ISSN 1648-8776
JAUNŲJŲ MOKSLININKŲ DARBAI. Nr. 50 (2). 2020 Doi: https://doi.org/10.21277/jmd.v50i2.308

MIŠRUSIS JUNGTINIS SELBERGO KLASĖS *L* FUNKCIJŲ IR PERIODINIŲ HURVICO DZETA FUNKCIJŲ UNIVERSALUMAS

Mindaugas Jasas, Renata Macaitienė
Šiaulių universitetas, Regionų plėtros institutas
E. p.: jasas1989@gmail.com, renata.macaitiene@su.lt

Įvadas

Dzeta ir *L* funkcijų universalumo savybė yra vienas didžiausių fenomenų analizinėje skaičių teorijoje. Ši savybė reiškia, kad analizinės funkcijos gali būti aproksimuojamos duotu tikslumu dzeta arba *L* funkcijų postūmiais tam tikrose srityse.

1975 m. S. Voroninas (Voronin) įrodė [20] Rymano dzeta funkcijos,

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \qquad \sigma > 1, \quad s = \sigma + it,$$

universalumą, t. y., jog kiekviena tolydi nelygi nuliui skritulyje $\left\{s \in \mathbb{C}: |s| < \frac{1}{4}\right\}$, $s \in \mathbb{C}$, funkcija ir analizinė jo viduje norimu tikslumu gali būti aproksimuojama $\zeta(s)$ postūmiais.

Voronino rezultatu susidomėjo daugelis skaičių teorijos specialistų – pastebėta, kad analogišką universalumo savybę turi ir daug kitų klasikinių dzeta ir *L* funkcijų. Be to, Voronino teorema buvo sustiprinta dviem kryptimis: pirma, skritulys, kuriame aproksimuojama analizinė funkcija, buvo pakeistas bendresne aibe; antra, įrodyta, jog Rymano dzeta funkcijos postūmių $\zeta(s + i\tau)$, norimu tikslumu aproksimuojančių duotą analizinę funkciją, yra be galo daug (apatinis tankis yra griežtai teigiamas) [7].

Šiuo metu įrodyta, kad ir daug kitų klasikinių dzeta bei *L* funkcijų taip pat yra universalios prieš tai nurodyta prasme. Išsami dzeta ir *L* funkcijų universalumo analizė pateikiama K. Matsumoto apžvalginiame straipsnyje [12].

Sprendžiant įvairius matematikos taikymo uždavinius, dažnai tenka aproksimuoti ir įvertinti analizinių funkcijų sistemas. Ši problema sėkmingai sprendžiama, remiantis dzeta funkcijų jungtiniu universalumu. Tačiau kur kas sudėtingesnė problema yra jungtinio universalumo nagrinėjimas, kai aproksimuojančios funkcijos yra skirtingos tam tikra prasme. Tokios rūšies jungtinis universalumas vadinamas *mišriuoju jungtiniu universalumu*.

H. Mišu (Mishou) pradėjo nagrinėti jungtinį dzeta funkcijų, turinčių ir neturinčių Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius, universalumą. Jis įrodė [14] jungtinę universalumo teoremą Rymano dzeta funkcijai $\zeta(s)$ ir Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ su transcendenčiuoju parametru α. Primename, jog $\zeta(s, \alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą $\mathbb{C}$, išskyrus paprastą polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Akivaizdu, kad $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$.

Mišu teorema [14]. *Tarkime, kad skaičius α yra transcendentusis, K_1, K_2 – kompaktinės juostos*

$$D = \left\{s \in \mathbb{C}: \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$$

aibės su jungiaisiais papildiniais, funkcija $f_1(s)$ yra tolydi ir nelygi nuliui aibėje K_1 bei analizinė jos viduje, o funkcija $f_2(s)$ tolydi aibėje K_2 ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{t \in [0, T]: \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |\zeta(s + i\tau) - f_2(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Čia meas *A* žymi mačiosios aibės *A* Lebego matą. Vėliau Mišu teorema buvo apibendrinta periodinė dzeta ir periodinės Hurvico dzeta funkcijų rinkiniui, Rymano dzeta funkcijos ir naujųjų formų dzeta funkcijų rinkiniui bei kitoms funkcijoms [8], [9], [16], [18].

Tyrimo tikslas – įrodyti mišriojo jungtinio universalumo teoremą Selbergo klasės *L* funkcijoms ir periodinėms Hurvico dzeta funkcijoms.

Šiuo atveju įrodysime teoremą apie duotų analizinių funkcijų rinkinio vienalaikį aproksimavimą *L* funkcijų, turinčių Oilerio sandaugą pagal pirminius skaičius, ir Hurvitzo tipo dzeta funkcijų, neturinčių Oilerio sandaugos, postūmiais.

Rezultatas gautas pirmo šio straipsnio autoriaus Mindaugo Jaso magistrantūros studijų metu, o straipsnis parengtas jo magistro darbo [4] pagrindu.

Tyrimo objektas. Tam, kad suformuluotume pagrindinį rezultatą, pateiksime nagrinėjamų objektų – *Selbergo klasės funkcijų* ir *periodinių Hurvico dzeta funkcijų* – apibrėžimus.

1989 m. A. Selbergas (Selberg) apibrėžė plačią paprastųjų Dirichlė eilučių

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}, \quad s = \sigma + it,$$

klasę, turinčią Oilerio sandaugą, analizinį pratęsimą, Rymano tipo funkcinę lygtį ir tenkinančią Ramanudžano (Ramanujan) hipotezę koeficientams a_m. Išsami informacija apie minėtą funkcijų klasę pateikiama [17], ją žymėsime $\mathcal{S}$. Straipsnyje naudojamos funkcijos iš Selbergo klasės, tenkinančios papildomą reikalavimą:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p\le x} |a(p)|^2 = \kappa,$$

čia κ – teigiama konstanta, p – pirminiai skaičiai (t. y. $p \in \mathcal{P}$), $\pi(x) = \sum_{p\le x} 1$.

