ISSN 1648-8776
JAUNŲJŲ MOKSLININKŲ DARBAI. Nr. 50 (2). 2020 Doi: https://doi.org/10.21277/jmd.v50i2.296

ELIPSINIŲ KREIVIŲ *L* FUNKCIJŲ IŠVESTINĖS DISKRETUSIS UNIVERSALUMAS

Daina Baravykienė[1], Antanas Garbaliauskas[2], Virginija Garbaliauskienė[3]
[1]Radviliškio technologijų ir verslo mokymo centro Šeduvos technologijų ir verslo mokymo skyrius,
[2]Šiaulių valstybinė kolegija, [3]Šiaulių universitetas
E. p.: dainuse@gmail.com, a.garbaliauskas@svako.lt, virginija.garbaliauskiene@su.lt

Įvadas

Tegu E elipsinė kreivė virš racionaliųjų skaičių kūno duota Vejerštraso (Weierstrass) lygtimi

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in \boldsymbol{Z}.$$

Pažymėkime $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0$ kreivės E diskriminantą. Tada kubinio trinario $x^3 + ax + b$ šaknys yra skirtingos ir kreivė E yra nesinguliarioji. Pavyzdžiui, nesinguliariosios elipsinės kreivės yra $y^2 = x^3 - x$ ir $y^2 = x^3 + x$; singuliariosios – $y^2 = x^3$ ir $y^2 = x^3 + x^2$, žr. [9].

Kiekvienam pirminiam p pažymėkime $v(p)$ lyginio

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b (\mathrm{mod}\, p)$$

sprendinių skaičių. Tegu $\lambda(p) = p - v(p)$, o $s = \sigma + it$ – kompleksinis kintamasis. Tada elipsinės kreivės L funkcija apibrėžiama Oilerio sandauga

$$L_E(s) = \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1}.$$

Remiantis Hasės (Hasse) įverčiu

$$|\lambda(p)| \leq 2\sqrt{p},$$

begalinė sandauga, apibrėžianti funkciją $L_E(s)$, konverguoja absoliučiai ir tolygiai pusplokštumės $D = \left\{ s \in \mathbf{C} : \sigma > \frac{3}{2} \right\}$ kompaktiniuose poaibiuose ir apibrėžia analizinę, nelygią nuliui funkciją. Šioje srityje funkcija $L_E(s)$ gali būti išreikšta Dirichlė eilute

$$L_E(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m)}{m^s},$$

čia $\lambda(m)$ yra multiplikatyvioji funkcija, o eilutė taip pat absoliučiai konverguoja srityje D.

Funkcijos $L_E(s)$ analizinis pratęsimas glaudžiai susijęs su tam tikrų modulinių formų L funkcijomis. Funkcijos $L_E(s)$ analizinės savybės sutampa su svorio 2 naujųjų formų L funkcijų savybėmis:

1 savybė. Funkcija $L_E(s)$ analitiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą (yra sveikoji funkcija) ir tenkina funkcinę lygtį

$$\left(\frac{\sqrt{q}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) L_E(s) = \eta \left(\frac{\sqrt{q}}{2\pi}\right)^{2-s} \Gamma(2-s) L_E(2-s),$$

čia q – teigiamas sveikasis skaičius, sudarytas iš determinanto Δ pirminių daugiklių, $\eta = \pm 1$, o $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija.

2 savybė. Furjė eilutė

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(m) e^{2\pi i m z}$$

yra svorio 2 naujoji forma kurio nors Hekės pogrupio $\Gamma_0(q)$ atžvilgiu.

Pirmieji šias savybes, kurios ilgą laiką buvo žinomos kaip hipotezės, įrodė R. Teiloras (Taylor) ir A. Vailsas (Wiles) [7] pusiau stabilioms elipsinėms kreivėms. C. Brioilis (Breuil), B. Konradas (Conrad), F. Daimondas (Diamond) ir R. Teiloras [2] visiškai įrodė hipotezes 2001 m.

Kaip ir dauguma klasikinių dzeta ir L funkcijų, taip ir mūsų nagrinėjama elipsinių kreivių L funkcija, yra universali Voronino prasme. Liniko-Ibragimovo hipotezė sako, kad visos funkcijos, tam tikroje pusplokštumėje apibrėžtos Dirichlė eilute, analitiškai pratęsiamos į kairę nuo absoliutaus konvergavimo pusplokštumės ir tenkinančios tam tikras didėjimo sąlygas, yra universalios Voronino prasme.

