VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS MAGISTRANTŪROS STUDIJŲ PROGRAMA

Lukas Stepelis

Sezoninis ir jungtinis trijų žalų diskretaus laiko rizikos modeliai

Seasonal and Multi-Risk Discrete Time Three-Risk Models

Magistro baigiamasis darbas

Darbo vadovas doc. dr. Andrius Grigutis

VILNIUS 2020

Turinys

Sezoninis ir jungtinis trijų žalų diskretaus laiko rizikos modeliai

Santrauka

Šiame darbe nagrinėjamas sezoninis ir jungtinis trijų žalų diskretaus laiko rizikos modeliai baigtiniame ir begaliniame laike. Pateikiami pagrindiniai apibrėžimai, sąvokos ir sąvybės, kurios reikalingos apskaičiuoti šių modelių bankroto tikimybes bėgant laikui, taip pat suformuluojamos pagrindinės teoremos, kurios remiasi rekursinių formulių principu. Šios teoremos taip pat pagrįstos praktiniais skaičiavimais, palyginant bankroto tikimybės pokyčius laike sezoniniame ir jungtiniame modeliuose, tariant, kad diskretaus laiko trijų žalų modelis yra pasiskirstęs pagal Puasono arba baigtinį diskretųjį skirstinį. Šis darbas taip pat yra bakalaurinio darbo tęsinys, kuriame nagrinėjome tik sezoninio trijų žalų diskretaus laiko rizikos modelį.

Raktiniai žodžiai : Rizikos modelis, sezoninis trijų žalų rizikos modelis, jungtinis trijų žalų rizikos modelis, baigtinio laiko bankroto tikimybė, begalinio laiko bankroto tikimybė, begalinio laiko išgyvenimo tikimybė, grynojo pelno sąlyga.

Seasonal and Multi-Risk Discrete Time Three-Risk Models

Abstract

In this paper it is analysed seasonal and multi-risk discrete-time risk models with non identically distributed claims for finite and infinite time. Main risk theory definitions and properties are introduced as well as formulation of main theorems that use principal of recursion to calculate finite-time and ultimate ruin probabilities for those two models. These theoretical results are also illustrated with practical calculations comparing results of seasonal and multi-risk models by assuming that three-risk claims are distributed by Poisson distribution or a finite discrete probability distribution. This paper is also a continuation of the bachelor's thesis in which it was analysed only three-seasonal discrete time risk model.

Key words : Risk model, seasonal three-risk model, multi-risk three-risk model, finite-time ruin probability, ultimate ruin probability, ultimate survival probability. net profit condition.

1 Įvadas

Rizikos teorija yra viena pagrindinių taikomosios tikimybių teorijos šakų, kurios nagrinėjamų matematinių modelių pagalba apskaičiuojama draudiko tikimybė bankrutuoti. Vieni plačiausiai naudojamų modelių - tai diskretaus laiko rizikos modeliai, kuriais remiantis yra nagrinėjamas draudiko turtas diskrečiais laiko momentais. Šie modeliai yra sukurti remiantis trimis parametrais: draudiko gaunamomis įmokomis, patiriamais nuostoliais ir pradiniu turtu. Draudiko patiriamus nuostolius vadinsime žalomis ir teigsime, kad jos yra viena nuo kitos nepriklausomos ir įgyjančios neneigiamas sveikąsias reikšmes. Diskretaus laiko rizikos modeliai gali būti kelių tipų - vienos, dviejų, trijų ar daugiau periodiškai pasikartojančių tam tikra tvarka žalų. Šiame darbe aprašysime ir palyginsime du modelius susidedančius iš trijų pasikartojančių žalų, kurios pasirodo pagal skirtingą struktūrą. Vienas jų susideda iš trijų periodiškai viena po kitos pasikartojančių žalų. Šių žalų pasikartojimą taip pat galime pavaizduoti grafiškai

$$\xrightarrow[X,Y,Z,X,Y,Z,...]{\hspace{6cm}} Laikas$$

Antrąjame modelyje teigiame, kad žala X pasirodo kiekvienu laiko momentu $t \in \{1, 2 \ldots\}$, žala Y papildomai pasirodo lyginiais laiko momentais $t \in \{2, 4, \ldots\}$, o žala Z papildomai pasirodo laiko momentais, kurie dalijasi iš trijų $t \in \{3, 6, \ldots\}$. Šis modelis grafiškai atrodytų taip

$$\xrightarrow[X,X+Y,X+Z,X+Y,X,X+Y+Z,...]{\hspace{6cm}} Laikas$$

Šiame darbe aprašomos jau minėtų dviejų skirtingų modelių savybės, apibrėžimai ir teoremos, kuriomis remiantis galime apskaičiuoti baigtinio ir begalinio laiko bankroto bei išgyvenimo tikimybes. Remiantis teoremomis 1 ir 4 galime apskaičiuoti atitinkamai begalinio laiko sezoninio ir jungtinio trijų žalų modelio bankroto tikimybes, o remiantis teoremomis 2 ir 5 galime apskaičiuoti atitinkamai baigtinio laiko sezoninio ir jungtinio trijų žalų modelio bankroto tikimybes. Šių teoremų pagrindimus skaičiavimais galime rasti 4 skyriuje, kuriame nagrinėjame ir palyginame bankroto tikimybių rezultatus šiems dviems skirtingiems diskretaus laiko rizikos modeliams. Šis darbas taip pat yra mano bakalaurinio darbo "Bankroto tikimybė trijų žalų diskretaus laiko rizikos modelyje" tęsinys, kuriame nagrinėjau tik sezoninį trijų žalų diskretaus laiko rizikos modelį.

2 Sezoninis trijų žalų rizikos modelis

2.1 Sąvokos ir apibrėžimai

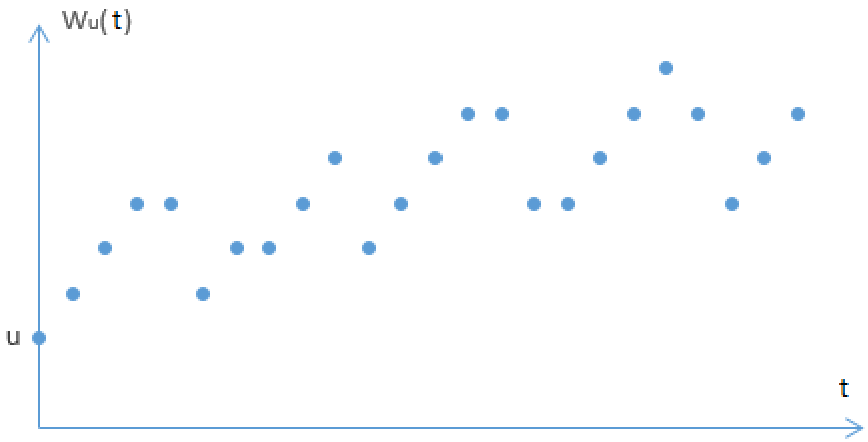
1 Apibrėžimas. Laikome, kad sezoninio diskretaus laiko rizikos modelyje draudiko turtas $W(t)$ nusakomas tokia lygybe

$$W(t) = u + n - \sum_{i=1}^{t} Z_i, \qquad u \in \mathbb{N}_0. \tag{1}$$

Čia

- $W(t)$ yra draudiko turtas laiko momentu t,
- Draudiko pradinis kapitalas $u = W(0) \in \mathbb{N}_0$,
- Žalos $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_t$ yra atsitiktinio dydžio Z nepriklausomos kopijos, o Z yra diskretus neneigiamas atsitiktinis dydis.

Iš apibrėžimo galime pastebėti, kad draudiko gaunamos įmokos per laiko vienetą yra lygios 1. Žinodami žalų pasiskirstymo funkciją ir draudiko pradinį turtą, su tam tikra tikimybe galime suskaičiuoti draudiko turtą pasirinktu laiko momentu t. Vieną šio modelio generuojamą trajektoriją galime matyti žemiau esančiame paveiksle



1 pav.: Draudiko turto kitimo trajektorija

Šioje iliustracijoje, kuri paimta iš šaltinio [2] matome, kad kiekvienu laiko momentu n, draudiko kapitalas gali padidėti, sumažėti arba nepasikeisti. Atveju, kai draudiko kapitalas tampa mažesniu arba lygiu nuliui, draudikas bankrutuoja.

2 Apibrėžimas. Pirmasis laiko momentas T_u, kai draudiko turtas $W_u(t)$ tampa neigiamu arba lygiu nuliui, vadinamas bankroto laiku, t.y.

$$T_u(x) = \begin{cases} \inf\{t \in \mathbb{N} : W_u(t) \leqslant 0\}, \\ \infty\,,\ jei\ W_t(n) > 0, \forall t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

3 Apibrėžimas. Begalinio laiko bankroto tikimybe vadiname draudiko tikimybę kada nors bankrutuoti su pradiniu turtu $u \in \mathbb{N}_0$. Ją apibrėžiame taip

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T_u < \infty) = \lim_{T\to\infty} \psi(u, T) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{t=1}^{\infty}\{W(t) \leqslant 0\}\Big).$$

4 Apibrėžimas. Baigtinio laiko bankroto tikimybe vadiname draudiko tikimybę bankrutuoti iki tam tikro laiko momento $T \in \mathbb{N}$, kai jo pradinis turtas yra lygus $u \in \mathbb{N}_0$. Ją apibrėžiame taip

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(T_u \leqslant T) = \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{t=1}^{T} \{W(t) \leqslant 0\}\bigg).$$

5 Apibrėžimas. Begalinio laiko išgyvenimo tikimybe vadiname draudiko tikimybę nebankrutuoti su pradiniu turtu $u \in \mathbb{N}_0$. Ją apibrėžiame taip

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u) = \mathbb{P}(T_u = \infty).$$

6 Apibrėžimas. Sakome, kad draudiko turtas yra nusakomas sezoninio trijų žalų X, Y ir Z generuojamu rizikos modeliu, jeigu jam galioja lygybė (1) ir šios trys sąlygos:

- Pradinis draudiko turtas $u \in \mathbb{N}_0$.
- Atsitiktinės žalos $Z_1, Z_2, Z_3, ...$ yra neneigiami sveikieji nepriklausomi skaičiai.
- Su kiekvienu $k \in \mathbb{N}_0$ turime: $Z_{3k+1} \stackrel{d}{=} Z_1$, $Z_{3k+2} \stackrel{d}{=} Z_2$, $Z_{3k+3} \stackrel{d}{=} Z_3$.

  Šiame žymėjime simbolis "d" virš lygybės reiškia, kad atsitiktinių dydžių pasiskirstymas yra vienodas.

Pažymėkime atsitiktinių dydžių sumą $S = Z_1 + Z_2 + Z_3$ ir lokaliąsias žalų Z_1, Z_2, Z_3 ir S tikimybes:

$a_k = \mathbb{P}(Z_1 = k)$, $\quad c_k = \mathbb{P}(Z_3 = k)$,
$b_k = \mathbb{P}(Z_2 = k)$, $\quad s_k = \mathbb{P}(S = k)$, $\quad k \in \mathbb{N}_0$.