Tegul $\mathfrak{b} = \{b_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0\}$ yra kompleksinių skaičių su minimaliu periodu $l \in N$ seka, o α, $0 < \alpha \le 1$, yra fiksuotas parametras. Tuomet periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{b})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute

$$\zeta(s, \alpha, \mathfrak{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m+\alpha)^s}.$$

Kadangi koeficientai b_m yra periodiniai, tai pusplokštumėje $\sigma > 1$ galioja lygybė

$$\zeta(s, \alpha, \mathfrak{b}) = \frac{1}{l^s} \sum_{m=0}^{l-1} b_m \zeta\left(s, \frac{m+\alpha}{l}\right),$$

kuri duoda funkcijos $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{b})$ analizinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastas polius su reziduumu

$$b = \frac{1}{l} \sum_{m=0}^{l-1} b_m.$$

Jeigu $b = 0$, tai $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{b})$ yra sveikoji funkcija. Kai $b_m \equiv 1$ ir $l = 1$, tuomet $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{b})$ virsta Hurvico dzeta funkcija. Plačiau apie $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{b})$ galima rasti [5], [8], [12].

Šiuo atveju nagrinėsime rinkinį $\zeta(s, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl})$, $0 < \alpha_j < 1$, kur $\mathfrak{a}_{jl} = \{a_{mjl} : m \in N_0\}$ yra periodinės kompleksinių skaičių sekos su minimaliu periodu $q_{jl} \in N$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$. Be to, tegul q_j yra mažiausias bendras sekos $q_{j1}, \dots, q_{jl_j}$ kartotinis ir

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j1} & a_{1j2} & \dots & a_{1jl_j} \\ a_{2j1} & a_{2j2} & \dots & a_{2jl_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q_j j1} & a_{q_j j2} & \dots & a_{q_j jl_j} \end{pmatrix}.$$

Tegul $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ yra kompaktinių juostos

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \{s \in \mathbb{C} : \sigma_{\mathcal{L}} < \sigma < 1\},$$

$\sigma_{\mathcal{L}} = \max\left\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\right\}$, aibių su jungiaisiais papildiniais klasė, o $H_{0\mathcal{L}}(K)$ – tolydžių, nelygių nuliui ir analizinių srities K viduje funkcijų klasė, $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$. Be to, tegul $\mathcal{K}$ yra kompaktinių juostos

$$D = \left\{s \in C : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$$

aibių su jungiaisiais papildiniais klasė, o $H(K_j)$ – tolydžių ir analizinių funkcijų klasė, $K_j \in \mathcal{K}$.

Pagrindinė teorema. *Tarkime, kad $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ ir egzistuoja tokia teigiama konstanta κ, kad*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p\le x} |a(p)|^2 = \kappa.$$

Tegul skaičiai $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$ ir $\operatorname{rank}(A_j) = l_j, j = 1, \dots, r$. Be to, tegul $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ ir $f(s) \in H_{0\mathcal{L}}(K)$, o $K_{jl} \in \mathcal{K}$ ir $f_{jl}(s) \in H(K_{jl})$, visiems $j = 1, \dots, r$ ir $l = 1, \dots, l_j$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\Big\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |\mathcal{L}(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon,$$

$$\sup_{1\le j\le r} \sup_{1\le l\le l_j} \sup_{s\in K_{jl}} \left| \zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl}) - f_{jl}(s) \right| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Akivaizdu, kad pagrindinė teorema apima ankstesnius matematikų darbus [3], [6], [8], [10], [11] ir [16], kuriuose vietoje Selbergo klasės funkcijų buvo nagrinėjama Rymano dzeta funkcija, parabolinių formų, naujųjų formų dzeta funkcijos arba normuotos parabolinių formų L funkcijos su sąsukomis.

Svarbu akcentuoti tai, jog šiuo atveju galime pateikti ir parametrų α pavyzdį. Tarkime, jei $r = 2$, tokiu atveju

$$\alpha_1 = 2^{-\sqrt[3]{2}}, \quad \alpha_2 = 2^{-\sqrt[3]{4}},$$

nes įrodyta [2], kad skaičiai $\alpha_1 = 2^{\sqrt[3]{2}}$ ir $\alpha_2 = 2^{\sqrt[3]{4}}$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$.

Tyrimo metodai. Straipsnyje pateikiamoms universalumo teoremoms įrodyti naudotas tikimybinis metodas, paremtas ribinėmis teoremomis apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą; taikomas silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentas tolydumo aibės terminais. Svarbų vaidmenį atlieka Mergeliano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais.

Tikimybinis modelis

Pagrindinės universalumo teoremos įrodymui reikia įrodyti ribinę teoremą silpno tikimybinio mato konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje.

Tegu G yra sritis kompleksinėje plokštumoje. Pažymėkime $H(G)$ analizinių srityje G funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Tegul

$$u = \sum_{j=1}^{r} l_j, \quad v = u + 1,$$

$$H^v = H^v(D_{\mathcal{L}}, D) = H(D_{\mathcal{L}}) \times H^u(D).$$

Kaip įprastai, pažymėkime $\mathbb{X}$ metrinę arba topologinę erdvę, o $\mathcal{B}$ erdvės $\mathbb{X}$ Borelio σ-kūną, t. y. mažiausią σ kūną, kuriam priklauso erdvės $\mathbb{X}$ atvirųjų aibių sistema. Dėl trumpumo tegul

$\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $\underline{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}_{11}, \dots, \mathfrak{a}_{1l_1}, \dots, \mathfrak{a}_{r1}, \dots, \mathfrak{a}_{rl_r})$

ir

$$Z(s_1, s, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) = \big(\mathcal{L}(s_1), \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})\big).$$

Šiame skyriuje nagrinėsime tikimybinio mato

$$P_T(A) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau \in [0, T]: Z(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\alpha}, \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A\Big\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^v),$$

silpnąjį konvergavimą, kai $T \to \infty$.

