigr)\big|_{(z+x,z+y,z)} \\
&\qquad \times \bigl(\lambda+\nu_{41}(\tau_1,\tau_1-x+y,\tau_1-x,\tau_1-x-z)\bigr)\,\mathrm{d}z \biggr\}, \qquad \tau_1>\tau+T.
\end{aligned}
$$

Отсюда при $\tau_1\in[\tau+T,\infty)$ следует оценка (6.6).

Аналогично при $\tau_2\in(\tau+T,\infty)$ находим

$$
\begin{aligned}
Z_2' = &-(\lambda+\nu_2)z_2 \\
&- \int_\tau^{\tau_2} z_2(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_1(y)\tilde m(x,y) \bigl\{ \bigl(v^\lambda(\lambda+\nu_{32})\bigr)\big|_{(\tau_2-x+y,\tau_2,\tau_2-x)} \\
&+ \int_{\gamma(\tau_2-x,T)}^{\tau_2-x} \bigl(v^\lambda a^\lambda(\cdot,\tau_2-x-z)\bigr)\big|_{(z+x,z+y,z)} \\
&\qquad \times \bigl(\lambda+\nu_4(\tau_2-x+y,\tau_2,\tau_2-x,\tau_2-x-z)\bigr)\,\mathrm{d}z \bigr\}\,\mathrm{d}y \\
&+ \int_\tau^{\tau_2-T} z_2(x)\,\mathrm{d}x \int_\tau^\infty w_1(y)\tilde m(y,x) v^\lambda \\
&\qquad \times (y+\tau_2-x-T,\tau_2-T,\tau_2-x-T)\delta^\lambda(\tau_2,x,y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
Z_2' &\leqslant -(\lambda+\overline{\nu}_2)Z_2 + \overline{\delta}\exp\{-T\lambda\}\varphi_2(\tau_2-T) \\
&\leqslant -(\lambda+\nu)Z_2 + \overline{\delta}\exp\{-T\lambda\}Z_2(\tau_2-T),\ \ \tau_2>\tau+T. \qquad (6.8)
\end{aligned}
$$

Решим это неравенство с начальной функцией $Z_2\leqslant z_2^{\lambda *}$ при $\tau_2\in[\tau,\tau+T]$, где $z_2^{\lambda *}$ определена в (4.19). Нетрудно заметить, что $Z_2\leqslant z_2^{\lambda *}$ при $\tau_2\geqslant\tau$, где $z_2^{\lambda *}$ – решение уравнения

$$
(z_2^{\lambda *})' = -(\lambda+\nu)z_2^{\lambda *} + \overline{\delta}\exp\{-T\lambda\}z_2^{\lambda *}(\tau_2-T), \qquad \tau_2>\tau+T
$$

с начальной функцией $z_2^{\lambda *}=\exp\{\rho(\tau_2-\tau-T)\}$ при $\tau_2\in[\tau,\tau+T]$.

Ограничения (4.19) на λ и ρ показывают, что $z_s\in L^1(\tau,\infty),\ s=1,2$.

Теперь найдем верхнюю оценку для $\|z_s{}'\|$. Положим

$$
\Pi(\tau_s) = \exp\biggl\{ -\int_\tau^{\tau_s} l_s^\lambda(\xi)\,\mathrm{d}\xi \biggr\}.
$$

Так как $\Pi(\tau_s)' = -l_s^\lambda(\tau_s)\Pi(\tau_s) < 0$ при $\lambda > \overline{\lambda}$, то из $(4.11)_1$ следует, что

$$|z_1'| \leqslant -\Pi'(\tau_1)\Big\{1 + \int_\tau^{\tau_1} \Pi(\eta)^{-1}\,\mathrm{d}\eta \int_\tau^\eta z_1(x) g_1^\lambda(\eta, x)\,\mathrm{d}x\Big\} + \int_\tau^{\tau_1} z_1(x) g_1^\lambda(\tau_1, x)\,\mathrm{d}x.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\|z_1'\| &\leqslant 1 - \int_\tau^\infty \Pi'(\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1 \int_\tau^{\tau_1} \Pi(\eta)^{-1}\,\mathrm{d}\eta \int_\tau^\eta z_1(x) g_1^\lambda(\eta, x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\tau^\infty \mathrm{d}\tau_1 \int_\tau^{\tau_1} z_1(x) g_1^\lambda(\tau_1, x)\,\mathrm{d}x \\
&= 1 + \int_\tau^\infty \Pi(\eta)^{-1}\,\mathrm{d}\eta \int_\tau^\eta z_1(x) g_1^\lambda(\eta, x)\,\mathrm{d}x \int_\eta^\infty (-\Pi'(\tau_1))\,\mathrm{d}\tau_1 \\
&\quad + \int_\tau^\infty \mathrm{d}\tau_1 \int_\tau^{\tau_1} z_1(x) g_1^\lambda(\tau_1, x)\,\mathrm{d}x \\
&= 1 + 2\int_\tau^\infty \mathrm{d}\tau_1 \int_\tau^{\tau_1} z_1(x) g_1^\lambda(\tau_1, x)\,\mathrm{d}x \\
&= 1 + 2\int_\tau^\infty z_1(x)\,\mathrm{d}x \int_x^\infty g_1^\lambda(\tau_1, x)\,\mathrm{d}\tau_1, \quad \lambda > \overline{\lambda}.
\end{aligned}$$