Taip pat pažymėkime atsitiktinių dydžių Z_1, Z_2, Z_3 ir S pasiskirstymo funkcijas:

$A(x) = \sum_{k \leqslant x} a_k$, $\quad C(x) = \sum_{k \leqslant x} c_k$,
$B(x) = \sum_{k \leqslant x} b_k$, $\quad S(x) = \sum_{k \leqslant x} s_k$, $\quad x \geqslant 0$.

7 Apibrėžimas. Sakykime, kad yra patenkintos (1) formulės sąlygos, o žalų Z_1, Z_2, Z_3 skirstiniai turi baigtinį vidurkį. Tuomet sezoninio trijų žalų diskretaus laiko rizikos modelio sąlyga

$$\mathbb{E}Z_1 + \mathbb{E}Z_2 + \mathbb{E}Z_3 < 3$$

yra vadinama grynojo pelno sąlyga.
Remiantis pateiktais apibrėžimais, skyriuje 2.2 formuluosime teiginius.

2.2 Teoremų formulavimas

1 Teorema. Tarkime, kad sezoninio diskretaus laiko rizikos modelyje žalos $Z_1, Z_2, \ldots$, yra neneigiami nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Pažymėkime $h_k^{(j)} = \mathbb{P}(Z_{1+j} = k)$. Tuomet su kiekvienu $k \in \mathbb{Z}$, $j = 0, 1, \ldots$, ir $u \in \mathbb{N}_0$ šios formulės yra teisingos:

$$\psi^{(j)}(u, 1) = \sum_{k>u} h_k^{(j)},$$

$$\psi^{(j)}(u, T) = \psi^{(j)}(u, 1) + \sum_{k=0}^{u} \psi^{(j+1)}(u + 1 - k, T - 1) h_k^{(j)}.$$

Čia $T \in \{2, 3, 4, ...\}$.
Remiantis teoremos įrodymu galime padaryti išvadą, kad šios formulės galioja ir modeliui, kurį generuoja trys besikartojančios žalos. Šios teoremos įrodymą galime rasti šaltinyje [2].

2 Teorema. Tarkime sezoninį trijų žalų rizikos modelį generuoja nepriklausomos atsitiktinės žalos Z_1, Z_2, Z_3. Taip pat tarkime, kad $\mathbb{E}(S) < 3$. Tuomet šie teiginiai išgyvenimo tikimybės $\varphi(u) = 1 - \psi(u), \forall u \in \mathbb{N}_0$ skaičiavimui yra teisingi:

- $\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = 1$.
- Jei $s_0 \neq 0$, tai

$$\varphi(n) = \alpha_n \varphi(0) + \beta_n \varphi(1) + \gamma_n (3 - \mathbb{E}(S)), \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Čia

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{b_0 c_0}, \\ \alpha_n = \frac{1}{s_0}(\alpha_{n-3} - \sum_{k=1}^{n-1} s_k \alpha_{n-k} - a_{n-2}), \qquad n \geqslant 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = -\frac{c_1}{c_0} - \frac{1}{b_0}, \\ \beta_n = \frac{1}{s_0}(\beta_{n-3} - \sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_{n-k} - a_{n-2} c_0 + c_0 \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-1-k}), \qquad n \geqslant 3, \end{cases}$$

ir

$$\begin{cases} \gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{1}{b_0 c_0}, \\ \gamma_n = \frac{1}{s_0}(\gamma_{n-3} - \sum_{k=1}^{n-1} s_k \gamma_{n-k} + a_{n-2}), \qquad n \geqslant 3. \end{cases}$$

- Jei $a_0 = 0$ ir $b_0 \neq 0, c_0 \neq 0, a_1 \neq 0$, tai

$\varphi(0) = 0$,

$\varphi(n) = \beta_n^1 \varphi(1) + \gamma_n^1 (3 - \mathbb{E}(S)), \qquad n \in \mathbb{N}$.

Čia

$$\begin{cases} \beta_1^1 = \beta_1, \quad \beta_2^1 = \beta_2, \\ \beta_n^1 = \frac{1}{s_1}(\beta_{n-2}^1 - \sum_{k=2}^{n} s_k \beta_{n-k+1}^1 - a_{n-1} c_0 - c_0 \varphi(1) \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}), \qquad n \geqslant 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1^1 = \gamma_1, \quad \gamma_2^1 = \gamma_2, \\ \gamma_n^1 = \frac{1}{s_1}(\gamma_{n-2}^1 - \sum_{k=2}^{n} s_k \gamma_{n-k+1}^1 + a_{n-1}, \qquad n \geqslant 3. \end{cases}$$

- Jei $a_0 \neq 0, b_0 = 0, c_0 \neq 0, b_1 \neq 0$, tai

  $\varphi(n) = \alpha_n^2 \varphi(0) + \gamma_n^2 (3 - \mathbb{E}(S)), \qquad n \in \mathbb{N}.$

  Čia
$$\begin{cases} \alpha_1^2 = -\dfrac{1}{c_0}, \qquad \alpha_2^2 = \dfrac{c_1}{c_0^2} + \dfrac{1}{a_0 b_1 c_0}, \\ \alpha_n^2 = \frac{1}{s_1}(\alpha_{n-2}^2 - \sum_{k=2}^{n} s_k \alpha_{n-k+1}^2 - \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}), \qquad n \geqslant 3, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \gamma_1^2 = \dfrac{1}{c_0}, \qquad \gamma_2^2 = -\dfrac{c_1}{c_0^2}, \\ \gamma_n^2 = \frac{1}{s_1}(\gamma_{n-2}^2 - \sum_{k=2}^{n} s_k \gamma_{n-k+1}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}), \qquad n \geqslant 3. \end{cases}$$

- Jei $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, c_0 = 0, c_1 \neq 0$, tai

  $\varphi(n) = \alpha_n^3 \varphi(0) + \gamma_n^3 (3 - \mathbb{E}(S)), \qquad n \in \mathbb{N}.$

  Čia
$$\begin{cases} \alpha_0^3 = 1, \qquad \alpha_1^3 = -\dfrac{1}{b_0 c_1}, \\ \alpha_n^3 = \frac{1}{s_1}(\alpha_{n-2}^3 - \sum_{k=2}^{n} s_k \alpha_{n-k+1}^3 - \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}), \qquad n \geqslant 2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \gamma_0^3 = 0, \qquad \gamma_1^3 = \dfrac{1}{b_0 c_1}, \\ \gamma_n^3 = \frac{1}{s_1}(\gamma_{n-2}^3 - \sum_{k=2}^{n} s_k \gamma_{n-k+1}^3 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}), \qquad n \geqslant 2. \end{cases}$$

- Jei $a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 \neq 0$, tai

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(1) = \dfrac{3 - \mathbb{E}(S)}{c_0}, \end{cases}$$
$$\begin{aligned} \varphi(u+1) = \frac{1}{s_2}((1 - s_3)\varphi(u) \\ - \sum_{k=1}^{u-1} \varphi(k) s_{u+3-k} + c_0 \varphi(1) \sum_{k=0}^{u+2} a_k b_{u+2-k}), \qquad u \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3}$$

- Jei $a_0 = 0, b_0 \neq 0, c_0 = 0$, tai

$$\begin{cases} \varphi(0) = s_2 \varphi(1), \\ \varphi(1) = \dfrac{3 - \mathbb{E}(S)}{s_2 + b_0 c_1}, \end{cases}$$
$$\varphi(u+1) = \frac{1}{s_2}((1 - s_3)\varphi(u) - \sum_{k=1}^{u-1} \varphi(k) s_{u+3-k} + a_{u+1} b_0 c_1 \varphi(1)), \qquad u \in \mathbb{N}.$$

- Jei $a_0 \neq 0, b_0 = 0, c_0 = 0$, tai

$$\begin{cases} \varphi(0) = 3 - \mathbb{E}(S), \\ \varphi(1) = \dfrac{3 - \mathbb{E}(S)}{s_2}, \end{cases}$$
$$\varphi(u+1) = \frac{1}{s_2}((1 - s_3)\varphi(u) - \sum_{k=1}^{u-1} \varphi(k) s_{u+3-k}), \qquad u \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

- Jei $a_0 = a_1 = 0, b_0 \neq 0, c_0 \neq 0$, tai

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(1) = \dfrac{3 - \mathbb{E}(S)}{\frac{1}{a_2 + c_0}}, \end{cases}$$

  taip pat galioja rekursinė formulė (3).

- Jei $a_0 \neq 0, b_0 = b_1 = 0, c_0 \neq 0$, tai

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(1) = \dfrac{3 - \mathbb{E}(S)}{c_0}, \end{cases}$$

  taip pat galioja rekursinė formulė (3).

- Jei $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, c_0 = c_1 = 0$, tai

$$\begin{cases} \varphi(0) = 3 - \mathbb{E}(S), \\ \varphi(1) = \dfrac{3 - \mathbb{E}(S)}{s_2}, \end{cases}$$

  taip pat galioja rekursinė formulė (4).

Šios teoremos įrodymą galime rasti šaltinyje [2].

3 Jungtinis trijų žalų rizikos modelis

3.1 Sąvokos ir apibrėžimai

8 Apibrėžimas. Laikome, kad diskretaus laiko rizikos atstatymo modelyje draudiko turtas $W(n)$ nusakomas tokia lygybe

$$W(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{\Theta(t)} R_i, \qquad u \in \mathbb{N}_0. \tag{5}$$

Čia

- $W(t)$ yra draudiko turtas laiko momentu n;
- Draudiko pradinis kapitalas $u = W(0) \in \mathbb{N}_0$;
- $c > 0$ yra draudiko gaunamų įmokų greitis;
- $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots\}$ yra vienodai pasiskirstę, nepriklausomi, neneigiami ir neišsigimę taške 0 atsitiktiniai dydžiai;
- Žalos $R_1, R_2, R_3, \ldots$ yra atsitiktinio dydžio R nepriklausomos kopijos, o R yra diskretus neneigiamas atsitiktinis dydis;
- Sekos $\{R_1, R_2, R_3, \ldots\}$ ir $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots\}$ yra tarpusavyje nepriklausomos;
- $\Theta(t) = \#\{n \geqslant 1 : T_n \in [0, t]\}$ yra rizikos atstatymo procesas generuojamas atsitiktinio dydžio θ, kur $\forall n$
$$T_n = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_n.$$

Pažymėkime $j|i$, jei skaičius j dalinasi iš skaičiaus i ir laikykime, kad $c = 1$, $\theta \equiv 1$. Tuomet

$$R_i = X_i + Y_i \mathbb{1}_{\{2|i\}} + Z_i \mathbb{1}_{\{3|i\}}, i \in \mathbb{N}.$$

Šioje lygybėje $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ yra diskrečių nenegiamų atsitiktinių dydžių $\{X, Y, Z\}$ nepriklausomos kopijos. Remiantis šia lygybe, reiškinį (5) galime perrašyti taip

$$W(t) = u + t - \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} R_i = u + t - \sum_{i=1}^{\lfloor t \rfloor} X_i - \sum_{j=1}^{\lfloor t/2 \rfloor} Y_j - \sum_{k=1}^{\lfloor t/3 \rfloor} Z_k.$$

Norint apskaičiuoti bankroto tikimybę jungtiniame trijų žalų diskretaus laiko rizikos atstatymo modelyje mums reikės įdėti šiek tiek daugiau pastangų nei sezoniniame diskretaus laiko rizikos modelyje, tad pradėkime apsibrėždami tikimybių pasiskirstymo funkcijas atsitiktinių dydžių sąsūkoms. Pažymėkime:

$$\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_i + Y_1 + \ldots + Y_j + Z_1 + \ldots + Z_k = m) =: a^i * b^j * c^k(m),$$

$$\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_i + Y_1 + \ldots + Y_j + Z_1 + \ldots + Z_k \leqslant m) =: A^i * B^j * C^k(m),$$

kur $i = \overline{0, 6}, j = \overline{0, 3}, k = \overline{0, 2}$ ir $m \in \mathbb{N}_0$.