Ribinės teoremos formulavimui reikalinga topologinė struktūra. Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C}: |s| = 1\}$. Apibrėžiame daugiamačius torus:

$$\widehat{\Omega} = \prod_p \gamma_p \quad \text{ir} \quad \Omega = \prod_{m \in N_0} \gamma_m,$$

kur $\gamma_p = \gamma$ visiems pirminiams skaičiams p ir $\gamma_m = \gamma$ visiems $m \in \mathbb{N}_0$. Pagal Tichonovo (Tikhonov) teoremą, su sandaugos topologija ir pataškine daugyba, torai $\widehat{\Omega}$ ir Ω yra kompaktiškos topologinės grupės. Taigi, erdvėse $\big(\widehat{\Omega}, \mathcal{B}(\widehat{\Omega})\big)$ ir $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybiniai Haro (Haar) matai $\widehat{m}_H$ ir m_H. Turime tikimybines erdves $\big(\widehat{\Omega}, \mathcal{B}(\widehat{\Omega}), \widehat{m}_H\big)$ ir $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

Dar daugiau, tegul $\Omega_j = \Omega$, $\quad j = 1, \dots, n$,

$$\underline{\Omega} = \widehat{\Omega} \times \Omega_1 \times \dots \times \Omega_r.$$

Tuomet ir $\underline{\Omega}$ yra kompaktiška topologinė Abelio grupė; vadinasi, turime dar vieną tikimybinę erdvę $\big(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \underline{m_H}\big)$, kur $\underline{m_H}$ yra tikimybinis Haro matas erdvėje $\big(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega})\big)$. Pažymėkime $\widehat{\omega}(p)$ elemento $\widehat{\omega} \in \widehat{\Omega}$ projekciją į koordinatinę erdvę γ_p, $p \in \mathcal{P}$, o $\omega_j(m)$ elemento $\omega_j \in \Omega_j$ projekciją į γ_m, $m \in \mathbb{N}_0$.

Tuomet tikimybinėje erdvėje $\big(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \underline{m_H}\big)$ apibrėžiame H^v-reikšmį atsitiktinį elementą $Z(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L})$, kur $\underline{\omega} = (\widehat{\omega}, \omega_1, \dots, \omega_r) \in \underline{\Omega}$, rinkiniu

$$Z(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) = \big(\mathcal{L}(s_1, \widehat{\omega}), \zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \omega_r, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), \dots, \zeta(s, \omega_r, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})\big).$$

Čia,

$$\mathcal{L}(s_1, \widehat{\omega}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)\widehat{\omega}(m)}{m^s}, \quad s_1 \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}},$$

$$\widehat{\omega}(m) = \prod_{\substack{p^l | m \\ p^{l+1} \nmid m}} \widehat{\omega}^l(p), m \in \mathbb{N},$$

o

$$\zeta(s, \alpha_j, \omega_j; \mathfrak{a}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl}\omega_j(m)}{(m + \alpha_j)^s},$$

$j = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, l_j, \quad s \in \mathcal{D}$.

Svarbu akcentuoti tai, kad beveik kiekvienam $\widehat{\omega} \in \widehat{\Omega}$, $\mathcal{L}(s_1, \widehat{\omega})$ užrašoma Oilerio sandauga, t. y.

$$\mathcal{L}(s_1, \widehat{\omega}) = \exp\left\{\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k)\widehat{\omega}^k(p)}{p^{ks}}\right\}.$$

Pažymėkime P_Z atsitiktinio elemento $Z(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, L)$ pasiskirstymą, t. y.

$$P_Z(A) = \underline{m_H}\big(\underline{\omega} \in \underline{\Omega}: Z(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A\big),$$
$A \in \mathcal{B}(H^v)$.

1 teorema. *Tarkime, kad $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ ir egzistuoja tokia teigiama konstanta κ, kad*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \le x} |a(p)|^2 = \kappa.$$

Be to, tegul skaičiai $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Tada, kai $T \to \infty$, P_T silpnai konverguoja į P_Z.

Įrodymo kelias yra gana gerai žinomas ([3], [9], [10], [19]), todėl paaiškinsime tik pagrindinius įrodymo momentus.

1 lema. *Tarkime, kad skaičiai $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Tada*

$Q_T(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}$ meas$\{\tau \in [0, T]:$

$$\left(p^{-i\tau}: p \in \mathcal{P}\right), \left((m+\alpha_1)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0\right), \ldots,$$
$$\left((m+\alpha_r)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0\right) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\Omega),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą $\underline{m}_H$.

Lemos įrodymas pateiktas [12].

Dabar kiekvienam fiksuotam $\sigma_1 > \frac{1}{2}$, pažymėkime

$$u_n(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

ir

$$u_n(m, \alpha_j) = \exp\left\{-\left(\frac{m+\alpha_j}{n+\alpha_j}\right)^{\sigma_1}\right\},$$

$m \in \mathbb{N}_0, \quad n \in N, \quad j = 1, \ldots, r.$

Taip pat apibrėžkime funkcijas

$$\mathcal{L}_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m) u_n(m)}{m^s}$$

ir

$$\zeta_n(s, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl} u_n(m, \alpha_j)}{(m+\alpha_j)^s},$$

$j = 1, \ldots, r, \quad l = 1, \ldots, l_j.$

Nesunku įrodyti, kad eilutė $\mathcal{L}_n(s)$ absoliučiai konverguoja, kai $\sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\right)$ [19], o eilutės $\zeta_n(s, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl})$ absoliučiai konverguoja, kai $\sigma > \frac{1}{2}$.

Apibrėžkime ir atsitiktinius elementus

$$\mathcal{L}_n(s, \hat{\omega}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m) \hat{\omega}(m) u_n(m)}{m^s}, \tag{1}$$

$$\zeta_n(s, \omega_j, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl} \omega_j(m) u_n(m, \alpha_j)}{(m+\alpha_j)^s}, \tag{2}$$