С помощью оценки (6.3) находим

$$\begin{aligned}
\|z_1'\| &\leqslant 1 + 2m^*(1 + 2\alpha^*/p_0(\lambda))\|p_2 w_2\|\|p_1 z_1\| \\
&\leqslant \omega_1^\lambda := 1 + 2m^*(1 + 2\alpha^*/p_0(\lambda))\|p_1 z_1^{\lambda *}\|, \quad \lambda > \overline{\lambda},
\end{aligned}$$

поскольку $(w_1, w_2) \in D_1$.

Аналогично из $(4.11)_2$ получаем, что

$$\begin{aligned}
|z_2'| &\leqslant -\Pi'(\tau_2)\Big\{1 + \int_\tau^{\tau_2} \Pi(\eta)^{-1}\,\mathrm{d}\eta \int_\tau^\eta z_2(x) g_{21}^\lambda(\eta, x)\,\mathrm{d}x\Big\} \\
&\quad + \begin{cases} 0, & \tau_2 \in [\tau, \tau + T], \\ -\Pi'(\tau_2)\int_{\tau+T}^{\tau_2} \Pi(\eta)^{-1}\,\mathrm{d}\eta \int_\tau^{\eta - T} z_2(x) g_{22}^\lambda(\eta, x)\,\mathrm{d}x, & \tau_2 \geqslant \tau + T \end{cases} \\
&\quad + \int_\tau^{\tau_2} z_2(x) g_{21}^\lambda(\tau_2, x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \begin{cases} 0, & \tau_2 \in [\tau, \tau + T], \\ \int_\tau^{\tau_2 - T} z_2(x) g_{22}^\lambda(\tau_2, x)\,\mathrm{d}x, & \tau_2 \geqslant \tau + T, \end{cases}
\end{aligned}$$

и тогда

$$|z_2'| \leqslant -\Pi'(\tau_2) - \Pi'(\tau_2) \int_\tau^{\tau_2} \Pi(\eta)^{-1}\,\mathrm{d}\eta \int_\tau^\eta z_2(x) g_{21}^\lambda(\eta, x)\,\mathrm{d}x$$

$$+\begin{cases}0, & \tau_2\in[\tau,\tau+T],\\ -\Pi'(\tau_2)\int_{\tau+T}^{\tau_2}(\Pi(\eta))^{-1}\,\mathrm{d}\eta\int_\tau^{\eta-T}z_2(x)g_{22}^\lambda(\eta,x)\,\mathrm{d}x, & \tau_2\geqslant\tau+T\end{cases}$$

$$+\int_\tau^{\tau_2}z_2(x)g_{21}^\lambda(\tau_2,x)\,\mathrm{d}x$$

$$+\begin{cases}0, & \tau_2\in[\tau,\tau+T],\\ \int_\tau^{\tau_2-T}z_2(x)g_{22}^\lambda(\tau_2,x)\,\mathrm{d}x, & \tau_2\geqslant\tau+T.\end{cases}$$

Отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned}\|z_2'\|\leqslant 1&+\int_\tau^\infty(\Pi(\eta))^{-1}\,\mathrm{d}\eta\int_\eta^\infty(-\Pi'(\tau_2))\,\mathrm{d}\tau_2\int_\tau^\eta z_2(x)g_{21}^\lambda(\eta,x)\,\mathrm{d}x\\ &+\int_\tau^\infty\mathrm{d}\tau_2\int_\tau^{\tau_2}z_2(x)g_{21}^\lambda(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\tau+T}^\infty\mathrm{d}\tau_2\int_\tau^{\tau_2-T}z_2(x)g_{22}^\lambda(\tau_2,x)\,\mathrm{d}x\\ &+\int_{\tau+T}^\infty(\Pi(\eta))^{-1}\,\mathrm{d}\eta\int_\eta^\infty(-\Pi'(\tau_2))\,\mathrm{d}\tau_2\int_\tau^{\eta-T}z_2(x)g_{22}^\lambda(\eta,x)\,\mathrm{d}x\\ \leqslant 1&+2\int_\tau^\infty z_2(x)\,\mathrm{d}x\int_x^\infty g_{21}^\lambda(\eta,x)\,\mathrm{d}\eta+2\int_\tau^\infty z_2(x)\,\mathrm{d}x\int_{x+T}^\infty g_{22}^\lambda(\eta,x)\,\mathrm{d}\eta,\end{aligned}$$

которое с помощью оценок (6.4) и (6.5) может быть записано так

$$\|z_2'\|\leqslant\omega_2^\lambda:=1+2m^*\|p_2z_2^{\lambda*}\|\bigl(1+\alpha^*/p_0(\lambda)+\overline{\delta}\exp\{-T\lambda\}/p_0(\lambda)\bigr)$$

при $\lambda>\overline{\lambda}$.