- Jei i, j arba k yra lygus nuliui, tuomet atitinkamas atsitiktinis dydis nėra įtraukiamas į sąsūką.
- Taip pat naudosime tokius žymėjimus:
$\overline{a^i * b^j * c^k(m)} = 1 - a^i * b^j * c^k(m)$, $\overline{A^i * B^j * C^k(m)} = 1 - A^i * B^j * C^k(m)$.

9 Apibrėžimas. Trijų žalų diskretaus laiko jungtiniame rizikos atstatymo modelyje grynojo pelno sąlyga aprašoma šiek tiek kitaip

$$\mathbb{E}X + \frac{\mathbb{E}Y}{2} + \frac{\mathbb{E}Z}{3} < 1. \tag{6}$$

Darant prielaidą, kad i yra tolygiai pasiskirstęs, grynojo pelno sąlyga gali būti gauta tokiu būdu

$$\mathbb{E}R_i = \mathbb{E}(\mathbb{E}(R_i|i)) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(X_i + Y_i\mathbb{1}_{\{2|i\}} + Z_i\mathbb{1}_{\{3|i\}}|i\Big)\Big) = \mathbb{E}X + \frac{\mathbb{E}Y}{2} + \frac{\mathbb{E}Z}{3},$$

čia $\mathbb{E}(R_i|i)$ žymi sąlyginį vidurkį. Grynojo pelno sąlyga gaunama palyginus šį reikškinį su įmokų surinkimo greičiu $c = 1$ per vieną laiko momentą.

Jungtiniame diskretaus laiko trijų žalų rizikos modelyje taip pat yra mažesnis galimų skirstinių tenkinančių grynojo pelno sąlyga skaičius nei sezoniniame trijų žalų rizikos modelyje. Tarkime, kad turime tris žalas X, Y ir Z, pasiskirsčiusias pagal generuojamą trijų žalų diskretaus laiko rizikos modelį. Suskaičiuosime kiek atsitiktinių dydžių kombinacijų tenkina sezoninio trijų žalų rizikos modelio grynojo pelno sąlygą $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y + \mathbb{E}Z < 3$ ir jungtinio trijų žalų rizikos modelio grynojo pelno sąlygą $\mathbb{E}X + \frac{\mathbb{E}Y}{2} + \frac{\mathbb{E}Z}{3} < 1$. Visas galimas atsitiktinių dydžių kombinacijas, kurios tenkintų sezoninio trijų žalų modelio nelygybę galime rasti lentelėje (1), o kombinacijas, kurios tenkintų jungtinio trijų žalų modelio nelygybę galime rasti lentelėje (2).

1 lentelė: Galimos sezoninio trijų žalų modelio atsitiktinių dydžių kombinacijos

X	Y	Z
0	0	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1
2	0	0
0	2	0
0	0	2

2 lentelė: Galimos jungtinio trijų žalų modelio atsitiktinių dydžių kombinacijos

X	Y	Z
0	0	0
0	1	0
0	0	1
0	1	1
0	0	2

Remiantis lentelėmis (1) ir (2), o taip pat pabandžius atlikti identiškus skaičiavimus keturių ar penkių žalų rizikos modeliams galime daryti išvadą, kad sezoniniame rizikos modelyje galimų kombinacijų skaičius visada yra didesnis nei jugtiniame riziikos modelyje. Lentelėje (3) galime matyti koks yra galimas kombinacijų skaičius sezoniniame ir jungtiniame rizikos modeliuose su tam tikru nepriklausomų žalų skaičiumi n.

3 lentelė: Galimos atsitiktinių dydžių kombinacijos

n	Sezoninio modelio kombinacijos	Jungtinio modelio kombinacijos
1	1	1
2	3	2
3	10	5
4	35	12
5	126	31
6	462	73
7	1716	185

Lentelėje (3) galimas atsitiktinių dydžių kombinacijų skaičius tenkinantis grynojo pelno sąlygas yra apskaičiuotas taikant tokį patį principą kaip ir lentelėse (1) ir (2).

Pažymėkime $I_n^m := \cap_{t=n}^m \{W(t) > 0\}$. Begalinio laiko išgyvenimo tikimybės formulė diskretaus laiko jungtiniame modelyje atrodytų taip

$$1 - \psi(u) = \varphi(u) = \mathbb{P}(I_1^\infty) = \mathbb{P}(I_1^6, I_7^\infty) = \mathbb{P}(I_7^\infty | I_1^6)\mathbb{P}(I_1^6).$$

Kadangi mūsų trijų žalų jungtiniame modelyje $R_i \stackrel{d}{=} R_{i+6}$ su $\forall i = 1, 2, \ldots$, tuomet

$$\mathbb{P}(I_7^\infty) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{t=7}^{\infty} \Big\{u + t - \sum_{i=1}^{6} R_i - \sum_{i=7}^{t} R_i > 0\Big\}\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{t=1}^{\infty} \Big\{u + 6 + t - \sum_{i=1}^{6} R_i - \sum_{i=1}^{t} R_i > 0\Big\}\Big),$$

ir išgyvenimo tikimybės formulė atrodo taip

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \mathbb{P}(I_7^\infty | I_1^6)\mathbb{P}(I_1^6) \\ &= \sum_{\substack{i_1 \leqslant u \\ i_2 \leqslant u+1-i_1 \\ i_3 \leqslant u+2-i_1-i_2 \\ i_4 \leqslant u+3-i_1-i_2-i_3 \\ i_5 \leqslant u+4-i_1-i_2-i_3-i_4 \\ i_6 \leqslant u+5-i_1-i_2-i_3-i_4-i_5}} a_{i_1} \cdot a * b_{i_2} \cdot a * c_{i_3} \cdot a * b_{i_4} \cdot a_{i_5} \cdot a * b * c_{i_6} \varphi(u + 6 - i_1 - \ldots - i_6). \end{aligned} \tag{7}$$

Formulė (7) parodo, kad išgyvenimo tikimybės yra rekursiškai susijusios, tad norint rasti, pavyzdžiui, $\varphi(u + 6)$, $\forall u = 0, 1, \ldots$, mes turime būti suskaičiavę $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(u + 5)$. Papildant ir atimant narius iš praeitos sumos, ją galime pertvarkyti į tokį reiškinį:

$$
\begin{aligned}
\varphi(u) &= \sum_{k=0}^{u+5} a^6 * b^3 * c^2(u+5-k)\varphi(k+1) \\
&- \sum_{k=0}^{4} \varphi(k+1) \sum_{j=1}^{5-k} a_{u+j} \cdot a^5 * b^3 * c^2(5-k-j) \\
&- \sum_{k=0}^{3} \varphi(k+1) \sum_{j=2}^{5-k} \sum_{i_1 \leqslant u} a_{i_1} \cdot a * b_{u+j-i_1} \cdot a^4 * b^2 * c^2(5-k-j) \\
&- \sum_{k=0}^{2} \varphi(k+1) \sum_{j=3}^{5-k} \sum_{\substack{i_1 \leqslant u \\ i_2 \leqslant u+1-i_1}} a_{i_1} \cdot a * b_{i_2} \cdot a * c_{u+j-i_1-i_2} \cdot a^3 * b^2 * c(5-k-j) \\
&- \sum_{k=0}^{1} \varphi(k+1) \sum_{j=4}^{5-k} \sum_{\substack{i_1 \leqslant u \\ i_2 \leqslant u+1-i_1 \\ i_3 \leqslant u+2-i_1-i_2}} a_{i_1} \cdot a * b_{i_2} \cdot a * c_{i_3} \cdot a * b_{u+j-i_1-i_2-i_3} \cdot a^2 * b * c(5-k-j) \\
&- \varphi(1) a * b * c(0) \sum_{\substack{i_1 \leqslant u \\ i_2 \leqslant u+1-i_1 \\ i_3 \leqslant u+2-i_1-i_2 \\ i_4 \leqslant u+3-i_1-i_2-i_3}} a_{i_1} \cdot a * b_{i_2} \cdot a * c_{i_3} \cdot a * b_{i_4} \cdot a_{u+5-i_1-i_2-i_3-i_4} \\
&=: \sum_{k=0}^{u+5} a^6 * b^3 * c^2(u+5-k)\varphi(k+1) - \sum_{k=1}^{5} S_k(u),
\end{aligned}
$$

čia $S_1(u), \ldots, S_5(u)$ žymi prieš tai ta pačia išsidėstymo tvarka aprašytas sumas. Surinkus koeficientus $\varphi(1), \ldots, \varphi(5)$ prie reiškinių $S_1(u), \ldots, S_5(u)$ gauname, kad

$$
\varphi(u) = \sum_{k=0}^{u+5} a^6 * b^3 * c^2(u+5-k)\varphi(k+1) - \sum_{k=1}^{5} z_k(u)\varphi(k),
$$

čia

$$
\begin{aligned}
z_k(u) = \sum_{i=1}^{6-k} \sum_{j=i}^{6-k} \sum_{\cap_{l=1}^{i} I_{l,i}} & a_{k_1}^{\lfloor (4+i)/5 \rfloor} (a * b_{k_2})^{\lfloor (3+i)/5 \rfloor} (a * c_{k_3})^{\lfloor (2+i)/5 \rfloor} (a * b_{k_4})^{\lfloor (1+i)/5 \rfloor} a_{k_5}^{\lfloor i/5 \rfloor} \\
& \times a^{6-i} * b^{3-\lfloor i/2 \rfloor} * c^{2-\lfloor i/3 \rfloor}(6-j-k),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

čia $I_{l,i}$ aprašomas kaip tokia sumavimo aibė

$$
I_{l,i} = \left\{ k_l; 0; u+l-1-\sum_{m=1}^{l-1} k_m \right\} \mathbb{1}_{\{5|4+i-l\}} \bigcup \left\{ k_l; u+j-\sum_{m=1}^{l-1} k_m; u+j-\sum_{m=1}^{l-1} k_m \right\} \mathbb{1}_{\{5|5+l-i\}}.
$$

Čia mes laikome, kad $\sum_{m=1}^{0} k_m =: 0$, o sumavimo aibės yra aprašomos štai tokia tvarka: { sumuojamas atsitiktinis dydis; sumavimo pradžia; sumavimo pabaiga }.
Remiantis formule (8) užrašysime funkcijas $z_5(u)$ ir $z_4(u)$.

$$
\begin{aligned}
z_5(u) &= a_{u+1} \cdot a^5 * b^3 * c^2(0), \\
z_4(u) &= \sum_{j=1}^{2} a_{u+j} \cdot a^5 * b^3 * c^2(2-j) + \sum_{j=2}^{2} \sum_{i_1 \leqslant u} a_{i_1} \cdot a * b_{u+j-i_1} \cdot a^4 * b^2 * c^2(2-j).
\end{aligned}
$$

Likusios funkcijos $z_3(u)$, $z_2(u)$ ir $z_1(u)$ tampa vis sudėtingesnės, tačiau jas taip pat galima aprašyti tokiu pačiu principu naudojant formulę (8).