$j = 1, \ldots, r, \quad l = 1, \ldots, l_j.$

Kitame įrodymo žingsnyje nagrinėsime tikimybinių matų

$P_{T,n}(A) = \frac{1}{T}$meas$\Big\{\tau \in [0, T]:$

$$Z_n(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A\Big\}, \ A \in \mathcal{B}(H^{v}),$$

ir

$\hat{P}_{T,n}(A) = \frac{1}{T}$meas$\{\tau \in [0, T]:$

$$Z_n(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^v),$$

silpnąjį konvergavimą, kai $T \to \infty$, kur

$$Z_n(s_1, s, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) = \Big(\mathcal{L}_n(s_1), \zeta_n(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), \ldots,$$
$$\zeta_n(s, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), \ldots, \zeta_n(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), \ldots, \zeta_n(s, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})\Big)$$

ir

$$Z_n(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) = \Big((\mathcal{L}_n(s_1, \hat{\omega}),$$
$$\zeta_n(s, \omega_1, \alpha_1; \mathfrak{a}_{11}), \ldots, \zeta_n(s, \omega_1, \alpha_1; \mathfrak{a}_{1l_1}), \ldots,$$
$$\zeta_n(s, \omega_r, \alpha_r; \mathfrak{a}_{r1}), \ldots, \zeta_n(s, \omega_r, \alpha_r; \mathfrak{a}_{rl_r})\Big).$$

2 lema. *Tarkime, kad skaičiai $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Tada kiekvienam fiksuotam $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$,* matai *$P_{T,n}$ ir $\hat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą P_n erdvėje $(H^v, \mathcal{B}(H^v))$.*

Įrodymas. Naudosime standartinį metodą, kuris remiasi silpnojo tikimybinių matų konvergavimo teorija bei 5.1 teorema [1]. Apibrėžkime funkciją $h_n: \underline{\Omega} \to H^v$ lygybe

$$h_n(\underline{\omega}) = Z_n(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}).$$

Absoliutus (1) ir (2) eilučių konvergavimas parodo, kad funkcija h_n yra tolydi. Be to,

$$h_n\Big(\left(p^{-i\tau}: p \in \mathcal{P}\right), \left((m+\alpha_1)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0\right), \ldots,$$
$$\left((m+\alpha_r)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0\right)\Big) =$$

$Z_n(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L})$.

Taigi, $P_{T,n} = Q_T h_n^{-1}$. Iš čia, h_n tolydumo, 2 lemos ir 5.1 teoremos [1] išplaukia tikimybinio mato $P_{T,n}$ silpnas konvergavimas į $\underline{m}_H h_n^{-1}$, kai $T \to \infty$.

Dabar tegul $h(\underline{\omega}) = \underline{\omega}\,\underline{\omega}_0$ ir fiksuotam $\underline{\omega}_0 \in \underline{\Omega}$, $\underline{\omega} \in \underline{\Omega}$. Tada akivaizdu, jog

$$h_n\left(h((p^{-i\tau}: p \in \mathcal{P}), ((m+\alpha_1)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0),\right.$$
$$\left.\ldots, ((m+\alpha_r)^{-i\tau}: m \in \mathbb{N}_0))\right) =$$

$Z_n(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\omega}_0, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L})$.

Todėl, pakartoję prieš tai minėtus argumentus ir pasinaudoję Haro mato $\underline{m}_H$ invariantiškumu, randame, kad matas $\hat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į $\underline{m}_H h_n^{-1}$. Taigi, abu tikimybiniai matai $P_{T,n}$ ir $\hat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_n = \underline{m}_H h_n^{-1}$.

Teoremos įrodymui reikalingi ir tam tikri aproksimavimo rezultatai. Pažymėkime $\rho_{\mathcal{L}}$, ρ ir ρ_v atitinkamas metrikas erdvėse $H(D_{\mathcal{L}})$, $H(D)$ ir H^v, indukuojančias tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologiją.

Rinkiniams

$$\underline{g} = (g, g_{11}, \ldots, g_{1l_1}, \ldots, g_{r1}, \ldots, g_{rl_r})$$

ir

$$\underline{f} = (f, f_{11}, \ldots, f_{1l_1}, \ldots, f_{r1}, \ldots, f_{rl_r}) \in H^v,$$

$\rho_v\left(\underline{g},\underline{f}\right)$ apibrėžiame metriką

$$\rho_v\left(\underline{g},\underline{f}\right)=\max\left(\rho_{\mathcal{L}}(g,f),\max_{1\le j\le r}\max_{1\le l\le l_j}\rho\left(g_{jl},f_{jl}\right)\right).$$

3 lema. *Tarkime, kad $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Tada beveik visiems $\underline{\omega}\in\underline{\Omega}$,*

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\rho_v\,(Z(s_1+i\tau\,,s+i\tau,\underline{\omega},\underline{\alpha};\underline{\mathfrak{a}},\mathcal{L}),$$
$$Z_n(s_1+i\tau,s+i\tau,\underline{\omega},\underline{\alpha};\underline{\mathfrak{a}},\mathcal{L}))d\tau=0.$$

Be to,

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T(Z(\,s_1+i\tau,s+i\tau,\underline{\alpha};\underline{\mathfrak{a}},\mathcal{L}),$$
$$Z_n(s_1+i\tau,s+i\tau,\underline{\alpha};\underline{\mathfrak{a}},\mathcal{L}))d\tau=0.$$

Įrodymas. Pagal metrikos ρ_v apibrėžimą,

$$\frac{1}{T}\int_0^T\rho_v\big(Z(s_1+i\tau,s+i\tau,\underline{\alpha};\underline{\mathfrak{a}},\mathcal{L}),$$
$$Z_n(s_1+i\tau,s+i\tau,\underline{\alpha};\underline{\mathfrak{a}},\mathcal{L})\big)\,d\tau$$
$$\le\frac{1}{T}\int_0^T\rho_L\big(\mathcal{L}(s_1+i\tau),\mathcal{L}_n(s_1+i\tau)\big)d\tau$$
$$+\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{l_j}\frac{1}{T}\int_0^T\rho\,\big(\zeta(s+i\tau,\alpha_j;\mathfrak{a}_{jl}),$$
$$\zeta_n(s+i\tau,\alpha_j;\mathfrak{a}_{jl})\big)d\tau. \tag{3}$$

Be to, atsižvelgdami į 4.8 lemos iš [19] rezultatą, turime, kad

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\rho_{\mathcal{L}}\big(\mathcal{L}(s_1+i\tau),$$
$$\mathcal{L}_n(s_1+i\tau)\big)d\tau=0, \tag{4}$$

o remdamiesi 2.4 lemos iš [10] įrodymu gauname, jog kiekvienam $j=1,\ldots,r,\ \ l=1,\ldots,l_j$,