Таким образом $\tilde{F}^\lambda(D)\subset\tilde{D}$ и критерий Риса [6] показывает, что множество $F^\lambda(D)\subset X$ является относительным компактом.

Теперь мы покажем, что $\tilde{F}^\lambda$ непрерывен в D. Пусть (w_{11},w_{21}) и $(w_{12},w_{22})\in D$. Соответствующие пары обозначим через $(z_1^\lambda(w_{21}),z_2^\lambda(w_{11}))$ и $(z_1^\lambda(w_{22}),z_2^\lambda(w_{12}))$. Положим $\Delta w_k=w_{k2}-w_{k1}$ и $\Delta z_s^\lambda(\tau_s)=z_s^\lambda(w_{k2})(\tau_s)-z_s^\lambda(w_{k1})(\tau_s)$, $s,k=1,2$; $s\neq k$. Тогда из $(4.10)_1$ получим

$$\begin{aligned}(\Delta z_1^\lambda)'=&-\{l_1^\lambda(w_{22})\}(\tau_1)\Delta z_1^\lambda\\ &+\int_\tau^{\tau_1}(\Delta z_1^\lambda(x))R_1^\lambda(\tau_1,x;w_{22})\,\mathrm{d}x+\int_\tau^{\tau_1}\{z_1^\lambda(w_{21})\}(x)R_1^\lambda(\tau_1,x;\Delta w_2)\,\mathrm{d}x\\ &-r_1(\tau_1;\Delta w_2)\{z_1^\lambda(w_{21})\}(\tau_1),\qquad\Delta z_1^\lambda(\tau)=0,\end{aligned}$$

затем

$$\Delta z_1^\lambda=\int_\tau^{\tau_1}\exp\Bigl\{-\int_\eta^{\tau_1}\{l_1^\lambda(w_{22})\}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Bigr\}\Bigl\{\int_\tau^\eta(\Delta z_1^\lambda(x))R_1^\lambda(\eta,x;w_{22})\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_{\tau}^{\eta}\{z_1^{\lambda}(w_{21})\}(x)R_1^{\lambda}(\eta,x;\Delta w_2)\,\mathrm{d}x-\{z_1^{\lambda}(w_{21})\}(\eta)r_1(\eta;\Delta w_2)\Big\}\,\mathrm{d}\eta,$$

или

$$\Delta z_1^{\lambda}=\int_{\tau}^{\tau_1}\mathrm{d}x\int_{x}^{\tau_1}\mathrm{d}\eta\exp\Big\{-\int_{\eta}^{\tau_1}\{l_1^{\lambda}(w_{22})\}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big\}$$
$$\times\Big\{(\Delta z_1^{\lambda}(x))R_1^{\lambda}(\eta,x;w_{22})+\{z_1^{\lambda}(w_{21})\}(x)R_1^{\lambda}(\eta,x;\Delta w_2)\Big\}$$
$$-\int_{\tau}^{\tau_1}\{z_1^{\lambda}(w_{21})\}(\eta)r_1(\eta;\Delta w_2)\exp\Big\{-\int_{\eta}^{\tau_1}\{l_1^{\lambda}(w_{22})\}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big\}\,\mathrm{d}\eta. \quad (6.9)$$

Аналогично

$$(\Delta z_2^{\lambda})'=-\{l_2^{\lambda}(w_{12})\}(\tau_2)\Delta z_2^{\lambda}+\int_{\tau}^{\tau_2}\big(\Delta z_2^{\lambda}(x)R_{21}^{\lambda}(\tau_2,x;w_{12})$$
$$+\{z_2^{\lambda}(w_{11})\}(x)R_{21}^{\lambda}(\tau_2,x;\Delta w_1)\big)\,\mathrm{d}x-r_2(\tau_2;\Delta w_1)\{z_2^{\lambda}(w_{11})\}(\tau_2)$$
$$+\begin{cases}0, \quad \tau_2\in(\tau,\tau+T),\ \ \Delta z_2^{\lambda}(\tau)=0,\\ \int_{\tau}^{\tau_2-T}\big(\Delta z_2^{\lambda}(x)R_{22}^{\lambda}(\tau_2,x,w_{12})+\{z_2^{\lambda}(w_{11})\}(x)R_{22}^{\lambda}(\tau_2,x,\Delta w_1)\big)\,\mathrm{d}x,\\ \qquad\qquad \tau_2>\tau+T,\quad [\Delta z_2(\tau+T)]=0,\end{cases}$$