Norint rasti pradines išgyvenimo tikimybių reikšmes $\varphi(0), \ldots, \varphi(4)$, kai $\{a(0) \neq 0, b(0) \neq 0, c(0) \neq 0\}$, mums reikia apsibrėžti papildomų kintamųjų, kurie padės skaičiavimuose. Pažymėkime šešias rekurentines sekas $\beta_n^0, \beta_n^1, \beta_n^2, \beta_n^3, \beta_n^4, \gamma_n$, $n \in \{0, \ldots, 5\}$. Šios reikšmės pavaizduotos lentelėje 4.

4 lentelė: Pradinės $\beta_n^0, \beta_n^1, \beta_n^2, \beta_n^3, \beta_n^4, \gamma_n$ reikšmės

n	β_n^0	β_n^1	β_n^2	β_n^3	β_n^4	γ_n
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	$-\frac{1}{a^5 * b^3 * c^2(0)}$	$-\frac{\hat{z_1}}{a^5 * b^3 * c^2(0)}$	$-\frac{\hat{z_2}}{a^5 * b^3 * c^2(0)}$	$-\frac{\hat{z_3}}{a^5 * b^3 * c^2(0)}$	$-\frac{\hat{z_4}}{a^5 * b^3 * c^2(0)}$	$\frac{1}{a^5 * b^3 * c^2(0)}$

Atvejams, kai $n \geqslant 6$, apibrėžiame

$$\beta_n^0 = \frac{1}{a^6 * b^3 * c^2(0)}\Big(\beta_{n-6}^0 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6 * b^3 * c^2(k)\beta_{n-k}^0 - a(n-5)\Big),$$
$$\beta_n^1 = \frac{1}{a^6 * b^3 * c^2(0)}\Big(\beta_{n-6}^1 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6 * b^3 * c^2(k)\beta_{n-k}^1 + z_1(n-6) - a(n-5)\hat{z_1}\Big),$$
$$\beta_n^2 = \frac{1}{a^6 * b^3 * c^2(0)}\Big(\beta_{n-6}^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6 * b^3 * c^2(k)\beta_{n-k}^2 + z_2(n-6) - a(n-5)\hat{z_2}\Big),$$
$$\beta_n^3 = \frac{1}{a^6 * b^3 * c^2(0)}\Big(\beta_{n-6}^3 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6 * b^3 * c^2(k)\beta_{n-k}^3 + z_3(n-6) - a(n-5)\hat{z_3}\Big),$$
$$\beta_n^4 = \frac{1}{a^6 * b^3 * c^2(0)}\Big(\beta_{n-6}^4 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6 * b^3 * c^2(k)\beta_{n-k}^4 + z_4(n-6) - a(n-5)\hat{z_4}\Big),$$
$$\gamma_n = \frac{1}{a^6 * b^3 * c^2(0)}\Big(\gamma_{n-6} - \sum_{k=1}^{n-1} a^6 * b^3 * c^2(k)\gamma_{n-k} + a(n-5)\Big),$$

čia koeficientai $z_1(n-6), z_2(n-6), z_3(n-6), z_4(n-6)$ yra aprašyti formulėje 8, o $a(n-5) = z_5(n-6)/\hat{z_5}$, kai koeficientai $\hat{z_5}, \ldots, \hat{z_1}$ yra apskaičiuojami iš štai tokių formulių

$$\hat{z_5} = a^5 * b^3 * c^2(0), \tag{9}$$

$$\hat{z_4} = A^6 * B^3 * C^2(1) + \overline{A}(0) \cdot a^5 * b^3 * c^2(1) + \overline{A}(1) \cdot a^5 * b^3 * c^2(0)$$
$$+ \overline{A * B}(1) \cdot a^4 * b^2 * c^2(0), \tag{10}$$

$$\hat{z_3} = A^6 * B^3 * C^2(2) + \sum_{i_1=1}^{3} \overline{A}(i_1 - 1) \cdot a^5 * b^3 * c^2(3 - i_1)$$
$$+ \sum_{i_2=2}^{3} \overline{A * B}(i_2 - 1) \cdot a^4 * b^2 * c^2(3 - i_2) + a^3 * b^2 * c(0)$$
$$\cdot (\overline{A * C}(2) + \overline{A * B}(0) \cdot a * c(2)), \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{z_2} = {} & A^6 * B^3 * C^2(3) + \sum_{i_1=1}^{4} \overline{A}(i_1 - 1) \cdot a^5 * b^3 * c^2(4 - i_1) \\
& + \sum_{i_2=2}^{4} \overline{A * B}(i_2 - 1) \cdot a^4 * b^2 * c^2(4 - i_2) \\
& + \sum_{i_3=3}^{4} a^3 * b^2 * c(4 - i_3)(\overline{A * C}(i_3 - 1) + \overline{A * B}(0) \cdot a * c(i_3 - 1)) \\
& + a^4 * b^2 * c^2(0) \cdot \overline{A * B}(3) + a^3 * b^2 * c(0)(a * c(1) \cdot \overline{A * B}(2) \\
& + \overline{A * B}(1) \cdot \overline{A * C}(1)) + a^2 * b * c(0) \\
& \cdot \overline{A * B}(0)(a * c(0) \cdot \overline{A * B}(2) + \overline{A * C}(0) \cdot \overline{A * B}(1)),
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{z_1} = {} & A^6 * B^3 * C^2(4) + \sum_{i_1=1}^{5} \overline{A}(i_1 - 1) \cdot a^5 * b^3 * c^2(5 - i_1) \\
& + \sum_{i_2=2}^{5} \overline{A * B}(i_2 - 1) \cdot a^4 * b^2 * c^2(5 - i_2) \\
& + \sum_{i_3=3}^{5} a^3 * b^2 * c(5 - i_3)(\overline{A * C}(i_3 - 1) + \overline{A * B}(0) \cdot a * c(i_3 - 1)) \\
& + a^2 * b * c(0) \sum_{i_4=4}^{5} \overline{A * B}(i_4 - 1) \cdot a^2 * b * c(5 - i_4) \\
& + a * b(0) \cdot a * c(1) \sum_{i_4=4}^{5} \overline{A * B}(i_4 - 2) \cdot a^2 * b * c(5 - i_4) \\
& + a * b(0)\overline{A * C}(1) \sum_{i_4=4}^{5} \overline{A * B}(i_4 - 3) \cdot a^2 * b * c(5 - i_4) \\
& + \overline{A * B}(0) \cdot \overline{A * C}(0) \sum_{i_4=4}^{5} \overline{A * B}(i_4 - 3) \cdot a^2 * b * c(5 - i_4) \\
& + a * c(0) \cdot \overline{A * B}(0) \sum_{i_4=4}^{5} \overline{A * B}(i_4 - 2) \cdot a^2 * b * c(5 - i_4) \\
& + a * b * c(0) \sum_{k=0}^{2} \overline{A}(4 - k) \cdot a^4 * b^2 * c(k) + a * b * c(0) \cdot \overline{A^4 * B^2 * C}(2) \cdot \overline{A}(1) \\
& - a^4 * b^3 * c(0) \cdot a_2 \cdot \overline{A * C}(2) - a^2 * b^2 * c(0) \cdot a_2 \cdot \overline{A^2 * B}(0) \cdot \overline{A * C}(1) \\
& + a^3 * b^3 * c(0) \cdot a_2 \cdot a * c_2 \cdot \overline{A}(0) - a * b * c(0) \\
& \cdot \sum_{i_2=0}^{1} \sum_{k=0}^{1-i_2} a^2 * b * c(k) \cdot a_{3-i_2-k} \cdot \overline{A * B}(i_2 + 1) \\
& - a * b * c(0) \sum_{i_1=0}^{2} \sum_{k=0}^{2-i_1} a^3 * b^2 * c(k) \cdot a_{4-i_1-k} \cdot \overline{A}(i_1).
\end{aligned} \tag{13}
$$

3.2 Teoremų formulavimas

3 Teorema. Tarkime trijų žalų diskretaus laiko rizikos modelį generuoja atsitiktiniai dydžiai X, Y ir Z. Jei $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y/2 + \mathbb{E}Z/3 < 1$, tuomet

$$\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = 1. \tag{14}$$

Šios teoremos įrodymą galime rasti šaltinyje [1].

4 Teorema. Tarkime trijų žalų diskretaus laiko rizikos modelį generuoja atsitiktiniai dydžiai X, Y ir Z. Jei $\{a(0) \neq 0, b(0) \neq 0, c(0) \neq 0\}$ ir yra tenkinama grynojo pelno sąlyga aprašyta formulėje (6), tuomet ši lygčių sistema yra teisinga $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{pmatrix} \beta^0_{n+1}-\beta^0_n & \beta^1_{n+1}-\beta^1_n & \beta^2_{n+1}-\beta^2_n & \beta^3_{n+1}-\beta^3_n & \beta^4_{n+1}-\beta^4_n \\ \beta^0_{n+2}-\beta^0_n & \beta^1_{n+2}-\beta^1_n & \beta^2_{n+2}-\beta^2_n & \beta^3_{n+2}-\beta^3_n & \beta^4_{n+2}-\beta^4_n \\ \beta^0_{n+3}-\beta^0_n & \beta^1_{n+3}-\beta^1_n & \beta^2_{n+3}-\beta^2_n & \beta^3_{n+3}-\beta^3_n & \beta^4_{n+3}-\beta^4_n \\ \beta^0_{n+4}-\beta^0_n & \beta^1_{n+4}-\beta^1_n & \beta^2_{n+4}-\beta^2_n & \beta^3_{n+4}-\beta^3_n & \beta^4_{n+4}-\beta^4_n \\ \beta^0_{n+5}-\beta^0_n & \beta^1_{n+5}-\beta^1_n & \beta^2_{n+5}-\beta^2_n & \beta^3_{n+5}-\beta^3_n & \beta^4_{n+5}-\beta^4_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \varphi(3) \\ \varphi(4) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \gamma_{n+1}-\gamma_n \\ \gamma_{n+2}-\gamma_n \\ \gamma_{n+3}-\gamma_n \\ \gamma_{n+4}-\gamma_n \\ \gamma_{n+5}-\gamma_n \end{pmatrix} \times (6 - 6\mathbb{E}X - 3\mathbb{E}Y - 2\mathbb{E}Z) = \begin{pmatrix} \varphi(n+1)-\varphi(n) \\ \varphi(n+2)-\varphi(n) \\ \varphi(n+3)-\varphi(n) \\ \varphi(n+4)-\varphi(n) \\ \varphi(n+5)-\varphi(n) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Jeigu šios teoremos visos sąlygos yra patenkintos, tuomet tikimybės $\varphi(0), \ldots, \varphi(4)$ tenkina lygčių sistemą (15) $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Be to,

$$\varphi(5) = \frac{6 - 6\mathbb{E}X - 3\mathbb{E}Y - 2\mathbb{E}Z - \varphi(0) - \hat{z_1}\varphi(1) - \hat{z_2}\varphi(2) - \hat{z_3}\varphi(3) - \hat{z_4}\varphi(4)}{a^5 * b^3 * c^2(0)}, \tag{16}$$

$$\varphi(u) = \frac{\varphi(u-6) - \sum_{k=1}^{u-1} a^6 * b^3 * c^2(u-k)\varphi(k) + \sum_{k=1}^{5} z_k(u-6)\varphi(k)}{a^6 * b^3 * c^2(0)}, \tag{17}$$

čia $u \geqslant 6$, o kintamieji $z_k(u-6)$ ir $\hat{z_k}$ yra aprašyti formulėse (8) ir (9)-(13).

