VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS MAGISTRANTŪROS STUDIJŲ PROGRAMA

Tautvydas Zikas

Įsipareigojimų nevykdymo tikimybės asimptotika žemo nemokumo portfeliams, kuriuos veikia sisteminis faktorius

Asymptotics of Probability of Default in Low Default Portfolios under the Effect of Systemic Factor

Magistro baigiamasis darbas

Darbo vadovas doc. dr. Andrius Grigutis

VILNIUS 2021

Turinys

Įsipareigojimų nevykdymo tikimybės asimptotika žemo nemokumo portfeliams, kuriuos veikia sisteminis faktorius

Santrauka

Šio baigiamojo magistro darbo tikslas yra praplėsti Pluto ir Tasche straipsnį [1] apie įsipareigojimų neįvykdymo tikimybę žemo įsipareigojimų neįvykdymo lygio portfeliuose pridedant papildomų pavyzdžių bei gauti asimptotinę formulę įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės skaičiavimui, kai portfelyje nėra įsipareigojimų neįvykdymų atvejų, tačiau jis yra veikiamas sisteminio faktoriaus.

Raktiniai žodžiai : įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė, žemo įsipareigojimų neįvykdymo lygio portfelis, sisteminiai ir individualūs faktoriai, asimptotika.

Asymptotics of Probability of Default in Low Default Portfolios under the Effect of Systemic Factor

Abstract

The purpose of this Master's thesis is to expand on the article published by Pluto and Tasche about the probability of default in low default portfolios. This will be done by expanding the calculations done in the article and also calculating an asymptotic formula for a probability of default in low default portfolio under the effect of systemic factor, but when there is no defaults recorded in the portfolio.

Key words : probability of default, low default portfolio, systemic factor, asymptotics.

1 Įvadas

Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė (ang. probability of default, toliau – PD) – tikimybė, kad skolininkas nesugebės įvykdyti savo finansinių įsipareigojimų, yra viena svarbiausių kredito rizikos vertinimo sudedamųjų dalių. Dažniausiai gana didelė banko kredito rizikos dalis tenka žemo įsipareigojimų neįvykdymo lygio portfeliams, tačiau dažnai įprastiniais metodais tiksliai įvertinti PD tokiame portfelyje yra ganėtinai sudėtinga dėl mažo įsipareigojimų neįvykdymo skaičiaus. Žemo įsipareigojimų neįvykdymo lygio portfeliai (angl. low default portfolios, toliau LDP) yra portfeliai, kuriuose neįvykdytų įsipareigojimų yra daug mažiau nei vykdomų. Kadangi PD tikslumas turi labai daug įtakos kredito rizikos vertinimo modelių kokybei, todėl yra labai svarbu statistiškai tinkamai ir tiksliai įvertinti PD, kad būtų tiksliai įvertinta kredito rizika.

Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių modeliavimo svarbą įrodo ir tai, jog Bazelio komitetas, sukūręs bankų rizikos valdymo sistemos reikalavimus ir rekomendacijas, nurodo rekomendacijas įvertinant PD portfeliuose. Bazelio komiteto reikalavimuose minima, kad PD vertinimas portfelyje turi būti atliekamas naudojant konservatyvius rizikos įverčius, nes daugumoje svarbiausių matų, aprašytų Bazelio bankų priežiūros komiteto (angl. Basel Committee on Banking Supervision), skaičiavimo formulėse yra įtraukta įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė. Kaip, pavyzdžiui, vienas svarbiausių matų bankui - tikėtinas nuostolis (angl. expected loss) skaičiuojamas kaip sandauga įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės ir nuostolio klientui neįvykdžius įsipareigojimų [7]. Konservatyvius, logiškus ir statistiškai pagrįstus PD įverčius bandoma sukurti Pluto ir Tasche straipsnyje [1]. Šis straipsnis bus naudojamas kaip pagrindas šiam magistro darbui, tačiau darbo tikslas bus papildyti straipsnį pridedant asimptotinę formulę, kuri palengvina skaičiavimus, kai PD yra priklausomos nuo sisteminio faktoriaus, tačiau įsipareigojimų neįvykdymų nėra. Gauta formulė bus pagrįsta empiriniais skaičiavimais ir, žinoma, išvadomis.