тогда

$$\Delta z_2^{\lambda}=\int_{\tau}^{\tau_2}\exp\Big\{-\int_{\eta}^{\tau_2}\{l_2^{\lambda}(w_{12})\}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big\}$$
$$\times\Big\{\int_{\tau}^{\eta}\Big(\Delta z_2^{\lambda}(x)R_{21}^{\lambda}(\eta,x;w_{12})+\{z_2^{\lambda}(w_{11})\}(x)R_{21}^{\lambda}(\eta,x;\Delta w_1)\Big)\,\mathrm{d}x$$
$$-r_2(\eta;\Delta w_1)\{z_2^{\lambda}(w_{11})\}(\eta)\Big\}\,\mathrm{d}\eta$$
$$+\begin{cases}0, \quad \mathrm{d}\tau_2\in(\tau,\tau+T),\\ \int_{\tau+T}^{\tau_2}\exp\{-\int_{\eta}^{\tau_2}\{l_2^{\lambda}(w_{12})\}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\}\Big\{\int_{\tau}^{\eta-T}\mathrm{d}\eta\big(\Delta z_2^{\lambda}(x)R_{22}^{\lambda}(\eta,x,w_{12})\\ +\{z_2^{\lambda}(w_{11})\}(x)R_{22}^{\lambda}(\eta,x;\Delta w_1)\big)\,\mathrm{d}x\Big\}\,\mathrm{d}\eta, \quad \tau_2>\tau+T,\end{cases}$$

и окончательно

$$\Delta z_2^{\lambda}=\int_{\tau}^{\tau_2}\mathrm{d}x\int_{x}^{\tau_2}\exp\Big\{-\int_{\eta}^{\tau_2}\{l_2^{\lambda}(w_{12})\}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big\}$$
$$\times\Big(\Delta z_2^{\lambda}(x)R_{21}^{\lambda}(\eta,x;w_{12})+\{z_2^{\lambda}(w_{11})\}(x)R_{21}^{\lambda}(\eta,x;\Delta w_1)\Big)\,\mathrm{d}\eta$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_{\tau}^{\tau_2} r_2(\eta;\Delta w_1)\{z_2^{\lambda}(w_{11})\}(\eta)\exp\Big\{-\int_{\eta}^{\tau_2}\{l_2^{\lambda}(w_{12})\}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big\}\,\mathrm{d}\eta \\
&+ \begin{cases} 0, \quad \tau_2\in(\tau,\tau+T), \\ \int_{\tau}^{\tau_2-T}\mathrm{d}x\int_{x+T}^{\tau_2}\exp\big\{-\int_{\eta}^{\tau_2}\{l_2^{\lambda}(w_{12})\}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\big\}\big(\Delta z_2^{\lambda}(x)R_{22}^{\lambda}(\eta,x,w_{12}) \\ +\{z_2^{\lambda}(w_{11})\}(x)R_{22}^{\lambda}(\eta,x;\Delta w_1)\big)\,\mathrm{d}\eta, \quad \tau_2>\tau+T. \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.10}
$$

С помощью (6.3) и (4.19) из (6.9) получаем

$$
|\Delta z_1^{\lambda}|\leqslant c_{11}(\lambda)\int_{\tau}^{\tau_1}|\Delta z_1^{\lambda}(x)|\,\mathrm{d}x+c_{12}(\lambda)\|\Delta w_2\| \quad \text{при} \quad \lambda>\overline{\lambda},
$$

где

$$
\begin{aligned}
c_{11}(\lambda)&=m^*p^*(1+2\alpha^*p_0^{-1}(\lambda)),\\
c_{12}(\lambda)&=m^*(p^*)^2(1/e+c_{11}(\lambda)(m^*p^*)^{-1})(\lambda+\nu)^{-1}
\end{aligned}
$$

при $\lambda>\overline{\lambda}$. Поэтому

$$
|\Delta z_1^{\lambda}|\leqslant c_{12}(\lambda)\|\Delta w_2\|\exp\{c_{11}(\lambda)(\tau_1-\tau)\} \quad \text{при} \quad \lambda>\overline{\lambda}.
$$

Но в силу (4.19) $|\Delta z_1|<2z_1^{\lambda *}$ при $\lambda>\overline{\lambda}$. Поэтому

$$
\begin{aligned}
\|\Delta z_1^{\lambda}\|\leqslant c_{12}(\lambda)\|\Delta w_2\|&\int_{\tau}^{\tau_{1*}}\exp\{c_{11}(\lambda)(\tau_1-\tau)\}\,\mathrm{d}\tau_1\\
&+2\int_{\tau_{1*}}^{\infty}z_1^{\lambda *}(x)\,\mathrm{d}x, \quad \lambda>\overline{\lambda}.
\end{aligned} \tag{6.11}
$$