Šios teoremos įrodymą galime rasti šaltinyje [1].

5 Teorema. Tarkime trijų žalų diskretaus laiko rizikos modelį generuoja atsitiktiniai dydžiai X, Y ir Z. Tuomet $\forall u \in \mathbb{N}_0$ šios formulės yra teisingos

$$
\begin{aligned}
\varphi(u,1) &= \sum_{i_1 \leqslant u} a_{i_1}, \\
\varphi(u,2) &= \sum_{\substack{i_1 \leqslant u \\ i_2 \leqslant u+1-i_1}} a_{i_1} \cdot a * b_{i_2}, \\
\varphi(u,3) &= \sum_{\substack{i_1 \leqslant u \\ i_2 \leqslant u+1-i_1 \\ i_3 \leqslant u+2-i_1-i_2}} a_{i_1} \cdot a * b_{i_2} \cdot a * c_{i_3}, \\
\varphi(u,4) &= \sum_{\substack{i_1 \leqslant u \\ i_2 \leqslant u+1-i_1 \\ i_3 \leqslant u+2-i_1-i_2 \\ i_4 \leqslant u+3-i_1-i_2-i_3}} a_{i_1} \cdot a * b_{i_2} \cdot a * c_{i_3} \cdot a * b_{i_4}, \\
\varphi(u,5) &= \sum_{\substack{i_1 \leqslant u \\ i_2 \leqslant u+1-i_1 \\ i_3 \leqslant u+2-i_1-i_2 \\ i_4 \leqslant u+3-i_1-i_2-i_3 \\ i_5 \leqslant u+4-i_1-i_2-i_3-i_4}} a_{i_1} \cdot a * b_{i_2} \cdot a * c_{i_3} \cdot a * b_{i_4} \cdot a_{i_5}, \\
\varphi(u,6) &= \sum_{\substack{i_1 \leqslant u \\ i_2 \leqslant u+1-i_1 \\ i_3 \leqslant u+2-i_1-i_2 \\ i_4 \leqslant u+3-i_1-i_2-i_3 \\ i_5 \leqslant u+4-i_1-i_2-i_3-i_4 \\ i_6 \leqslant u+5-i_1-i_2-i_3-i_4-i_5}} a_{i_1} \cdot a * b_{i_2} \cdot a * c_{i_3} \cdot a * b_{i_4} \cdot a_{i_5} \cdot a * b * c_{i_6}, \\
\varphi(u,T) &= \sum_{\substack{i_1 \leqslant u \\ i_2 \leqslant u+1-i_1 \\ i_3 \leqslant u+2-i_1-i_2 \\ i_4 \leqslant u+3-i_1-i_2-i_3 \\ i_5 \leqslant u+4-i_1-i_2-i_3-i_4 \\ i_6 \leqslant u+5-i_1-i_2-i_3-i_4-i_5}} a_{i_1} \cdot a * b_{i_2} \cdot a * c_{i_3} \cdot a * b_{i_4} \cdot a_{i_5} \cdot a * b * c_{i_6} \varphi(u+6-i_1-\ldots-i_6, T-6).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Paskutinė lygybė galioja, kai $T \geqslant 7$.

Šios teoremos įrodymą galime rasti šaltinyje [3].

4 Praktiniai pavyzdžiai

Šiame skyriuje pristatysime bankroto tikimybės skaičiavimo pavyzdžius remiantis teoremomis 1-5, o taip pat pabandysime palyginti gautus rezultatus tarp sezoninio ir jungtinio rizikos modelių naudojant identiškus skirstinius. Formulės taikomos trijų žalų rizikos modeliui, skaičiuojant bankroto tikimybes baigtiniame ir begaliniame laike. Skaičiavimai atlikti naudojant kompiuterinio modeliavimo programą R, o lentelėse 3-6 pateiktos sezoninio ir jungtinio trijų žalų modelių bankroto tikimybės suapvalintos iki tūkstantųjų dalių.

1 pavyzdys. Nagrinėsime trijų žalų X, Y ir Z, pasiskirsčiusių pagal

X	0	1	2
$\mathbb{P}$	0,8	0,1	0,1

Y	0	1	2
$\mathbb{P}$	0,7	0,2	0,1

Z	0	1	2
$\mathbb{P}$	0,3	0,3	0,4

generuojamą sezoninį trijų žalų diskretaus laiko rizikos modelį bankroto tikimybes.

Sezoniniame modelyje baigtinio laiko bankroto tikimybės apskaičiuojamos pagal teoremoje 1 aprašytas rekursines formules su draudiko pradiniu turtu $u \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ ir laiko momentu $T \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Begalinio laiko bankroto tikimybės apskaičiuotos remiantis teoremoje 2 aprašytomis rekursinėmis formulėmis su draudiko pradiniu turtu $u \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$. Šiuose skaičiavimuose $s_0 = \mathbb{P}(S = 0) \neq 0$, $\mathbb{E}(S) = 1.8 < 3$. Tai reiškia, kad yra tenkinama grynojo pelno sąlyga. Remiantis teoremoje 2 suformuluota sąlyga, kad $\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = 1$, mes pasirenkame pakankamai didelį pradinį draudiko turtą u su kuriuo $\varphi(u)$ riba, kai $n \to \infty$, būtų lygi 1.
Remiantis teoremoje 2 aprašyta formule (2), iš sudarytos lygčių sistemos galime išskaičiuoti $\varphi(0)$ ir $\varphi(1)$

$$\begin{cases} \varphi(100) = \alpha_{100}\varphi(0) + \beta_{100}\varphi(1) + (3 - \mathbb{E}(S))\gamma_{100}, \\ \varphi(101) = \alpha_{101}\varphi(0) + \beta_{101}\varphi(1) + (3 - \mathbb{E}(S))\gamma_{101}. \end{cases}$$

Šiuo atveju laikome, kad tikimybės $\varphi(100)$ ir $\varphi(101)$ lygios 1. Turėdami $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{101}\}$, $\{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{101}\}$ ir $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{101}\}$ reikšmes, galime nesunkiai rasti tikimybes $\varphi(0)$ ir $\varphi(1)$. Likusias tikimybes $\varphi(2), \varphi(3), \ldots, \varphi(10)$ galime rasti pasinaudojant formule (2). Belieka pritaikyti apibrėžimą, kad $\psi(u) = 1 - \varphi(u)$ ir apskaičiuoti bankroto tikimybes su pradiniu draudiko turtu $u \in \{2, 3, \ldots, 10\}$ pagal teoremą 2.

Jungtiniame trijų žalų diskretaus laiko rizikos modelyje begalinio laiko pradinės bankroto tikimybių reikšmės yra išvestos iš teoremoje 4 aprašytos lygčių sistemos (15), o likusios reikšmės apskaičiuotos naudojantis išvestomis formulėmis (16) ir (17), kai $u \geqslant 5$. Remiantis formule (14) mes galime laikyti, kad $\varphi(u) = 1$ su pakankamai dideliu u. Baigtinio laiko tikimybės apskaičiuotos naudojantis (18) aprašytomis formulėmis. Šiame pavyzdyje jungtinio rizikos modelio grynojo pelno sąlyga taip pat yra tenkinama, t.y. $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y/2 + \mathbb{E}Z/3 \approx 0.867 < 1$, o taip pat $\{a(0) \neq 0, b(0) \neq 0, c(0) \neq 0\}$, tad galime atlikti skaičiavimus, kurių rezultatai pateikti lentelėse (5) ir (6).

5 lentelė: Diskretaus sezoninio modelio bankroto tikimybės

T \ u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.200	0.100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.280	0.110	0.010	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0.344	0.150	0.022	0.004	0	0	0	0	0	0	0
4	0.371	0.162	0.030	0.006	0	0	0	0	0	0	0
5	0.376	0.167	0.032	0.006	0.001	0	0	0	0	0	0
6	0.390	0.176	0.038	0.009	0.001	0	0	0	0	0	0
7	0.395	0.181	0.041	0.010	0.002	0	0	0	0	0	0
8	0.397	0.182	0.042	0.010	0.002	0	0	0	0	0	0
9	0.402	0.186	0.045	0.011	0.002	0	0	0	0	0	0
10	0.404	0.188	0.046	0.012	0.002	0	0	0	0	0	0
$\vdots$											
∞	0.410	0.194	0.051	0.015	0.004	0.001	0	0	0	0	0

6 lentelė: Diskretaus jungtinio modelio bankroto tikimybės

T \ u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.200	0.100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.368	0.153	0.033	0.005	0.001	0	0	0	0	0	0
3	0.507	0.275	0.098	0.034	0.009	0.002	0	0	0	0	0
4	0.561	0.323	0.136	0.054	0.018	0.005	0.001	0	0	0	0
5	0.569	0.332	0.144	0.058	0.020	0.006	0.001	0	0	0	0
6	0.627	0.399	0.206	0.101	0.044	0.017	0.006	0.002	0.001	0	0
7	0.634	0.408	0.215	0.107	0.048	0.019	0.007	0.002	0.001	0	0
8	0.642	0.418	0.225	0.115	0.053	0.022	0.009	0.003	0.001	0	0
9	0.661	0.443	0.251	0.136	0.067	0.031	0.013	0.005	0.002	0.001	0
10	0.671	0.457	0.266	0.148	0.076	0.037	0.017	0.007	0.003	0.001	0
20	0.720	0.529	0.348	0.225	0.139	0.083	0.049	0.029	0.020	0.016	0.014
30	0.742	0.564	0.392	0.270	0.182	0.122	0.083	0.063	0.048	0.034	0.023
40	0.754	0.584	0.421	0.306	0.225	0.173	0.133	0.091	0.064	0.047	0.031
50	0.770	0.612	0.460	0.341	0.255	0.189	0.144	0.102	0.075	0.056	0.039
$\vdots$											
∞	0.778	0.621	0.467	0.353	0.265	0.198	0.148	0.111	0.083	0.062	0.046

2 pavyzdys. Antru atveju nagrinėsime trijų žalų X, Y ir Z pasiskirsčiusių pagal Puasono dėsnį $\mathbb{P}(Z = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, \ldots$ bankroto tikimybes. Šiame pavyzdyje laikome, kad žalos pasiskirsčiusios su tokiais parametrais: $X \sim P(0,4)$, $Y \sim P(0,7)$, $Z \sim P(0,5)$. Lentelėje (7) pateiktos sezoninio, o (8) jungtinio modelio baigtinio laiko bankroto tikimybės su pradiniu draudiko turtu $u \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ ir laiko momentu $T \in \{1, 2, \ldots, 50\}$, o taip pat ir begalinio laiko bankroto tikimybės su turtu $u \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$. Skaičiavimai atlikti remiantis tokiu pačiu principu kaip ir pirmąjame pavyzdyje.