Pažymėkime $\text{meas}\{A\}$ mačiosios aibės $A \subset \mathbf{R}$ Lebego matą. Kai $T > 0$, tegul

$$\nu_T(...) = \frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0,T]:...\},$$

čia vietoj daugtaškio įrašomos sąlygos, kurias tenkina τ. Tegul $\mathbf{C}$ žymi kompleksinę plokštumą, o sritis $D = \left\{ s \in \mathbf{C} : 1 < \sigma < \frac{3}{2} \right\}$. Pirmąją universalumo teoremą elipsinių kreivių *L* funkcijai įrodė A. Laurinčikas ir V. Garbaliauskienė.

A teorema [4]. *Tarkime, kad* E *yra nesinguliarioji elipsinė kreivė virš racionaliųjų skaičių kūno* **Q**. *Tegul K yra juostos D kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o* $f(s)$ *yra tolydi nelygi nuliui funkcija poaibyje K, kuri yra analizinė K viduje. Tada kiekvienam ε >0*

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left(\sup_{s\in K} |L_E(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Pastaroji teorema rodo, kad egzistuoja be galo daug postūmių $L_E(s+i\tau)$, kurie aproksimuoja duotąją analizinę funkciją $f(s)$. Aibė tokių τ turi teigiamą apatinį tankį, tačiau nėra žinoma nė viena konkreti τ reikšmė. Todėl ši teorema nėra efektyvi.

2006 m. įrodytas elipsinių kreivių *L* funkcijų išvestinės tolydusis universalumas.

B teorema ([6]). *Tarkime, kad* E *yra nesinguliarioji elipsinė kreivė virš racionaliųjų skaičių kūno* **Q**. *Tegul K yra juostos D kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o* $f(s)$ *yra tolydi funkcija poaibyje K, kuri yra analizinė K viduje. Tada kiekvienam ε >0*

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left(\sup_{s\in K} |L'_E(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Šioje teoremoje, skirtingai negu A teoremoje, funkcija $f(s)$ gali būti lygi nuliui.

Suformuluotos universalumo teoremos yra tolydaus tipo: postūmio menamoji dalis τ kinta tolydžiai intervale [0, *T*]. Be šio tipo teoremų egzistuoja universalumo teoremų diskretusis atvejis. Pirmieji Rymano dzeta funkcijos diskretųjį universalumą nagrinėjo S. Voroninas (Voronin) (1979) ir B. Bagči (Bagchi) (1981). Diskrečiojo universalumo atveju postūmio menamoji dalis įgyja reikšmes iš diskrečiosios aibės, pavyzdžiui, iš aritmetinės progresijos. Tegu $N \in \mathbf{N}$ ir

$$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1}\#\{0 \le m \le N:...\},$$

čia vietoj daugtaškių įrašomos sąlygos, kurias tenkina *m*, o $h > 0$ yra fiksuotas skaičius. Tarkime, kad skaičius *h* yra pasirenkamas taip, kad $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ būtų iracionalusis skaičius visiems $k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$. Pavyzdžiui, $h = \pi$ arba $h = 2\pi$, nes pagal Ermito-Lindemano (Hermite-Lindemann) teoremą, e^q yra iracionalusis, kai $q \neq 0$ – algebrinis skaičius.

Elipsinių kreivių *L* funkcijų diskretųjį universalumą įrodė V. Garbaliauskienė ir A. Laurinčikas 2005 metais.

C teorema ([5]). *Tarkime, kad* $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ *yra iracionalusis skaičius visiems* $k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$. *Tegu K yra juostos D kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o* $f(s)$ *yra tolydi nelygi nuliui funkcija poaibyje K, kuri yra analizinė K viduje. Tada kiekvienam ε >0*

$$\liminf_{N\to\infty} \mu_N\left(\sup_{s\in K} |L_E(s+imh) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Šioje teoremoje matome, jog aibė { *m*: *m* = 0, 1, ...} yra tokia, kad postūmiai $L_E(s+imh)$ aproksimuoja duotąją analizinę funkciją, yra pakankamai gausi: turi teigiamą apatinį tankį.

Tikslas – įrodyti elipsinių kreivių *L* funkcijų išvestinės diskretųjį universalumą.