Аналогично, используя (6.4), (6.5) и (4.19), из (6.10) получим

$$
\begin{aligned}
\big|\Delta z_2^{\lambda}\big|\leqslant c(\lambda)&\int_{\tau}^{\tau_2}\big|\Delta z_2^{\lambda}(x)\big|\,\mathrm{d}x+c(\lambda)p^*\|\Delta w_1\|\int_{\tau}^{\tau_2}z_2^{\lambda *}(x)\,\mathrm{d}\eta\\
&+m^*(p^*)^2\|\Delta w_1\|\int_{\tau}^{\tau_2}z_2^{\lambda *}(\eta)\exp\{-(\lambda+\nu)(\tau_2-\eta)\}\,\mathrm{d}\eta\\
&+\int_{\tau}^{\tau_2}\big|\Delta z_2^{\lambda}(x)\big|\,\mathrm{d}x p^*m^*\overline{\delta}\exp\{-T\lambda\}(p_0(\lambda))^{-1}\\
&+(p^*)^2m^*\overline{\delta}\exp\{-T\lambda\}(p_0(\lambda)^{-1}\|\Delta w_1\|\int_{\tau}^{\tau_2}z_2^{\lambda *}(x)\,\mathrm{d}x,\\
&\qquad c(\lambda)=m^*p^*(1+\alpha^*/p_0(\lambda)).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$\left|\Delta z_2^\lambda\right| \leqslant c_{21}(\lambda)\int_\tau^{\tau_2}\left|\Delta z_2^\lambda(x)\right|\mathrm{d}x + c_{22}(\lambda)\|\Delta w_1\| \quad \text{при} \quad \lambda > \overline{\lambda},$$

где

$$c_{21}(\lambda) = c(\lambda) + p^* m^* \overline{\delta}\exp\{-T\lambda\}/p_0(\lambda),$$
$$c_{22}(\lambda) = m^*(p^*)^2\Big\{(\lambda+\nu)^{-1} - (\rho(\lambda))^{-1}\exp\{-T\rho(\lambda)\}\big(c(\lambda)/(m^* p^*) + \overline{\delta}\exp\{-T\lambda\}/p_0(\lambda)\big)\Big\}.$$

Решив это неравенство получаем

$$\left|\Delta z_2^\lambda\right| \leqslant c_{22}(\lambda)\|\Delta w_1\|\exp\{c_{21}(\lambda)(\tau_2-\tau)\} \quad \text{при} \quad \lambda > \overline{\lambda}.$$

Поэтому

$$\|\Delta z_2^\lambda\| \leqslant c_{22}(\lambda)\|\Delta w_1\|\int_\tau^{\tau_{2*}}\exp\{c_{21}(\lambda)(\tau_2-\tau)\}\,\mathrm{d}\tau_2 + 2\int_{\tau_{2*}}^\infty z_2^{\lambda*}(\tau_2)\,\mathrm{d}\tau_2. \quad (6.12)$$

Выбрав τ_{s*} и $\|\Delta w_s\|$ для $s=1,2$ такие, что $2\int_{\tau_{s*}}^\infty z_s^{\lambda*}(x)\,\mathrm{d}x < \epsilon_1/2$ и

$$\|\Delta w_k\| c_{s2}(\lambda)\int_\tau^{\tau_{s*}}\exp\{c_{s1}(\lambda)(\tau_s-\tau)\}\,\mathrm{d}\tau_s < \epsilon_1/2, \quad \epsilon_1 > 0, \quad s,k = 1,2; \quad s \neq k,$$

из (6.11) и (6.12) получаем, что $\|\Delta w_s\| < \epsilon_1$, $s=1,2$. Поскольку эта оценка верна при любом сколь угодно малом положительном ϵ_1, то при $\lambda > \overline{\lambda}$ оператор $\tilde{F}$ будет непрерывным. Таким образом, оператор $\tilde{F}$ является непрерывным в D, а в результате и вполне непрерывным. Лемма 2 доказана.

7. СИСТЕМА ДЛЯ МАКРОМОМЕНТОВ

В настоящем параграфе мы ограничимся выводом системы уравнений для макропараметров. Положим

$$f_s(t) = \int_\tau^\infty u_s(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad s = 1,2,$$
$$f_3(t) = \int_0^\infty \mathrm{d}\tau_3\int_{\tau+\tau_3}^\infty \mathrm{d}\tau_2\int_{\tau+\tau_3}^\infty u_3(t,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\,\mathrm{d}\tau_1,$$
$$f_4(t) = \int_0^T \mathrm{d}\tau_4\int_{\tau_4}^\infty \mathrm{d}\tau_3\int_{\tau+\tau_3}^\infty \mathrm{d}\tau_2\int_{\tau+\tau_3}^\infty u_4(t,\tau_1,\ldots,\tau_4)\,\mathrm{d}\tau_1,$$

$$f_{4s}(t) = \int_0^T \mathrm{d}\tau_4 \int_{\tau_4}^\infty \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3}^\infty \mathrm{d}\tau_2 \int_{\tau+\tau_3}^\infty u_{4s}(t, \tau_1, \dots, \tau_4)\, \mathrm{d}\tau_1,$$

$$f_5(t) = \int_0^T \mathrm{d}\tau_4 \int_{\tau_4}^T \mathrm{d}\tau_5 \int_{\tau_4}^\infty \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3}^\infty \mathrm{d}\tau_1 \int_{\tau+\tau_3+\tau_5-\tau_4}^\infty u_5(t, \tau_1, \dots, \tau_5)\, \mathrm{d}\tau_2,$$

$$f_{5s}(t) = \int_0^T \mathrm{d}\tau_4 \int_{\tau_4}^T \mathrm{d}\tau_5 \int_{\tau_4}^\infty \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3}^\infty \mathrm{d}\tau_1 \int_{\tau+\tau_3+\tau_5-\tau_4}^\infty u_{5s}(t, \tau_1, \dots, \tau_5)\, \mathrm{d}\tau_2,\ \ s = 1, 2.$$