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\rho(\,\zeta(s+i\tau,\alpha_j;\mathfrak{a}_{jl}),$$
$$\zeta_n(s+i\tau,\alpha_j;\mathfrak{a}_{jl}))\ d\tau=0. \tag{5}$$

Todėl antrasis lemos tvirtinimas išplaukia iš (3)–(5) lygybių. Panašiai, atsižvelgdami į 4.10 lemą [19], gauname, kad beveik visiems $\widehat{\omega}$,

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\rho_{\mathcal{L}}\,(\mathcal{L}(s_1+i\tau,\widehat{\omega}),$$
$$\mathcal{L}_n(s_1+i\tau,\widehat{\omega}))d\tau=0. \tag{6}$$

Tegul

$$\rho_u(g,f)=\max_{1\le j\le r}\max_{1\le l\le l_j}\rho\big(g_{jl},f_{jl}\big),$$

ir $\widetilde{m}_H$ žymi Haro matą erdvėje

$$\big(\Omega_1\times\cdots\times\Omega_r,\mathcal{B}(\Omega_1\times\cdots\times\Omega_r)\big).$$

Tuomet (2.5) formulė iš [3] tvirtina, kad

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\Big(\big((\zeta(s+i\tau,\omega_1,\alpha_1;\mathfrak{a}_{11}),\ldots,$$
$$\zeta(s+i\tau,\omega_r,\alpha_r;\mathfrak{a}_{rl_r})\big),\big(\zeta_n(s+i\tau,\omega_1,\alpha_1;\mathfrak{a}_{11}),$$
$$\ldots,\zeta_n\left(s+i\tau,\omega_r,\alpha_r;\mathfrak{a}_{rl_r}\right)\big)\Big)d\tau=0.$$

Čia matas $\underline{m}_H$ yra matų $\widehat{m}_H$ ir $\widetilde{m}_H$ sandauga. Taigi, pirmasis lemos tvirtinimas išplaukia iš (6) ir (7) bei (3) nelygybės analogo.

4 lema. *Tarkime, kad $\mathcal{L}\in\mathcal{S}$ ir egzistuoja tokia teigiama konstanta κ, kad*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\pi(x)}\sum_{p\le x}|a(p)|^2=\ \kappa.$$

Be to, skaičiai $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Tada beveik kiekvienam $\underline{\omega}\in\underline{\Omega}$, tikimybiniai matai P_T ir

$$\widehat{P}_T(A)=\tfrac{1}{T}\text{meas}\Big\{\tau\in[0,T]:$$
$$Z(s_1+i\tau,s+i\tau,\underline{\omega},\underline{\alpha};\underline{\mathfrak{a}},\mathcal{L})\in A\Big\},\quad A\in\mathcal{B}(H^v),$$

kai $T\to\infty$, silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą P erdvėje $\big(H^v,\mathcal{B}(H^v)\big)$.

Įrodymas. Klasės $\mathcal{S}$ funkcijų savybės ([15], [17], [19]) leidžia teigti, kad pusplokštumėje $\sigma>\frac{1}{2}$,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T|\mathcal{L}_n(\sigma+it)|^2dt=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|a(m)|u_n^2(m)}{m^{2\sigma}}$$
$$\le\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|a(m)|^2}{m^{2\sigma}}<\infty.$$

Ši įvertis ir Koši integralinė formulė sudaro sąlygas įrodyti, kad kiekvienai kompaktiškai aibei K iš $D_{\mathcal{L}}$ yra teisingas įvertis

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\sup_{s\in K}|\mathcal{L}_n(s_1+i\tau)|\ d\tau\le$$
$$\le C_K\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|a(m)|^2}{m^{2\sigma_K}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

su tam tikrais C_K ir $\sigma_K>\max\left(\frac{1}{2},1-\frac{1}{d_{\mathcal{L}}}\right)$. Iš čia, pagal (2.5) teoremą [10], kompaktiškiems poaibiams K iš D taip pat teisingas įvertis

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\sup_{s\in K}\left|\zeta_n\left(s+i\tau,\alpha_j;\mathfrak{a}_{jl}\right)\right|\,d\tau$$
$$\le B_K\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left|a_{mjl}\right|^2}{(m+\alpha)^{2\widehat{\sigma}_K}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

su $B_K>0$ ir $\widehat{\sigma}_K>\frac{1}{2}$, visiems *j=1, ..., r,* $\ l=1,\ldots,l_j$.

Tegul θ yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas kokioje nors tikimybinėje erdvėje $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ir tolygiai pasiskirstęs intervale [0, 1]. Šioje tikimybinėje erdvėje apibrėžiame H^v-reikšmį atsitiktinį elementą:

$$X_{T,n} = X_{T,n}(s_1, s) = Z_n(s_1 + i\theta T, s + i\theta T, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}).$$

Tada iš 2 lemos turime, kad

$$\underline{X}_{T,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \underline{X}_n, \tag{10}$$

čia $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ reiškia konvergavimą pagal pasiskirstymą, o $\underline{X}_n = \underline{X}_n(s_1, s)$ yra H^v-reikšmis atsitiktinis elementas su pasiskirstymu P_n (P_n – ribinis matas 2 lemoje). Naudodamiesi (8)–(10), įrodome (analogiškai, kaip [10], [19]), kad tikimybių matų šeima $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra tiršta. Pagal Prochorovo (Prokhorov) teoremą, ši šeima yra reliatyviai kompaktiška. Vadinasi, iš kiekvienos šeimos sekos galime išskirti posekį $\{P_{n_k}\}$, kai $k \to \infty$, silpnai konverguojantį į kurį nors tikimybinį matą P erdvėje $(H^v, \mathcal{B}(H^v))$. Taigi, egzistuoja tokia seka $\underline{X}_{n_k}$ ir tikimybinis matas P, kad

$$\underline{X}_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{11}$$

Erdvėje $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ apibrėžkime dar vieną H^v-reikšmį atsitiktinį elementą

$$\underline{X}_T = \underline{X}(s_1, s) = Z(s_1 + i\theta T, s + i\theta T, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}).$$