1 teorema. *Tarkime, kad* $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ *yra iracionalusis skaičius visiems* $k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$. *Tegu K yra juostos D kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o* $f(s)$ *yra tolydi nelygi nuliui funkcija poaibyje K, kuri yra analizinė K viduje. Tada kiekvienam ε >0*

$$\liminf_{N\to\infty} \mu_N\left(\sup_{s\in K} |L'_E(s+imh) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Teoremos įrodymas remiasi diskrečiąja ribine teorema tikimybinių matų silpnojo konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje, eilučių reikšmių aibių tankiu (tirštumu) analizinių funkcijų erdvėje ir Mergeliano (Mergelyan) teorema.

Diskrečioji ribinė teorema funkcijai $L'_E(s)$

Pažymėkime *H*(*D*) analizinių srityje *D* funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija, $\mathcal{B}(S)$ – metrinės erdvės *S* Borelio (Borel) aibių klasę. Tegu $\gamma = \{s \in \mathbf{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje $\mathbf{C}$. Apibrėžkime begaliniamatį torą

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

čia $\gamma_p = \gamma$ kiekvienam pirminiam p. Remiantis Tichonovo (Tichonov) teorema, su sandaugos topologija ir pataškine daugyba begaliniamatis toras Ω yra kompaktinė tolopoginė Abelio (Abel) grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haro (Haar) matas m_H. Taip gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Pažymėkime $\omega(p)$ elemento $\omega \in \Omega$ projekciją koordinatinėje erdvėje γ_p. Čia $\{\omega(p)\}$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, seka.

Tegul $D = \left\{ s \in \mathbf{C} : 1 < \sigma < \frac{3}{2} \right\}$ yra juosta kompleksinėje plokštumoje. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame $H(D)$ – reikšmį atsitiktinį elementą $L_E'(s,\omega)$ formule

$$L_E'(s,\omega) = \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega(p)}{p^s} + \frac{\omega^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1} \times$$
$$\times \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}$$
$$\times \left(- \sum_{p|\Delta} \left(\frac{\lambda(p)\omega(p)\log p}{p^s} - \frac{2\omega^2(p)\log p}{p^{2s-1}} \right)^{-1} \right.$$
$$\times \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega(p)}{p^s} + \frac{\omega^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1}$$
$$\left. - \sum_{p|\Delta} \frac{\lambda(p)\omega(p)\log p}{p^s} \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1} \right).$$

Aptarsime tikimybinio mato

$$P_N(A) \overset{def}{=} \mu_N(L'_E(s + imh) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D))$$

silpnąjį konvergavimą.

2 teorema. *Tarkime, kad* $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ *yra iracionalusis skaičius visiems* $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. *Tada tikimybinis matas* P_N *silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento* $L'_E(s,\omega)$ *skirstinį, kai* $N \to \infty$.

Įrodymas. Apibrėžkime tikimybinį matą

$$Q_N(A) = \mu_N(L_E(s + imh) \in A), \ A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

V. Garbaliauskienė ir A. Laurinčikas [4] įrodė, kad tikimybinis matas Q_N silpnai konverguoja į $H(D)$ – reikšmio atsitiktinio elemento

$$L_E(s,\omega) = \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega(p)}{p^s} + \frac{\omega^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1} \times$$
$$\prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

skirstinį Q_{L_E}, kai $N \to \infty$. Tolydžioji funkcija $u : H(D) \to H(D)$ apibrėžiama formule

$$u(g(s)) = g'(s), \ g(s) \in H(D).$$

Mato Q_N silpnasis konvergavimas ir 5.1 teorema iš [1] rodo, kad tikimybinis matas P_N silpnai konverguoja į $Q_{L_E} u^{-1}$, kai $N \to \infty$. Kadangi $Q_{L_E} u^{-1}$ yra atsitiktinio elemento $L'_E(s,\omega)$ skirstinys, teorema įrodyta.

Atsitiktinio elemento $L'_E(s,\omega)$ atrama

Erdvė $H(D)$ yra separabili. Todėl atsitiktinio elemento $L'_E(s,\omega)$ skirstinio $P_{L_E'}$ atrama yra minimali uždara aibė $S_{P_{L_E'}} \subseteq H(D)$ tokia, kad $P_{L_E'}\left(S_{P_{L_E'}}\right) = 1$. Skirstinio $P_{L_E'}$ atramą vadiname atsitiktinio elemento $L'_E(s,\omega)$ atrama.