Функции $f_s, f_3, f_4,\ f_{4s}, f_5$ и f_{5s} означают суммарные в момент t числа взрослых пола s пар в данный момент неимеющих детей юнного возраста, пар присматривающих за детьми, детей, находящихся под присмотром пары родителей, самок-вдов, присматривающих за детьми-сиротами и детей-сирот, находящихся под присмотром матерей-вдов. Пусть $p_s,\ \nu_s, \nu_{3s},\ \nu_{4s},\ \tilde{\nu}_{4s},\ b_s,\ \alpha,\ \nu_5,\ \tilde{\nu}_{5s}$ и m не зависят от возрастов. Предположим, что $u_s \to 0$ с $s = 1, 2$ при $\tau_s \to \infty$, u_3 и $u_4 \to 0$ при хотя бы одном из возрастов (τ_1, τ_2, τ_3), стремящемся к $\to \infty$, и $u_5, u_{5s} \to 0$ при $\tau_2 \to \infty$. Формально интегрируя (3.1), получаем

$$f_1' = u_1(t, \tau) - \nu_1 f_1 - \tilde{m} f_1 f_2 \Big/ \sum_{i=1}^2 p_i f_i + \nu_{32} f_3 + \nu_{42} f_4, \tag{7.1}$$

$$f_2' = u_2(t, \tau) - \nu_2 f_2 - \tilde{m} f_1 f_2 \Big/ \sum_{i=1}^2 p_i f_i + \nu_{31} f_3 + y(t), \tag{7.2}$$

$$f_3' = -\nu_3 f_3 + \tilde{m} f_1 f_2 \Big/ \sum_{i=1}^2 p_i f_i + x(t), \tag{7.3}$$

$$f_4' = -\nu_4 f_4 + \alpha f_3 - x(t), \tag{7.4}$$

$$f_{4s}' = -\widehat{\nu}_s f_{4s} + \alpha b_s f_3 - x_s(t), \tag{7.5}$$

$$f_5' = -\nu_5 f_5 + \nu_{41} f_4 - y(t), \tag{7.6}$$

$$f_{5s}' = -\nu_{5s} f_{5s} + \nu_{41} f_{4s} - y_s(t), \tag{7.7}$$

$$u_s(t, \tau) = \begin{cases} u_s^0(\tau - t) \exp\bigl\{ -\int_0^t \nu_s(\xi)\, \mathrm{d}\xi \bigr\}, & 0 \leqslant t \leqslant \tau - T, \\ u_s(T + t - \tau, T) \exp\bigl\{ -\int_{T-\tau+t}^t \nu_s(\xi)\, \mathrm{d}\xi \bigr\}, & t \geqslant \tau - T, \end{cases}$$

$$u_s(t, T) = x_s(t) + y_s(t),$$

$$x_s(t) = \begin{cases} \int_{T-t}^\infty \mathrm{d}\tau_3 \int_{\tau+\tau_3}^\infty \mathrm{d}\tau_2 \int_{\tau+\tau_3}^\infty u_{4s}^0(\tau_1, \tau_2, \tau_3, T - t)\, \mathrm{d}\tau_1 \\ \quad \times \exp\bigl\{ -\int_0^t \widehat{\nu}_s(\xi)\, \mathrm{d}\xi \bigr\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ f_3(t - T) b_s(t - T) \alpha(t - T) \exp\bigl\{ -\int_{t-T}^t \widehat{\nu}_s(x)\, \mathrm{d}x \bigr\}, \quad t \geqslant T, \end{cases}$$