Tada, remdamiesi 3 lema, gauname, kad kiekvienam $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}\big(\rho_v(\underline{X}_T, \underline{X}_{T,n}) \geq \epsilon\big) = 0.$$

Ši bei (10) ir (11) lygybės ir 4.2 teorema [1] leidžia tvirtinti, kad

$$\underline{X}_T \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P.$$

Tai ekvivalentu tvirtinimui, kad P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į P. Be to, šis sąryšis rodo, kad matas P nepriklauso nuo posekio X_{n_k} pasirinkimo. Vadinasi,

$$\underline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{12}$$

Lieka įrodyti, kad ir $\widehat{P}_T$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P. Taigi, naudodami H^v-reikšmius atsitiktinius elementus

$$Z_n(s_1 + i\theta T, s + i\theta T, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}),$$
$$Z(s_1 + i\theta T, s + i\theta T, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L})$$

ir (12) sąryšį, gauname, kad matas $\widehat{P}_T$, kai $T \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į P.

1 teoremos įrodymas. Remiantis 4 lema, užtenka parodyti, kad matas P sutampa su P_Z. Tegul A yra mato $\widehat{P}_T$ tolydumo aibė. Tikimybinėje erdvėje $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \underline{m}_H)$, apibrėžkime atsitiktinį dydį ξ formule

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai } Z(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A, \\ 0, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Iš 4 lemos turime sąryšį

$$\lim_{T\to\infty} \widehat{P}_T(A) = P(A). \tag{13}$$

Iš atsitiktinio dydžio ξ apibrėžimo išplaukia, kad

$$\begin{aligned} E\xi &= \int_{\underline{\Omega}} \xi \mathrm{d}\, \underline{m}_H = \\ &= \underline{m}_H\big(\underline{\omega} \in \underline{\Omega} : Z(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A\big) \\ &= P_Z(A). \end{aligned} \tag{14}$$

Čia $E\xi$ – atsitiktinio dydžio vidurkis.

Dabar kiekvienam $\tau \in \mathbb{R}$ apibrėžiame transformaciją Φ_τ formule

$$\Phi_\tau(\underline{\omega}) = \big((p^{-i\tau} : p \in \mathcal{P}),$$
$$((m + \alpha_1)^{-i\tau}((m + \alpha_1)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0), \ldots,$$
$$((m + \alpha_r)^{-i\tau} : m \in \mathbb{P}_0)\big)\, \underline{\omega}, \quad \underline{\omega} \in \underline{\Omega}.$$

Tada, pagal 7 lemą [6], mačių matą išsaugančių transformacijų grupė $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra ergodinė. Taigi, atsitiktinis procesas $\xi\big(\Phi_\tau(\underline{\omega})\big)$ taip pat yra ergodinis. Todėl pagal klasikinę Birkhofo-Chinčino (Birkhoff-Khintchine) teoremą,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi\big(\Phi_\tau(\underline{\omega})\big) \mathrm{d}\tau = E\xi. \tag{15}$$

Iš kitos pusės, remdamiesi ξ ir Φ_τ apibrėžimais, gauname, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi\big(\Phi_\tau(\underline{\omega})\big) \mathrm{d}\tau =$$
$$\frac{1}{T} \mathrm{meas}\big\{\tau \in [0, T] : Z(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A\big\}.$$

Todėl iš čia, (14) ir (15) lygybių išplaukia, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas}\, \{\tau \in [0, T] :$$
$$Z(s_1 + i\tau, s + i\tau, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A\big\} = P_Z(A).$$

Taigi, iš $\widehat{P}_T$ apibrėžimo ir (13) lygybės gauname, kad $P(A) = P_Z(A)$ visoms mato P tolydumo aibėms A. Kadangi visos atvirosios aibės sudaro apibrėžiančią klasę, turime, kad $P = P_Z$.

Mato P_Z atrama

Universalumo teoremos įrodymui reikalingas mato P_Z išreikštinis pavidalas. Primename, kad *mato P_Z atrama* yra tokia minimali uždara aibė $S_{P_Z} \subset H^v$, kad $P_Z(S_{P_Z}) = 1$. Aibei S_{P_Z} priklauso visos funkcijos $\underline{g} \in H^v$, kurių kiekvienai atvirai aplinkai G yra teisinga nelygybė $P_Z(G) > 0$.

Be to, atsitiktinio elemento X atrama yra vadinama jo skirstinio P_X atrama ir žymima S_X.
Tegul
$S_{\mathcal{L}} = \{g \in H(D_{\mathcal{L}}): g(s) \neq 0$ arba $g(s) \equiv 0\}$.

2 teorema. *Tarkime, kad $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ ir tenkinamas reikalavimas:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p\le x} |a(p)|^2 = \kappa.$$

Tegul skaičiai $\alpha_1,..,\alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$ ir $\mathrm{rank}(A_j) = l_j$, $j = 1, \dots, r$. *Tada mato P_Z atrama yra aibė $S_{\mathcal{L}} \times H^u(D)$.*

Įrodymas. Tegul

$$H^v = H(D_{\mathcal{L}}) \times H^u(D). \qquad (16)$$

Žinoma, kad analizinių funkcijų erdvės $H(D_{\mathcal{L}})$ ir $H^u(D)$ yra separabilios. Tuomet iš (16) turime [1], kad

$$\mathcal{B}(H^v) = \mathcal{B}(H(D_{\mathcal{L}})) \times \mathcal{B}(H^u(D)).$$