7 lentelė: Puasono sezoninio modelio bankroto tikimybės

T \ u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.330	0.062	0.008	0.001	0	0	0	0	0	0	0
2	0.434	0.126	0.029	0.006	0.001	0	0	0	0	0	0
3	0.460	0.148	0.039	0.009	0.002	0	0	0	0	0	0
4	0.468	0.155	0.043	0.011	0.002	0	0	0	0	0	0
5	0.480	0.168	0.050	0.014	0.003	0.001	0	0	0	0	0
6	0.485	0.173	0.054	0.015	0.004	0.001	0	0	0	0	0
7	0.487	0.175	0.055	0.016	0.004	0.001	0	0	0	0	0
8	0.491	0.179	0.058	0.017	0.005	0.001	0	0	0	0	0
9	0.493	0.181	0.059	0.018	0.005	0.001	0	0	0	0	0
10	0.493	0.182	0.060	0.018	0.005	0.002	0	0	0	0	0
$\vdots$											
∞	0.497	0.187	0.064	0.021	0.007	0.002	0.001	0.001	0	0	0

8 lentelė: Puasono jungtinio modelio bankroto tikimybės

T \ u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.330	0.062	0.008	0.001	0	0	0	0	0	0	0
2	0.531	0.209	0.068	0.019	0.004	0.001	0	0	0	0	0
3	0.601	0.286	0.117	0.042	0.013	0.004	0.001	0	0	0	0
4	0.660	0.363	0.177	0.077	0.031	0.011	0.004	0.001	0	0	0
5	0.666	0.372	0.185	0.083	0.033	0.012	0.004	0.001	0	0	0
6	0.713	0.444	0.253	0.133	0.065	0.029	0.012	0.005	0.002	0.001	0
7	0.718	0.451	0.260	0.138	0.068	0.031	0.013	0.005	0.002	0.001	0
8	0.732	0.475	0.285	0.159	0.083	0.040	0.019	0.008	0.003	0.001	0
9	0.742	0.492	0.304	0.175	0.095	0.048	0.023	0.011	0.005	0.002	0.001
10	0.755	0.514	0.328	0.198	0.112	0.060	0.031	0.015	0.007	0.003	0.001
20	0.803	0.600	0.433	0.301	0.203	0.132	0.084	0.053	0.034	0.025	0.014
30	0.825	0.643	0.488	0.362	0.263	0.188	0.133	0.096	0.069	0.061	0.049
40	0.837	0.667	0.522	0.402	0.308	0.238	0.188	0.158	0.139	0.122	0.102
50	0.848	0.690	0.555	0.445	0.360	0.297	0.256	0.233	0.213	0.182	0.154
$\vdots$											
∞	0.878	0.748	0.634	0.535	0.451	0.379	0.319	0.269	0.226	0.190	0.160

Skaičiavimų apibendrinimas. Remiantis skaičiavimų rezultatais nesunku pastebėti, kad tikimybė bankrutuoti su bet kokiu pradiniu draudiko kapitalu bėgant laikui didėja, kol begaliniame laike pasiekia nusistovėjusią tikimybę. Akivaizdu, kad kuo pradinis turtas yra didesnis, tuo tikimybė bankrutuoti tampa mažesnė ir jos riba artėja į nulį. Lyginant sezoninį trijų žalų diskretaus laiko rizikos modelį su jungtiniu pastebime, kad jungtiniame modelyje net ir su didesniu pradiniu turtu bankroto tikimybė su tokiu pačiu T išlieka didesnė ir artėja į nulį lėčiau nei sezoniniame, o taip pat tenka skaičiuoti daugiau laiko momentų, kad su tam tikru turtu bankroto tikimybė taptų pastovesnė ir artimesnė begaliniam atvejui. Nesunku pastebėti, kad skaičiavimuose ypač daug nulemia pasirinktas žalų skirstinys X, nes jis jungtiniame trijų žalų modelyje pasikartoja kiekviename periode, tad kuo didesnė tikimybė, kad X skirstinyje įvyks žala, tuo didesnė tikimybė tampa bankrutuoti.

5 Darbo išvados

Šiame darbe aprašėme ir skaičiavimais patikrinome formules, kurios naudojamos sezoninio ir jungtinio diskretaus laiko trijų žalų modelių bankroto tikimybėms skaičiuoti. Nesunku pastebėti, kad formulės jungtiniame modelyje tampa gerokai sudėtingesnės nei sezoniniame, taip pat turime mažesnį galimų skirstinių skaičių pavaizduotų lentelėje (3), kurie tenkintų grynojo pelno sąlygą. Praktiniuose pavyzdžiuose tenka imti didesnį laiko momentą T, kad baigtinio laiko bankroto tikimybės taptų artimesnės begaliniam atvejui, taip pat atsiranda didesnė tikimybė bankrutuoti su daug didesniu pradiniu turtu u, nei tai parodo skaičiavimai sezoniniame modelyje.

6 Literatūra

1. Grigutis, A.; Šiaulys, J. Ultimate Time Survival Probability in Three-Risk Discrete Time Risk Model. Mathematics 2020, 8, 147, https://www.mdpi.com/2227-7390/8/2/147

2. A. Grigutis, A. Korvel, J. Šiaulys, Ruin probability in the three-seasonal discrete-time risk model, Modern Stochastics: Theory and Applications, Volume 2, Issue 4 (2015), pp. 421–441, https://www.i-journals.org/vtxpp/VMSTA/article/view/54.

3. Grigutis, A.; Korvel, A.; Šiaulys, J. Ruin probabilities of a discrete-time multi-risk model. Inf. Technol. Control 2015, 44, 367–379, https://doi.org/10.5755/j01.itc.44.4.8635

4. K. Blaževičius, E. Bieliauskienė, J. Šiaulys, Finite-time ruin probability in the inhomogeneous claim case, Lithuanian Mathematical Journal, July 2010, Volume 50, Issue 3, pp 260–270, https://link.springer.com/article/10.1007/s10986-010-9084-2

5. E. Bieliauskienė, Ruin probability and Gerber-Shiu function for the discrete time risk model with inhomogeneous claims, disertation https://epublications.vu.lt/object/elaba:1989680/

6. J. Šiaulys, Paskaitų konspektas Dinaminiai draudos matematikos modeliai, http://www.mif.vu.lt/katedros/mak/doc/siaulys/RIZIKA.pdf

7 Priedai

Sezoninio modelio 1 pavyzdžio kodas.

```
### Rizikos modelis

nuliai <- rep(0, 100)
disk1 <- c(0.8,0.1, 0.1, nuliai)
disk2 <- c(0.7,0.2, 0.1, nuliai)
disk3 <- c(0.3,0.3, 0.4, nuliai)

diskretus <- 0
diskretus <- convolve(disk1, rev(disk2), type = "open")
diskretus <- convolve(disk3, rev(diskretus), type = "open")
nuliai <- rep(0, 100)
diskretus <- c(diskretus, nuliai)

disk1 <- c(disk1, nuliai)
disk2 <- c(disk2, nuliai)
disk3 <- c(disk3, nuliai)

### Begalinio laiko bankroto tikimybių skaičiavimas
```

```
## Alfa skaičiavimas

an <- function(n)
{
if(n == 0) {
skaic <- 1
}
if(n == 1) {
skaic <- 0
}
if(n == 2) {
skaic <- (-1/(disk2[1]*disk3[1]))
}
if(n >= 3) {


n1 <- n-1
n2 <- n-2


for (i in 3:n)
{
    suma <- 0
    for(k in 1:n1)
    {
       sandauga <- diskretus[k+1]*an(n-k)
       suma <- suma + sandauga
    }
    skaic <- 1/diskretus[1]*(an(n-3) - suma - disk1[n1])
}

}
return (skaic)

}

a100 <- an(100)
a101 <- an(101)

## Beta skaičiavimas

bn <- function(n)
{
if(n == 0) {
skaic <- 0
}
if(n == 1) {
skaic <- 1
}
if(n == 2) {
skaic <- -disk3[2]/disk3[1] - 1/disk2[1]
}
if(n >= 3) {


n1 <- n-1
n2 <- n-2


for (i in 3:n)
```

```
{
    suma <- 0
    antrasuma <- 0

### PIRMAS CIKLAS

    for(k in 1:n1)
    {
       sandauga <- diskretus[k+1]*bn(n-k)
       suma <- suma + sandauga
    }

### ANTRAS CIKLAS

    for(j in 1:n)
    {
       sandauga2 <- disk1[j]*disk2[n+1-j]
       antrasuma <- antrasuma + sandauga2
    }

 skaic <- 1/diskretus[1]*(bn(n-3) - suma - disk1[n1]*disk3[1] + disk3[1]*antrasuma)
}

}
return (skaic)

}

b100 <- bn(100)
b101 <- bn(101)


## Gama skačiavimas

gn <- function(n)
{
if(n == 0) {
skaic3 <- 0
}
if(n == 1) {
skaic3 <- 0
}
if(n == 2) {
skaic3 <- (1/(disk2[1]*disk3[1]))
}
if(n >= 3) {


n1 <- n-1
n2 <- n-2


for (i in 3:n)
{
    suma <- 0
    for(k in 1:n1)
    {
       sandauga <- diskretus[k+1]*gn(n-k)
       suma <- suma + sandauga
    }
    skaic3 <- 1/diskretus[1]*(gn(n-3) - suma + disk1[n1])
```

```
}

}
return (skaic3)
}

c100 <- gn(100)
c101 <- gn(101)

ES <- 1.8

cc100 <- 1-((3-ES)*c100)
cc101 <- 1-((3-ES)*c101)



A <- matrix(c(a100, a101, b100, b101), nrow=2, ncol=2)


B <- matrix(c(cc100, cc101), nrow=2, ncol=1)


Atvirkstine <- solve(A)


Sprendiniai <- Atvirkstine%*%B


ruinprob <- function(turtas)
{
ats <- an(turtas)*Sprendiniai[1,1]+bn(turtas)*Sprendiniai[2,1] + gn(turtas)*(3-ES)
return(ats)
}



bankrotas <- 0

for (i in 0:8)
{
bankrotas[i+1] <- round(1 - ruinprob(i), 3)
}


bankrotas


### Baigtinio laiko bankroto tikimybių skaičiavimas


n <- 100

ak <- function(u)
{
   suma <- 0
   nu <- n-1
   for(i in u:nu)
   {
     tikimybe <- disk1[i+2]
     suma <- suma + tikimybe
   }
```

```
   return (suma)
}


bk <- function(u)
{
   suma <- 0
   nu <- n-1
   for(i in u:nu)
   {
     tikimybe <- disk2[i+2]
     suma <- suma + tikimybe
   }
   return (suma)
}


ck <- function(u)
{
   suma <- 0
   nu <- n-1
   for(i in u:nu)
   {
     tikimybe <- disk3[i+2]
     suma <- suma + tikimybe
   }
   return (suma)
}


########### PSI skaiciavimas ####

psi1 <- function(u, t)
{
  u1 <- u+1
  tikimybiusuma <- 0

  if (t != 1)
  {
  for (i in 1:u1)
  {
     tikimybe <- psi2(u+2-i, t-1)*disk1[i]
     tikimybiusuma <- tikimybiusuma + tikimybe
  }
  suma <- ak(u) + tikimybiusuma
  }
  else
  suma <- ak(u)
  return (suma)
}

psi2 <- function(u, t)
{
  u1 <- u+1
  tikimybiusuma <- 0

  if (t != 1)
  {
  for (i in 1:u1)
  {
     tikimybe <- psi3(u+2-i, t-1)*disk2[i]
```

```
      tikimybiusuma <- tikimybiusuma + tikimybe
  }
  suma <- bk(u) + tikimybiusuma
  }
  else
  suma <- bk(u)
  return (suma)
}

psi3 <- function(u, t)
{
  u1 <- u+1
  tikimybiusuma <- 0

  if (t != 1)
  {
  for (i in 1:u1)
  {
      tikimybe <- psi1(u+2-i, t-1)*disk3[i]
      tikimybiusuma <- tikimybiusuma + tikimybe
  }
  suma <- ck(u) + tikimybiusuma
  }
  else
  suma <- ck(u)

  return (suma)
}

lentele <- 0
lentele <- matrix(c(rep(0, 110)), nrow=10, ncol=11)

for (i in 0:10)
{
  for (j in 1:10)
  {
  lentele[j, i+1] <- round(psi1(i,j), 3)
}}

lentele
```