$$y_s(t)=\begin{cases}\int_0^{T-t}\mathrm{d}\tau_4\int_{\tau_4}^{\infty}\mathrm{d}\tau_3\int_{\tau+\tau_3}^{\infty}\mathrm{d}\tau_1\int_{\tau+\tau_3+T-\tau_4-t}^{\infty}u_{5s}^0(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,T-t)\,\mathrm{d}\tau_2\\ \quad\times\exp\big\{-\int_0^t\widehat{\nu}_{5s}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\big\}\\ \quad+\int_{T-t}^{\infty}\mathrm{d}\tau_3\int_{\tau+\tau_3}^{\infty}\mathrm{d}\tau_2\int_{\tau+\tau_3}^{\infty}u_{4s}^0(\tau_1,\tau_2,\tau_3,T-t)\,\mathrm{d}\tau_1\int_0^t\nu_{41}(\tau_4)\\ \quad\times\exp\big\{-\int_0^{\tau_4}\widehat{\nu}_{4s}(\xi)\,\mathrm{d}\xi-\int_{\tau_4}^t\widehat{\nu}_{5s}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\big\}\,\mathrm{d}\tau_4,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\\ \\ \alpha(t-T)b_s(t-T)f_3(t-T)\int_{t-T}^t\nu_{41}(\tau_4)\\ \quad\times\exp\big\{-\int_{t-\tau}^{\tau_4}\widehat{\nu}_{4s}(\xi)\,\mathrm{d}\xi-\int_{\tau_4}^t\widehat{\nu}_{5s}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\big\}\,\mathrm{d}\tau_4,\quad t\geqslant T,\end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases}\int_{T-t}^{\infty}\mathrm{d}\tau_3\int_{\tau+\tau_3}^{\infty}\mathrm{d}\tau_2\int_{\tau+\tau_3}^{\infty}u_4^0(\tau_1,\tau_2,\tau_3,T-t)\,\mathrm{d}\tau_1\exp\big\{-\int_0^t\nu_4(x)\,\mathrm{d}x\big\},\\ \hfill 0\leqslant t\leqslant T,\\ \\ f_3(t-T)\alpha(t-T)\exp\big\{-\int_{t-T}^t\nu_4(x)\,\mathrm{d}x\big\},\quad t\geqslant T,\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}\int_0^{T-t}\mathrm{d}\tau_4\int_{\tau_4}^{\infty}\mathrm{d}\tau_3\int_{\tau+\tau_3}^{\infty}\mathrm{d}\tau_1\int_{\tau+\tau_3+T-\tau_4-t}^{\infty}u_5^0(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,T-t)\,\mathrm{d}\tau_2\\ \quad\times\exp\big\{-\int_0^t\nu_5(\xi)\,\mathrm{d}\xi\big\}\\ \quad+\int_{T-t}^{\infty}\mathrm{d}\tau_3\int_{\tau+\tau_3}^{\infty}\mathrm{d}\tau_2\int_{\tau+\tau_3}^{\infty}u_4^0(\tau_1,\tau_2,\tau_3,T-t)\,\mathrm{d}\tau_1\\ \quad\times\int_0^t\nu_{41}(\tau_4)\exp\big\{-\int_0^{\tau_4}\nu_4(\xi)\,\mathrm{d}\xi-\int_{\tau_4}^t\nu_5(\xi)\,\mathrm{d}\xi\big\}\,\mathrm{d}\tau_4,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\\ \\ \alpha(t-T)f_3(t-T)\int_{t-T}^t\nu_{41}(\tau_4)\\ \quad\times\exp\big\{-\int_{t-T}^{\tau_4}\nu_4(\xi)\,\mathrm{d}\xi-\int_{\tau_4}^t\nu_5(\xi)\,\mathrm{d}\xi\big\}\,\mathrm{d}\tau_4,\quad t\geqslant T.\end{cases}$$

Заметим, что $x(t)$ означает число пар в момент t, заканчивающих присмотр за детьми. Система (7.1)–(7.7) включает два запаздывания T и τ. Оба они входят через $f_3(t-\tau)$ (см. $u_s(t,\tau)$) и $f_3(t-T)$. Система (7.1)–(7.4) замкнута и не зависит от уравнений (7.5)–(7.7). При соответствующих ограничениях система (7.1)–(7.7) имеет экспоненциально растущие или убывающие решения. В симметрическом случае ($f_1=f_2$) эта система становится линейной.

8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Принимая во внимание сильный материнский и слабый отцовский присмотр за детьми, предложена модель двуполой популяции с возрастной структурой. Этот присмотр означает, что все дети присматриваемого возраста погибают в случае гибели их матери но они не обязаны погибнуть, если погибает их отец. Модель состоит из девяти интегродифференциальных уравнений (3.1) с частными производными и обобщает модель Гоппенштеда–Староверова–Гаделера на случай популяции, присматривающей за детьми.

Доказано существование или несуществование сепарабельных решений модели (3.1) в случае функции скрещивания типа гармонического среднего с весами. Доказательство основано на методе Прусса–Шапахера [9], использованном при изучении сепарабельных решений (с положительной скоростью роста) модели Гоппенштеда–Староверова в случае функции скрещивания типа гармонического среднего. Этот метод основан на принципе неподвижной точки Шаудера и не дает единственности. Даны достаточные условия для существование хотя бы одного класса сепарабельных решений (со скоростью роста в конечном интервале с отрицательной нижней границей) для модели (3.1) с общего вида витальными скоростями. Также даны достаточные условия для несуществования сепарабельных решений этой модели. В случае постоянных витальных скоростей эти достаточные условия существования допускают тоько однин однопараметрический класс сепарабельных решений.

В случае независящих от возрастов витальных скоростей получена система, описывающая эволюцию макропараметров. Эта система включает два запаздывания и обобщает систему Гаделера [3] для макропараметров, включающую период половой зрелости. Оба запаздывания появляются через $f_3(t-\tau)$ и $f_3(t-T)$.