Norėdami įrodyti pagrindinę teoremą, turime žinoti mato $P_{L'_E}$ atramą. Pirmiausia apibrėžkime atsitiktinio elemento $L_E(s, \omega)$ atramą. Tegul

$$S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ arba } g(s) \equiv 0\}.$$

3 lema. *Atsitiktinio elemento* $L_E(s, \omega)$ *atrama yra aibė S.*

Lemos įrodymą galima rasti V. Garbaliauskienės ir A. Laurinčiko darbe [4], 5 lema.

Pateiksime erdvės $H(D)$ metrikos su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija apibrėžimą. Yra žinoma [3], kad juostos D kompaktiniuose poaibiuose egzistuoja seka $\{K_m : m \in \mathbf{N}\}$, tokia, kad

$$D = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m,$$

$K_m \subset K_{m+1}$, $m \in \mathbf{N}$, ir kiekvienam juostos D kompaktui K egzistuoja m, su kuriuo $K \subset K_m$. Tegul $g_1, g_2 \in H(D)$, tada erdvės $H(D)$ metrika su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija apibrėžiama formule

$$\rho(g_1, g_2) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{\rho_m(g_1, g_2)}{1 + \rho_m(g_1, g_2)},$$

čia $\rho_m(g_1, g_2) = \sup_{s \in K} |g_1(s) - g_2(s)|$.

Pateiksime Mergeliano teoremą apie analizinių funkcijų aproksimavimą daugianariais [8].

4 lema (Mergeliano teorema). *Tarkime, kad K kompleksinės plokštumos kompaktinė aibė turinti jungųjį papildinį, o funkcija g(s) yra tolydi aibėje K ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$ *egzistuoja toks daugianaris p(s), kad*

$$\sup_{s \in K} |g(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

5 teorema. *Atsitiktinio elemento* $L'_E(s, \omega)$ *atrama yra erdvė H(D).*

Įrodymas. Tegu funkcija $u : S \to H(D)$, apibrėžta formule

$$u(g(s)) = g'(s),\ g(s) \in S.$$

Iš Koši integralinės formulės gauname, kad funkcija u yra tolydi. Todėl kiekvienai atvirai aibei $G \subset H(D)$ aibė $u^{-1}G$ yra erdvės S atviras poaibis. Parodykime, kad $u^{-1}G$ nėra tuščia aibė. Tegul $g \in u^{-1}G$. Remdamiesi funkcijos u apibrėžimu, gauname, kad $u(g) \in G$.

Tegu K yra juostos D kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu. Pagal 4 lemą, kompakto K viduje egzistuoja daugianaris $p(s)$, kuris nurodytu tikslumu tolygiai aproksimuoja funkciją $u(g(s))$. Taigi, $p(s) \in G$. Gauname, kad srityje D egzistuoja daugianaris $q(s) \in u^{-1}(p(s)$, be to, $q(s) \neq 0$. Tai parodo, kad aibė $u^{-1}G$ yra netuščia.

1 teoremos įrodymas

Remiantis 2 teorema, tikimybinis matas P_N silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $L'_E(s, \omega)$ skirstinį $P_{L'_E}$, kai $N \to \infty$. Vadinasi, remdamiesi 2.1 teorema iš [1], gauname, kad visoms atviroms aibėms $A \subset H(D)$,

$$\liminf_{N \to \infty} P_N(A) \geq P_{L'_E}(A) \qquad (1)$$

Pagal 4 lemos tvirtinimą, egzistuoja daugianaris $p(s)$ toks, kad

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Tegul G yra erdvės $H(D)$ atvira aibė, apibrėžta formule

$$G = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Kadangi mato $P_{L'_E}$ atrama, sudaryta iš visų $g \in H(D)$, tokių, kad kiekvienai g aplinkai G teisinga nelygybė $P_{L'_E}(G) > 0$, ir pagal 5 teoremos tvirtinimą $p(s) \in S_{P_{L'_E}}$, gauname, kad $P_{L'_E}(G) > 0$. Todėl iš (1) nelygybės gauname, kad

$$\liminf_{N \to \infty} \mu_N \left(\sup_{s \in K} \left| L'_E(s + imh) - f(s) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right) > 0. \qquad (3)$$

Nelygybė (2) reiškia, kad

$$\left\{ 0 \leq m \leq N : \sup_{s \in K} \left| L'_E(s + imh) - f(s) \right| < \varepsilon \right\}$$

$$\supseteq \left\{ 0 \leq m \leq N : \sup_{s \in K} \left| L'_E(s + imh) - p(s) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Šios nelygybės kartu su (3) formule parodo, kad

$$\liminf_{N \to \infty} \mu_N \left(\sup_{s \in K} \left| L'_E(s + imh) - f(s) \right| < \varepsilon \right) > 0.$$

Teorema įrodyta.