Sezoninio modelio 2 pavyzdžio kodas.

```
pois <- function(lambda, k)
{
sk <- (lambda^k/factorial(k))*exp(-lambda)
return (sk)
}

tryspois <- function(lambda1, lambda2, lambda3, k)
{
sk <- ((lambda1+lambda2+lambda3)^k/factorial(k))*exp(-(lambda1+lambda2+lambda3))
return (sk)
}
pois1 <- pois(0.4, (0:100))
pois2 <- pois(0.7, (0:100))
pois3 <- pois(0.5, (0:100))
poisson <- tryspois(0.4, 0.7, 0.5, (0:300))
```

```
### Toliau einantys skaičiavimai atliekami lygiai tokiu pačiu principu kaip
ir pirmąjame sezoninio modelio pavyzdyje, todėl pakartotinai jų neaprašysime.
```

Jungtinio modelio 1 pavyzdžio kodas.

```
#### Aprasomi skirstiniai ####

s1 <- c(0.8, 0.1, 0.1)
s2 <- c(0.7, 0.2, 0.1)
s3 <- c(0.3, 0.3, 0.4)

mean1 <- s1[1]*0+s1[2]*1+s1[3]*2
mean2 <- s2[1]*0+s2[2]*1+s2[3]*2
mean3 <- s3[1]*0+s3[2]*1+s3[3]*2
mean <- 6*mean1 + 3*mean2 + 2*mean3 - 6


f <- function(i,j,k,m){
z <- c(0, 0)

if(i>1){
z <- s1
for (a in 2:i){
z <- convolve(s1, rev(z), type = "open") }
} else if (i==1) {  z <- s1
} else if (i==0) { z <- c(0, 0)  }


if((j>0)&(z!=c(0,0))){
for (b in 1:j){
z <- convolve(s2, rev(z), type = "open") }
} else if((j>0)&(z==c(0, 0))){
z <- s2
for (b in 1:j){
z <- convolve(s2, rev(z), type = "open") }
} else if ((j==0)&(z!=c(0, 0))){
z
} else if ((j==0)&(z!=c(0,0))){
z <- c(0, 0)  }


if((k>0)&(z!=c(0,0))){
for (c in 1:k){
z <- convolve(s3, rev(z), type = "open") }
} else if((k>0)&(z==c(0, 0))){
z <- s3
for (c in 1:k){
z <- convolve(s3, rev(z), type = "open") }
}
z <- c(z, c(rep(0,50)))
z[m+1]

}



F <- function(i,j,k,m){
z <- c(0, 0)

if(i>1){
z <- s1
```

```
for (a in 2:i){
z <- convolve(s1, rev(z), type = "open") }
} else if (i==1) {  z <- s1
} else if (i==0) { z <- c(0, 0)  }


if((j>0)&(z!=c(0,0))){
for (b in 1:j){
z <- convolve(s2, rev(z), type = "open") }
} else if((j>0)&(z==c(0, 0))){
z <- s2
for (b in 1:j){
z <- convolve(s2, rev(z), type = "open") }
} else if ((j==0)&(z!=c(0, 0))){
z
} else if ((j==0)&(z!=c(0,0))){
z <- c(0, 0)  }


if((k>0)&(z!=c(0,0))){
for (c in 1:k){
z <- convolve(s3, rev(z), type = "open") }
} else if((k>0)&(z==c(0, 0))){
z <- s3
for (c in 1:k){
z <- convolve(s3, rev(z), type = "open") }
}

z <- c(z, c(rep(0,50)))

m <- m+1
ats <- cumsum(z)
ats <- c(ats, c(rep(0,50)))

ats[m]

}



Z5 <- f(5,3,2,0)

Z4 <- F(6,3,2,1)+ (1-F(1,0,0,0)) * f(5,3,2,1)
+ (1-F(1,0,0,1)) * f(5,3,2,0) + (1-F(1,1,0,1)) * f(4,2,2,0)

Z3 <- F(6,3,2,2) + sum((1-(F(1,0,0,0:2))) * f(5,3,2,2:0))
+ sum((1-(F(1,1,0,1:2))) * f(4,2,2,1:0)) + f(3,2,1,0)
* ((1-F(1,0,1,2)) + (1-F(1,1,0,0)) * f(1,0,1,2))

Z2 <- F(6,3,2,3) + sum((1-F(1,0,0,0:3)) * f(5,3,2,3:0))
+ sum((1-F(1,1,0,1:3)) * f(4,2,2,2:0)) + sum(f(3,2,1,1:0)
* ((1-F(1,0,1,2:3)) + (1-F(1,1,0,0)) * f(1,0,1,2:3)))
+ f(4,2,2,0) * (1-F(1,1,0,3)) + f(3,2,1,0) * (f(1,0,1,1)
* (1-F(1,1,0,2)) + (1-F(1,1,0,1)) * (1-F(1,0,1,1)))
+ f(2,1,1,0) * (1-F(1,1,0,0)) * (f(1,0,1,0) * (1-F(1,1,0,2))
+ (1-F(1,0,1,0)) *  (1-F(1,1,0,1)))

Z1 <- F(6,3,2,4) + sum((1-F(1,0,0,0:4)) * f(5,3,2,4:0))
+ sum((1-F(1,1,0,1:4)) * f(4,2,2,3:0)) + sum(f(3,2,1,2:0)
* ((1-F(1,0,1,2:4)) + (1-F(1,1,0,0)) * f(1,0,1,2:4)))
+ f(2,1,1,0) * (sum((1-F(1,1,0,3:4)) * f(2,1,1,1:0)))
```

```
+ f(1,1,0,0) * f(1,0,1,1) * (sum((1-F(1,1,0,2:3))
* f(2,1,1,1:0))) + f(1,1,0,0) * (1-F(1,0,1,1))
* (sum((1-F(1,1,0,1:2)) * f(2,1,1,1:0))) + (1-F(1,1,0,0))
* (1-F(1,0,1,0)) * (sum((1-F(1,1,0,1:2)) * f(2,1,1,1:0)))
+ f(1,0,1,0) * (1-F(1,1,0,0)) * (sum((1-F(1,1,0,2:3))
* f(2,1,1,1:0))) + f(1,1,1,0) * (sum((1-F(1,0,0,4:2))
* f(4,2,1,0:2) + f(1,1,1,0) * (1-F(4,2,1,2))
* (1-F(1,0,0,1)))) - f(4,3,1,0) * f(1,0,0,2) * f(1,0,1,2)
* (1-F(1,0,0,0)) - f(1,1,1,0) * (sum(f(2,1,1,0:1)
* f(1,0,0,3:2) * (1-F(1,1,0,1))) + (f(2,1,1,0) * f(1,0,0,2)
* (1-F(1,1,0,2)))) - f(1,1,1,0) * (sum(f(3,2,1,0:2)
* f(1,0,0,4:2) * (1-F(1,0,0,0))) + sum(f(3,2,1,0:1)
* f(1,0,0,3:2) * (1-F(1,0,0,1))) + (f(3,2,1,0)
* f(1,0,0,2) * (1-F(1,0,0,2))))


a1 <- f(1,0,0,0:50)
a1b1 <- f(1,1,0,0:50)
a1c1 <- f(1,0,1,0:50)
a6b3c2 <- f(6,3,2,0:50)
a5b3c2 <- f(5,3,2,0:50)
a4b2c2 <- f(4,2,2,0:50)
a3b2c1 <- f(3,2,1,0:50)
a2b1c1 <- f(2,1,1,0:50)
a1b1c1 <- f(1,1,1,0:50)


i11 <- function(u){
i11 <- 0:u
i11
}


i12 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{ fafa[f] <- a
f <- f+1  } }
fafa-1
}


i13 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{ fafa[f] <- a
f <- f+1  } } }
fafa-1
}
```

```
i14 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
fafa[f] <- a
f <- f+1  } } } }
fafa-1
}


i15 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
for (e in 1:(u+8-a-b-c-d))
{
fafa[f] <- a
f <- f+1  } } } } }
fafa-1
}


i16 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
for (e in 1:(u+8-a-b-c-d))
{
for (g in 1:(u+10-a-b-c-d-e))
{
fafa[f] <- a
f <- f+1  } } } } } }
fafa-1
}
```

```
i22 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{ fafa[f] <- b
f <- f+1  } }
fafa-1
}


i23 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{ fafa[f] <- b
f <- f+1  } } }
fafa-1
}


i24 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
fafa[f] <- b
f <- f+1  } } } }
fafa-1
}



i25 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
for (e in 1:(u+8-a-b-c-d))
```

```
{
fafa[f] <- b
f <- f+1  } } } } } }
fafa-1
}


i26 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
for (e in 1:(u+8-a-b-c-d))
{
for (g in 1:(u+10-a-b-c-d-e))
{
fafa[f] <- b
f <- f+1  } } } } } }
fafa-1
}



i33 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{ fafa[f] <- c
f <- f+1  } } }
fafa-1
}


i34 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
fafa[f] <- c
f <- f+1  } } } }
fafa-1
}
```

```
i35 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
for (e in 1:(u+8-a-b-c-d))
{
fafa[f] <- c
f <- f+1  } } } } }
fafa-1
}
```

```
i36 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
for (e in 1:(u+8-a-b-c-d))
{
for (g in 1:(u+10-a-b-c-d-e))
{
fafa[f] <- c
f <- f+1  } } } } } }
fafa-1
}
```

```
i44 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
fafa[f] <- d
f <- f+1  } } } }
fafa-1
}
```

```
i45 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
for (e in 1:(u+8-a-b-c-d))
{
fafa[f] <- d
f <- f+1  } } } } }
fafa-1
}