2 Kredito rizika ir jos valdymas

2.1 Kredito rizikos rūšys

Bankų veikloje nė vienos rūšies rizikos negalima visiškai išvengti arba tai daryti yra netikslinga, nes bus pažeistas vienas iš svarbiausių banko veiklos principų – pelningumo principas. Rizika atspindi nuostolių tikimybę susidarius atitinkamai situacijai.

Pagrindinės banko rizikos rūšys yra šios: kredito, operacinė, rinkos ir likvidumo. Tačiau, svarbiausia banko užduotis išduodant paskolas ir valdant savo paskolų portfelį yra tinkamas kredito rizikos valdymas.

Kredito rizika (angl. credit risk) - tikimybė, kad sandorio šalis nesugebės atsiskaityti sutartyje nustatyta tvarka [2].

Operacinė rizika (angl. operational risk) - tikimybė patirti nuostolių dėl žmonių, sistemų, netinkamų ar nepavykusių vidaus procesų arba dėl išorės įvykių įtakos [2].

Rinkos rizika (angl. market risk) - tikimybė, kad rinkos kintamieji – palūkanų norma, valiutos kursas, nuosavybės vertybinių popierių, biržos prekių kainos - pasikeis taip, jog bankas dėl sudaryto sandorio patirs nuostolių [2].

Likvidumo rizika (angl. liquidity risk) - Rizika, atsirandanti dėl nepakankamo rinkos likvidumo ir dėl to kylančių apribojimų pageidaujamu metu ir už rinkos kainai artimą kainą parduoti turimą turtą, taip pat rizika, atsirandanti dėl mažo įmonės likvidumo ir galimo vėlavimo vykdyti įsipareigojimus [5].

2.2 Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė

Nors finansų institucijos susiduria su visomis aukščiau paminėtomis rizikomis, vis dėlto, svarbiausia yra kredito rizika. Finansų institucija, suteikdama klientui paskolą, visuomet susiduria su ateities neapibrėžtumu – visuomet yra tikimybė, kad skolininkas negrąžins paskolos. Taip teigiama R. Leipaus ir M. Valužio straipsnyje *Kredito rizika kaip pasirinkimo sandoris* [6].

Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė (angl. probability of default, PD) - tikimybė, kad per vienerių metų laikotarpį skolininkas neįvykdys įsipareigojimų [1].

Žemo įsipareigojimų neįvykdymo lygio portfelis (angl. low default portfolio) – portfelis, kai yra keli faktiniai įsipareigojimų neįvykdymo atvejai, arba portfelis, kai nebuvo faktinių įsipareigojimų neįvykdymo atvejų [1]. Tokio portfelio ODR (angl. observed default rate), yra labai mažas, tačiau sakyti, kad EDR (angl. expected default rate), taip pat yra artimas nuliui, būtų neatsargu. Galima sakyti, jog EDR yra tiesiog lygu PD, o ODR yra eksperimento „sėkmių“ statistinis dažnis.

Šiame darbe kalbėsime apie žemo įsipareigojimų neįvykdymo portfelius, kuriuose arba yra labai nedaug neįvykdytų įsipareigojimų, arba tokių išvis nėra.

Taip pat, norint naudoti metodą aprašytą Pluto ir Tasche straipsnyje [1], itin svarbu yra sureitinguoti paskolų portfelį. Tai darysime gana paprastai:

skolininkus, kurių PD yra mažiausias (patikimiausi skolininkai), priskirsime kategorijai A, skolininkus, kurių PD yra didžiausias (mažiausiai patikimi skolininkai), priskirsime kategorijai C, o tarpinius skolininkus priskirsime B kategorijai.

Skolininko rangas (angl. obligor grade) – skolininko reitingų skalės rizikos kategorija, kuriai pagal tiksliai apibrėžtą ir aiškią reitingų kriterijų grupę turi būti priskiriami skolininkai ir pagal kurią turi būti nustatoma PD [1].