Литература

1. A. Fredrickson, A mathematical theory of age structure in sexual populations: random mating and monogamous marriage models, *Math. Biosci.*, **10**, 117 (1971).
2. M.E. Gurtin and R. MacCamy, Nonlinear age-dependent population dynamics, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **54**, 281–300 (1974).
3. K.P. Hadeler, Pair formation with maturation period, *J. Math. Biol.*, **32**, 1 (1993).
4. F.C. Hoppensteadt, Mathematical theories of populations, genetics, and epidemics, in: *CBMS Appl. Math. SIAM*, vol. 20, Philadelphia (1975).
5. M. Iannelli, Mathematical theory of age-structured population dynamics, *Comitato Nazionale per le Scienze Mathematiche*, C.N.R., **7**, Gardini Editori e Stampatori in Pisa (1995).
6. S.G. Krein, *Functional Analysis*, Moscow, Nauka (1964) (in Russian).
7. M. Martcheva, Exponential growth in age-structured two-sex populations, *Math. Biosci.*, **157**, 1–22 (1999).
8. S. Moss de Oliveira, Consequences of parental care on population dynamics, *Physica*, **A 273**, 140–144 (1999).
9. J. Prüss, W. Schappacher, Persistent age-distributions for a pair-formation model, *J. Math. Biol.*, **33**, 17–33 (1994).
10. V. Skakauskas, Two population dynamics models with child care, *Informatica*, **11**(2), 195–218 (2000).
11. V. Skakauskas, A density-dependent population dynamics model with offspring production at fixed ages and child care, in: V. Capasso (Ed.), *Mathematical Modelling and Computing in Biology and Medicine 1* (5th ESMTB conference 2002), pp. 368–373.
12. V. Skakauskas, Large time behavior in a density-dependent population dynamics problem with age structure and child care, in: R. Rudnicki (Ed.), *Mathematical Modelling of Population Dynamics*, vol. 63, Banach center publications, Inst. of Math., Polish Acad. Sci., Warszawa (2004), pp. 243–258.
13. V. Skakauskas, Large time behavior in a population dynamics with offspring production at fixed ages, child care, and spatial dispersal, *Lith. math. J.*, **44**(2), 180–225 (2004).
14. V. Skakauskas, An age-structured population dynamics model with females' pregnancy and child care, *Lith. Math. J.*, **44**(3), 251–315 (2004).
15. V. Skakauskas, A two-sex population dynamics model with strong parental care, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **6**(4), 609–636 (2005).
16. O.V. Staroverov, Reproduction of the structure of the population and marriages, *Ekonomika i matematiceskije metody*, **13**, 77–82 (1977) (in Russian).

17. G.F. Webb, *Theory of Non-Linear Age-Dependent Population Dynamics*, New York, Marcel Dekker (1985).
18. R. Zacher, Persistent solutions for age-dependent pair-formation models, *J. Math. Biol.*, **42**, 507–531 (2001).

REZIUMĖ

V. Skakauskas. Dvilytės populiacijos dinamikos modelis su stipria motiniška vaikų globa

Pateiktas dvilytės nemigruojančios populiacijos deterministinis modelis atsižvelgiantis į stiprią motinišką ir silpną tėvišką vaikų globą. Panaudota harmoninio vidurkio tipo su svoriais porų sudarymo funkcija. Tariama, kad kiekviena lytis turi priešreproduktyvųjį ir reproduktyvųjį amžiaus intervalus. Visi suaugę individai skirstomi į vienišus patinėlius ir pateles, pastovias lyčių poras, pateles-našles, kurios globoja savo vaikus žuvus tėvui. Poros yra dviejų tipų: poros, globojančios savo vaikus, ir poros, duotu momentu neturinčios globotinių. Visi priešreproduktyvaus amžiaus individai skirstomi į jaunučių ir paauglių grupes. Tariama, kad jaunučiai yra tėvų poros arba tik motinos (po tėvo mirties) globojami. Paaugliai gali gyventi be jokios globos, tačiau negali daugintis. Tariama, kad tik poros gali susilaukti palikuonių. Modelį sudaro devynios integrodiferencialinės lygtys su integralinio tipo sąlygomis. Ištirta separabiliųjų sprendinių klasė ir gauta sistema, aprašanti makroparametrų evoliuciją.

SUMMARY

V. Skakauskas. A two-sex population dynamics model with strong maternal care

A two-sex age-structured non-dispersing population dynamics deterministic model is presented taking into account strong maternal and weak paternal care of offspring. The model includes a weighted harmonic mean type pair formation function and neglects the separation of pairs. It is assumed that each sex has pre–reproductive and reproductive age intervals. All adult individuals are divided into single males, single females, permanent pairs, and female-widows who care for their offsprings after the death of their pair partner. All pairs are of two types: pairs without offspring under parental care at the given time and pairs taking child care. All individuals of pre-reproductive age are divided into young and juvenile groups. The young offspring are assumed to be under parental or maternal (after the death of their father) care. Juveniles can live without parental or maternal care but they can not reproduce offsprings. It is assumed that births can only occur from couples. The model consists of nine integro–PDEs subject to the conditions of an integral type. A class of separable solutions is studied and a system for macro–moments evolving in time is derived in the case of age-independent vital ones.

Keywords: pair formation, child care, paternal care, maternal care.