i46 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
for (e in 1:(u+8-a-b-c-d))
{
for (g in 1:(u+10-a-b-c-d-e))
{
fafa[f] <- d
f <- f+1  } } } } } }
fafa-1
}


i55 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
for (e in 1:(u+8-a-b-c-d))
{
fafa[f] <- e
f <- f+1  } } } } }
fafa-1
```

```
}


i56 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
for (e in 1:(u+8-a-b-c-d))
{
for (g in 1:(u+10-a-b-c-d-e))
{
fafa[f] <- e
f <- f+1  } } } } } }
fafa-1
}

i66 <- function(u){
u <- u+1
f <- 1
fafa <- 0
for (a in 1:u)
{
for (b in 1:(u+2-a))
{
for (c in 1:(u+4-a-b))
{
for (d in 1:(u+6-a-b-c))
{
for (e in 1:(u+8-a-b-c-d))
{
for (g in 1:(u+10-a-b-c-d-e))
{
fafa[f] <- g
f <- f+1  } } } } } }
fafa-1
}


z4 <- function(u){
z4 <- 0
z4 <- sum(a1[u+1:2+1] * a5b3c2[2-1:2+1])
+ sum(a1[1+0:u] * a1b1[u+2-0:u+1] * a4b2c2[2-2+1])
z4 }


z3 <- function(u){
z3 <- 0
z3 <- sum(a1[u+1:3+1] * a5b3c2[3-1:3+1]) + sum(a1[i11(u)+1]
* a1b1[u+2-i11(u)+1] * a4b2c2[3-2+1]) + sum(a1[i11(u)+1]
* a1b1[u+3-i11(u)+1] * a4b2c2[3-3+1]) + sum(a1[i12(u)+1]
* a1b1[i22(u)+1] * a1c1[u+3-i12(u)-i22(u)+1] * a3b2c1[3-3+1])
z3 }
```

```
z2 <- function(u){
z2 <- 0
z2 <- sum(a1[u+1:4+1] * a5b3c2[4-1:4+1]) + sum(a1[i11(u)+1]
* a1b1[u+2-i11(u)+1] * a4b2c2[4-2+1]) + sum(a1[i11(u)+1]
* a1b1[u+3-i11(u)+1] * a4b2c2[4-3+1]) + sum(a1[i11(u)+1]
* a1b1[u+4-i11(u)+1] * a4b2c2[4-4+1]) + sum(a1[i12(u)+1]
* a1b1[i22(u)+1] * a1c1[u+3-i12(u)-i22(u)+1] * a3b2c1[4-3+1])
+ sum(a1[i12(u)+1] * a1b1[i22(u)+1] * a1c1[u+4-i12(u)-i22(u)+1]
* a3b2c1[4-4+1]) + sum(a1[i13(u)+1] * a1b1[i23(u)+1]
* a1c1[i33(u)+1] * a1b1[u+4-i13(u)-i23(u)-i33(u)+1] * a2b1c1[4-4+1])
z2 }


z1 <- function(u){
z1 <- 0
z1 <- sum(a1[u+1:5+1] * a5b3c2[5-1:5+1]) + sum(a1[i11(u)+1]
* a1b1[u+2-i11(u)+1] * a4b2c2[5-2+1]) + sum(a1[i11(u)+1]
* a1b1[u+3-i11(u)+1] * a4b2c2[5-3+1]) + sum(a1[i11(u)+1]
* a1b1[u+4-i11(u)+1] * a4b2c2[5-4+1]) + sum(a1[i11(u)+1]
* a1b1[u+5-i11(u)+1] * a4b2c2[5-5+1]) + sum(a1[i12(u)+1]
* a1b1[i22(u)+1] * a1c1[u+3-i12(u)-i22(u)+1] * a3b2c1[5-3+1])
+ sum(a1[i12(u)+1] * a1b1[i22(u)+1] * a1c1[u+4-i12(u)-i22(u)+1]
* a3b2c1[5-4+1]) + sum(a1[i12(u)+1] * a1b1[i22(u)+1]
* a1c1[u+5-i12(u)-i22(u)+1] * a3b2c1[5-5+1])
+ sum(a1[i13(u)+1] * a1b1[i23(u)+1] * a1c1[i33(u)+1]
* a1b1[u+4-i13(u)-i23(u)-i33(u)+1] * a2b1c1[5-4+1])
+ sum(a1[i13(u)+1] * a1b1[i23(u)+1] * a1c1[i33(u)+1]
* a1b1[u+5-i13(u)-i23(u)-i33(u)+1] * a2b1c1[5-5+1])
+ a1b1c1[1] * (sum(a1[i14(u)+1] * a1b1[i24(u)+1]
* a1c1[i34(u)+1] * a1b1[i44(u)+1]
* a1[u+5-i14(u)-i24(u)-i34(u)-i44(u)+1]))
z1 }


A <- matrix(c(1,0,0,0,0,0), ncol=6)
A <- rbind(A, c(0,1,0,0,0,0))
A <- rbind(A, c(0,0,1,0,0,0))
A <- rbind(A, c(0,0,0,1,0,0))
A <- rbind(A, c(0,0,0,0,1,0))
A <- rbind(A, c(-1/Z5, -Z1/Z5, -Z2/Z5, -Z3/Z5, -Z4/Z5, 1/Z5))
n <- 51
for(b in 6:50)
{ A <- rbind(A, c(0,0,0,0,0,0)) }

for(a in 7:n)
{
A[a,] <- c(1/f(6,3,2,0) * (A[a-6,1] - sum(f(6,3,2,1:(a-2)) * A[a-(1:(a-2)),1])
- a1[a-6+1]),
     1/f(6,3,2,0) * (A[a-6,2] - sum(f(6,3,2,1:(a-2)) * A[a-(1:(a-2)),2])
     + z1(a-7) - a1[a-6+1] * Z1),
     1/f(6,3,2,0) * (A[a-6,3] - sum(f(6,3,2,1:(a-2)) * A[a-(1:(a-2)),3])
     + z2(a-7) - a1[a-6+1] * Z2),
     1/f(6,3,2,0) * (A[a-6,4] - sum(f(6,3,2,1:(a-2)) * A[a-(1:(a-2)),4])
     + z3(a-7) - a1[a-6+1] * Z3),
     1/f(6,3,2,0) * (A[a-6,5] - sum(f(6,3,2,1:(a-2)) * A[a-(1:(a-2)),5])
     + z4(a-7) - a1[a-6+1] * Z4),
     1/f(6,3,2,0) * (A[a-6,6] - sum(f(6,3,2,1:(a-2)) * A[a-(1:(a-2)),6])
     + a1[a-6+1]))
}
```

```
B <- matrix(c(A[(n-4), c(1:5)] - A[(n-5), c(1:5)],
  A[(n-3), c(1:5)] - A[(n-5), c(1:5)],
      A[(n-2), c(1:5)] - A[(n-5), c(1:5)],
  A[(n-1), c(1:5)] - A[(n-5), c(1:5)],
    A[(n), c(1:5)] - A[(n-5), c(1:5)]), ncol=5)
B <- t(B)



C <- matrix(c(A[(n-4), 6] - A[(n-5), 6],
  A[(n-3), 6] - A[(n-5), 6],
      A[(n-2), 6] - A[(n-5), 6],
  A[(n-1), 6] - A[(n-5), 6],
    A[(n), 6] - A[(n-5), 6])) * mean


fi <- solve(B,C, vars=200)
fi <- rbind(fi, -(fi[1] + Z1*fi[2] + Z2*fi[3] + Z3*fi[4] + Z4*fi[5] - 6
+ 6*mean1 + 3*mean2 + 2*mean3)/Z5)

u <- 20
for(b in 7:u)
{ fi <- rbind(fi, 0) }


for(a in 7:u)
{
fi[a,] <- (1/f(6,3,2,0))*(fi[a-6] - sum(f(6,3,2,a-(2:(a-1)))
* fi[2:(a-1)]) + z1(a-7)*fi[2] + z2(a-7)*fi[3] + z3(a-7)*fi[4]
+ z4(a-7)*fi[5] + a5b3c2[1]*a1[a-5]*fi[6])
}


###################### BAIGTINIS LAIKAS #########################

u <- 20
T <- 50
phi <- matrix(0, ncol=u+20, nrow=T)

for (i in 1:u)
{ phi[1,i] <- sum(a1[i11(i)]) }

for (i in 1:u)
{ phi[2,i] <- sum(a1[i12(i-1)+1] * a1b1[i22(i-1)+1] ) }

for (i in 1:u)
{ phi[3,i] <- sum(a1[i13(i-1)+1] * a1b1[i23(i-1)+1]
* a1c1[i33(i-1)+1]) }

for (i in 1:u)
{ phi[4,i] <- sum(a1[i14(i-1)+1] * a1b1[i24(i-1)+1]
* a1c1[i34(i-1)+1] * a1b1[i44(i-1)+1]) }

for (i in 1:u)
{ phi[5,i] <- sum(a1[i15(i-1)+1] * a1b1[i25(i-1)+1]
* a1c1[i35(i-1)+1] * a1b1[i45(i-1)+1] * a1[i55(i-1)+1]) }

for (i in 1:u)
{ phi[6,i] <- sum(a1[i16(i-1)+1] * a1b1[i26(i-1)+1] * a1c1[i36(i-1)+1]
* a1b1[i46(i-1)+1] * a1[i56(i-1)+1] * a1b1c1[i66(i-1)+1]) }
```

```
start.time <- Sys.time()

### kuo didesnis imamas u, tuo rezultatai gaunasi tikslesni,
taciau smarkiai auga skaiciavimo laikas ####
for (t in 7:T)
{
for (i in 1:30)
{ phi[t,i] <- sum(a1[i16(i-1)+1] * a1b1[i26(i-1)+1] * a1c1[i36(i-1)+1]
* a1b1[i46(i-1)+1] * a1[i56(i-1)+1] * a1b1c1[i66(i-1)+1]
* phi[t-6, i+6-i16(i-1)-i26(i-1)-i36(i-1)-i46(i-1)-i56(i-1)-i66(i-1)]) }
}

end.time <- Sys.time()
time.taken <- round(end.time - start.time, 3)
```

Jungtinio modelio 2 pavyzdžio kodas.

```
pois <- function(lambda, k)
{
sk <- (lambda^k/factorial(k))*exp(-lambda)
return (sk)
}

tryspois <- function(lambda1, lambda2, lambda3, k)
{
sk <- ((lambda1+lambda2+lambda3)^k/factorial(k))*exp(-(lambda1+lambda2+lambda3))
return (sk)
}
s1 <- pois(0.4, (0:20))
s1
s2 <- pois(0.7, (0:20))
s2
s3 <- pois(0.5, (0:20))
s3

poisson <- tryspois(0.4, 0.7, 0.5, (0:300))
poisson
sum(poisson)

#### Pasikeisti mean1, mean2, mean3 ir mean Puasono vidurkius ####
mean1 <- 0.4
mean2 <- 0.7
mean3 <- 0.5
mean <- 6*0.4 + 3*0.7 + 2*0.5 - 6
### Toliau einantys skaičiavimai atliekami lygiai tokiu pačiu principu kaip
ir pirmąjame jungtinio modelio pavyzdyje, todėl pakartotinai jų neaprašysime.
```