Išvados

1. Elipsinių kreivių L funkcijų analizinės savybės sutampa su svorio 2 naujųjų formų L funkcijų savybėmis.
2. Funkcijai $\bar{L'_E}(s)$ galioja diskrečioji ribinė teorema tikimybinių matų silpnojo konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje, kuria remiasi universalumo įrodymas.
3. Elipsinių kreivių L funkcijų išvestinei galioja diskrečiojo universalumo nelygybė.

Literatūra

1. Billingsley P., 1968, *Convergence of probability measures*. New York: John Wiley.
2. 2. Breuil C., Conrad B., Diamond F., Taylor R., 2001, On the modularity of elliptic curves over **Q**: wild 3-adic exercises. *J. Amer. Math. Soc*. Vol. 14. P. 843–939.
3. Conway J. B., 1978, *Functions of One Complex Variable*. New York: Springer.
4. Garbaliauskienė V., Laurinčikas A., 2005, Some analytic properties for *L*-functions of elliptic curves. *Proc. Inst. Math. NAN Belarus*. Vol. 13. No 1. P. 75–82.
5. Garbaliauskienė V., Laurinčikas A., 2005, Universality theorems for *L*-functions of elliptic curves. *Fizikos ir matematikos fakulteto seminaro darbai*. Vol. 8. P. 14–25.
6. Garbaliauskienė V., Laurinčikas A., 2007, The universality of the derivatives of *L*-functions of elliptic curves. *Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory*. *Proceedings of the fourth international conference in honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 25–29 September*, 2006. P. 24–29. Vilnius: TEV.
7. Taylor R., Wiles A., 1995, Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. *Ann. Math.*. Vol. 141. P. 3–26.
8. Walsh J. L., 1960, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain. *Amer. Math. Soc. Collog. Publ*. Vol. 20.
9. Washington L. C., 2003, *Elliptic curves: number theory and cryptography*. Florida: Boca Raton.

Summary

DISCRETE UNIVERSALITY OF THE DERIVATIVES OF *L*-FUNCTIONS OF ELLIPTIC CURVES

Daina Baravykienė, Antanas Garbaliauskas, Virginija Garbaliauskienė

In the paper, we prove the discrete universality theorem in the sense of the weak convergence of probability measures in the space of analytic functions for the derivatives of *L*-functions of elliptic curves. We consider an approximation of analytic functions by translations $L'_E(s + imh)$, where $h > 0$ is a fixed number, the translations of the imaginary part of the complex variable take values from some discrete set such as arithmetical progression. We suppose that the number $h > 0$ is chosen so that $\exp\{2\pi k/h\}$ is an irrational number for all $k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$. The proof of discrete universality of the derivatives of *L*-functions of elliptic curves is based on a limit theorem in the sense of weak convergence of probability measures in the space of analytic functions.

Keywords: *elliptic curve, L-function of elliptic curves, limit theorem, discrete universality*.

Santrauka

ELIPSINIŲ KREIVIŲ *L* FUNKCIJŲ IŠVESTINĖS DISKRETUSIS UNIVERSALUMAS

Daina Baravykienė, Antanas Garbaliauskas, Virginija Garbaliauskienė

Straipsnyje įrodyta elipsinių kreivių *L* funkcijų išvestinės diskrečiojo universalumo teorema silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje. Nagrinėjamas analizinės funkcijos aproksimavimas postūmiais $L'_E(s + imh)$, čia kompleksinio kintamojo menamosios dalies postūmiai įgyja reikšmes iš diskrečiosios aibės, pavyzdžiui, aritmetinės progresijos. Fiksuotas skaičius $h > 0$ pasirenkamas taip, kad $\exp\{2\pi k/h\}$ būtų iracionalusis skaičius visiems $k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$. Elipsinių kreivių *L* funkcijų išvestinės diskrečiojo universalumo įrodymas remiasi diskrečiąja ribine teorema tikimybinių matų silpnojo konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje.

Prasminiai žodžiai: *elipsinė kreivė, elipsinių kreivių L funkcija, ribinė teorema, diskretusis universalumas.*

Įteikta 2020-09-16
Priimta 2020-11-01