Todėl pakanka matą $P_Z(A)$ nagrinėti aibėse, turinčiose pavidalą $A = A_1 \times A_2$, $A_1 \in H(D_{\mathcal{L}})$ ir $A_2 \in H^u(D)$. Kadangi matas $\underline{m}_H$ yra matų $\widehat{m}_H$ ir $\widetilde{m}_H$ sandauga, tai iš mato P_Z apibrėžimo turime

$$\begin{aligned} P_z(A) &= \underline{m}_H(\underline{\omega} \in \underline{\Omega}: Z(s_1, s, \underline{\omega}, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \mathcal{L}) \in A) \\ &= \underline{m}_H(\underline{\omega} \in \underline{\Omega}: \ \mathcal{L}(s_1, \widehat{\omega}) \in A_1, \\ &\quad (\zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_r, \omega_r; \mathfrak{a}_{rl_r})) \in A_2) \\ &= \widehat{m}_H(\widehat{\omega} \in \widehat{\Omega}: \mathcal{L}(s_1, \widehat{\omega}) \in A_1) \\ &= \widetilde{m}_H((\omega_1, \dots, \omega_r) \in \Omega_1 \times \dots \Omega_r: \qquad (17) \\ &\quad (\zeta(s, \alpha_1, \omega_1, \mathfrak{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_r, \omega_r, \mathfrak{a}_{rl_r})) \in A_2). \end{aligned}$$

Yra žinoma (3 teiginys iš [15]), kad atsitiktinio elemento $\mathcal{L}(s_1, \widehat{\omega})$ atrama yra aibė $S_{\mathcal{L}}$. H. Nagoši ir J. Štaudingo darbe [15] nagrinėtas atsitiktinis elementas, įgyjantis reikšmes iš $H(D_{\mathcal{L},N})$, kur

$$D_{\mathcal{L},N} = \left\{s \in \mathbb{C}: \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_{\mathcal{L}}}\right) < \sigma < 1, \ |t| < N\right\},$$

tačiau įrodymas galioja visai $D_{\mathcal{L}}$ juostai. Taigi, $S_{\mathcal{L}}$ yra toks minimalus uždaras $H(D_{\mathcal{L}})$ poaibis, kad

$$\widehat{m}_H(\widehat{\omega} \in \widehat{\Omega}: \ \mathcal{L}(s, \widehat{\omega}) \in S_{\mathcal{L}}) = 1. \quad (18)$$

Be to, laikantis teoremos reikalavimo, buvo įrodyta [8], kad $H^u(D)$-reikšmio atsitiktinio elemento atrama $\left(\zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{a}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_r, \omega_r; \mathfrak{a}_{rl_r})\right)$ yra aibė $H^u(D)$, t.y., $H^u(D)$ yra toks minimalus uždaras $H^u(D)$ poaibis, kad
$\widetilde{m}_H((\omega_1, \dots, \omega_r) \in \ \Omega_1 \times \dots \times \Omega_r$:
$(\zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{a}_{11}), \dots, \zeta(, \alpha_r, \omega_r; \mathfrak{a}_{rl_r})) \in H^u(D)) = 1$.
Taigi, iš čia bei (18) ir (17) lygybių išplaukia teoremos patvirtinimas.

Pagrindinės teoremos įrodymas

Pagrindinės teoremos apie mišrųjį jungtinį universalumą įrodymas remiasi 1 ir 2 teoremomis bei Mergeliano (Mergelyan) teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais [13], [21].
Pagal Mergeliano teoremą, egzistuoja tokie polinomai $p(s)$ ir $p_{jl}(s)$, kad

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (19)$$

ir

$$\sup_{1\le j\le r} \sup_{1\le l\le l_j} \sup_{s\in K_{jl}} |f_{jl}(s) - p_{jl}(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (20)$$

Kadangi $f(s) \neq 0$ aibėje K, turime, kad ir $p(s) \neq 0$ aibėje K, jei ε yra pakankamai mažas. Šis teiginys ir Mergeliano teorema patvirtina, jog egzistuoja toks polinomas $q(s)$, kad

$$\sup_{s\in K} |p(s) - \mathrm{e}^{q(s)}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Taigi, (19) nelygybė leidžia matyti, kad

$$\sup_{s\in K} |f(s) - \mathrm{e}^{q(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (21)$$

Apibrėžiame aibę

$$G = \Big\{(g, g_{11}, \dots, g_{rl_r}) \in H^v: \sup_{s\in K} |g(s) - \mathrm{e}^{q(s)}| < \frac{\varepsilon}{2}\Big\}.$$

$$\sup_{1\le j\le r} \sup_{1\le l\le l_j} \sup_{s\in K_{jl}} |g_{jl}(s) - p_{jl}(s)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tuomet, remdamiesi 2 teorema, turime, kad rinkinys, $\left(\mathrm{e}^{q(s)}, p_{11}(s), \dots, p_{rl_r}(s)\right)$ yra mato P_Z atramos elementas. Vadinasi, G yra mato P_Z atramos atviroji aplinka. Iš atramos savybių turime, kad $P_Z(G) > 0$. Iš šio tvirtinimo ir 1 teoremos gauname, kad

$$\liminf_{T\to\infty} P_T(G) \ge P_Z(G) > 0,$$

O iš mato P_Z ir aibės G apibrėžimų gauname nelygybę

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas}\Big\{\tau \in [0, T]: \sup_{s\in K} |\mathcal{L}(s + i\tau) - e^{q(s)}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{1\le j\le r} \sup_{1\le l\le l_j} \sup_{s\in K_{jl}} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl}) - p_{jl}(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\Big\} > 0.$$

Lieka $e^{q(s)}$ pakeisti funkcija $f(s)$, o polinomus $p_{jl}(s)$ funkcijomis $f_{jl}(s)$. Tuomet iš (21) ir (20) nelygybių gauname pagrindinės teoremos patvirtinimą.

Rezultatai ir išvados

Straipsnyje nagrinėta mišriojo universalumo savybė, koncentruojantis ne į dviejų funkcijų (iš kurių viena turi sandaugą pagal pirminius skaičius, o kita – ne) mišrųjį universalumą, o į *funkcijų rinkinių* mišrųjį universalumą. Įrodyta teorema apie analizinių funkcijų rinkinio aproksimavimą Selbergo klasės L funkcijų (turinčių Oilerio sandaugą pagal pirminius skaičius) ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų (neturinčių Oilerio sandaugos) postūmiais.

Įrodyta teorema yra *tolydaus tipo*, kai dzeta ir L funkcijų postūmiai įgyja bet kokias realias reikšmes. Šį darbą galima pratęsti, įrodant *diskretaus tipo* teoremą, kai postūmiai įgyja reikšmes iš diskrečios sekos (tarkime, aritmetinės progresijos). Tyrimus tikslinga tęsti ir su kitomis parametro α reikšmėmis.

Mišrusis dzeta funkcijų universalumas gali būti taikomas mišraus jungtinio šių funkcijų funkcinio nepriklausomumo tyrimui.

Literatūra

1. P. Billingsley, 1999, *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York; second ed., Willey-Interscience.
2. A. O. Gel'fond, 1949, On the algebraic independence of transcendental numbers of certainclasses. *Uspekhi Mat. Nauk*, 4(5). P. 14–48.
3. J. Genys, R. Macaitienė, S. Račkauskienė, D. Šiaučiūnas, 2010, A mixed joint universality theorem for zeta-functions. *Math. Model. Anal.*, 15(4). P. 431–446.
4. M. Jasas, 2020, Mišrusis jungtinis Selbergo klasės L funkcijų ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų universalumas. *Magistro darbas,* Šiaulių universitetas.
5. A. Javtokas, A. Laurincikas, 2006, On the periodic Hurwitz zeta-function. *Hardy Ramanujan Journal*, 29. P. 18–36.
6. R. Kačinskaitė, A. Laurinčikas, 2011, The joint distribution of periodic zeta-functions. *Stud. Scien. Math. Hungarica*, 48(2). P. 257–279.
7. A. Laurinčikas, 1996, *Limit Theorems for Riemann Zeta–Function*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, etc.
8. A. Laurinčikas, D. Skerstonaitė, 2009, Joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions. II. *New Directions in Value distribution Theory of Zeta and L-functions, Proc. Würzburg Conf., 2008*. P. 161–169.
9. A. Laurinčikas, D. Šiaučiūnas, 2012, A mixed joint universality theorem for zeta-functions. III, *Analytic Prob. Methods Number Theory, J. Kubilius Memorial Volume,* A. Laurinčikas et al. (eds.), TEV, Vilnius. P. 185–195.
10. R. Macaitienė, 2012, On joint universality for the zeta-functions of new forms and periodic Hurwitz zeta-functions. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, B34. P. 217–233.
11. R. Macaitienė, 2012, On the value distribution of *L*-functions from the Selberg class*. J. Math. Sciences,* 180(5). P. 599–609.
12. K. Matsumoto, 2015, A survey on the theory of universality for zeta and *L*-functions. *Number Theory: Plowing and Starring through High Wave forms. Proceedings of the 7th China-Japan Seminar. Series on Number Theory and Its Applications*, 11, World Scientific Publ. P. 95–144.
13. S. N. Mergelyan, 1952, Uniform approximations to functions of complex variable. *Uspekhi. Mat. Nauk*, 7. P. 31–122.
14. H. Mishou, 2007, The joint value distribution of the Riemann zeta-function. *Lith. Math. J.*, 47. P. 32–47.
15. H. Nagoshi, J. Steuding, 2010, Universality for *L*-functions in the Selberg class. *Lith. Math. J.*, 50 (163), P. 293–311.
16. V. Pocevičienė, D. Šiaučiūnas, 2014, A mixed joint universality theorem for zeta-functions. II. *Math. Model. Anal.,* 19. P. 52–65.
17. A. Perelli, 2005, A survey of the Selberg class of L-functions*.* I. *Milan J. Math*., 73. P. 19–52.
18. J. Sander, J. Steuding, 2006, Joint universality for sums and products of Dirichlet *L*-functions. *Analysis*, 26. P. 295–312.
19. J. Steuding, 2007, *Value distribution of L-Functions*. Lecture Notes Math, Vol. 1877, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
20. S. Voronin, 1975, Theorem on the 'universality' of the Riemann zeta-function. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 39. P. 475–486.
21. J. L. Walsh, 1960, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*. Amer. Math. Soc., Colloq. Publ.

Summary

MIXED JOINT UNIVERSALITY FOR SELBERG CLASS *L*-FUNCTIONS AND PERIODIC HURWITZ ZETA FUNCTIONS

Mindaugas Jasas, Renata Macaitienė

The so-called mixed joint universality was initiated by H. Mishou who in 2007 obtained the joint universality for the Riemann and Hurwitz zeta functions. In a wide sense, the mixed joint universality is understood as a joint universality for zeta and *L*-functions having and having no Euler product.

In the paper, the investigation on the universality question for the collections of some zeta and *L*-functions is continued. More precisely, a new result on mixed joint universality property for *L*-functions from the Selberg class (functions defined by Dirichlet series and satisfying certain specific hypotheses (including the Euler product)) and periodic Hurwitz zeta functions (that have no Euler product) is given. The result of mixed universality can be used to prove a functional independence properties of these functions.

The paper has been prepared on the basis of M. Jasas' Master Thesis [4].

Keywords: *Selberg class, periodic Hurwitz zeta functions, universality.*

Santrauka

MIŠRUSIS JUNGTINIS SELBERGO KLASĖS *L* FUNKCIJŲ IR PERIODINIŲ HURVICO DZETA FUNKCIJŲ UNIVERSALUMAS

Mindaugas Jasas, Renata Macaitienė

2007 m. H. Mišu (Mishou) pirmasis įrodė mišriojo universalumo teoremą Rymano ir Hurvico dzeta funkcijoms. Plačiąja prasme mišrusis universalumas suprantamas kaip jungtinis funkcijų, turinčių ir neturinčių Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius, universalumas.

Straipsnyje tęsiamas universalumo klausimo dzeta ir *L* funkcijų rinkiniams nagrinėjimas. Tiksliau, įrodoma Selbergo klasės *L* funkcijų (užrašomų Dirichlė eilute ir tenkinančių tam tikras specifines sąlygas (tarp kurių ir Oilerio sandaugos egzistavimas)) ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų (kurios neturi Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius) mišraus universalumo savybė. Mišraus universalumo rezultatas gali būti panaudotas nagrinėtų funkcijų funkcinio nepriklausomumo savybės įrodymui.

Straipsnis parengtas M. Jaso magistro darbo pagrindu [4].

Prasminiai žodžiai: *Selbergo klasė, periodinės Hurvico dzeta funkcijos, universalumas.*

Įteikta 2020-08-12

Priimta 2020-10-30