2.3 Konservatyvumo metodas

Savo straipsnyje K. Pluto ir D. Tasche [1] siūlo konservatyvumo (angl. prudence) metodą. Šiam metodui reikia skolininkus susiskirstyti pagal patikimumą į rangus, kaip jau padarėme šiek tiek anksčiau. Kadangi kategorijoje A yra geriausi skolininkai, o kategorijoje C – blogiausi, tai

$$p_a \leq p_b \leq p_c. \tag{1}$$

Vadinasi, rango C PD yra didžiausia, o rango A - mažiausia. Verta paminėti, kad ši (1) sąlyga galios visuomet. Todėl, galime laikyti, kad labiausiai konservatyvus tikimybės p_A įvertis yra gaunamas darant prielaidą, kad p_A yra lygus p_C. Tuomet iš nelygybės (1) gauname, kad

$$p_A = p_B = p_C. \tag{2}$$

3 Atvejis, kai įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės yra nepriklausomos

3.1 Įsipareigojimų neįvykdymų nėra

Tarkime, kad mūsų portfelis sudarytas iš n skolininkų. Kaip jau buvo minėta anksčiau, n_A, n_B ir n_C žymi skolininkų skaičių atitinkamame range. Iš (2) sąlygos išplaukia, jog ranguose skolininkų rizikingumas nesiskiria, todėl galima teigti, kad mūsų imtį sudaro $n_A + n_B + n_C$ elementų. Pasinaudoję nepriklausomumo prielaida, galime užrašyti tikimybę, kad per nagrinėjamą laikotarpį portfelyje neįvyks nė vienas įsipareigojimų neįvykdymas.

Kadangi tikimybė nepriklauso nuo skolininko kategorijos, pagal lygybę (2), tai tikimybė, kad nebus nė vieno įsipareigojimų neįvykdymo atvejo, užrašoma $(1 - p_a)^n$. Pažymėkime įsipareigojimų neįvykdymų skaičių portfelyje k. Darome prielaidą, kad įsipareigojimų neįvykdymo atvejai yra vienas nuo kito nepriklausomi. Šiuo atveju $k = 0$. Įstatę visą šią turimą informaciją į binominio tikimybės skirstinio išraišką, gauname

$$\mathbb{P} = \binom{n_A + n_B + n_C}{0} p_A^0 (1 - p_A)^{n_A + n_B + n_C - 0} = (1 - p_A)^{n_A + n_B + n_C}. \qquad (3)$$

Šioje išraiškoje vienintelis nežinomasis yra tikimybė p_a, kurią galima įvertinti pasikliautinaisiais intervalais.

Reikšmingumo lygmuo (angl. confidence level) - tikimybė pagrįstai atmesti klaidingą hipotezę. Ši dydį įprasta žymėti α arba γ [4]. Pasirinkę

dydį γ, mes galime surasti dominančią tikimybę p_A. Norėdami ją surasti, turime išspręsti nelygybę

$$(1 - \gamma) \leq (1 - p_A)^{n_A + n_B + n_C}.$$

Iš paskutinės nelygybės gauname, kad

$$p_A \leq 1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{n_A + n_B + n_C}}.$$

Išsprendę šią nelygybę gauname intervalą, kuriam priklauso tikimybė p_A, bet konservatyvumo metodas teigia, kad tokiu atveju mes tiesiog įmame intervalo viršutinį rėžį kaip tikimybės p_A įvertį.

Naudodami tą patį konservatyvumo principą galime gauti ir tikimybę p_B. Kadangi dabar mūsų imtį sudarys tik skolininkai iš B ir C kategorijų, tai mūsų imtis bus dydžio $n_B + n_C$, o tikimybė, kad šitoje imtyje nebus nė vieno įsipareigojimų nevykdymo, yra $(1 - p_B)^{n_B + n_C}$. Tuomet išsprendę nelygybę

$$(1 - \gamma) \leq (1 - p_B)^{n_B + n_C}$$

gauname

$$p_B \leq 1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{n_B + n_C}}.$$

Vertinant paskutinę tikimybę p_C naudoti konservatyvumo prielaidos jau nebereikia, nes ji jau liko vienintelė neįvertinta. Šioje reitingo grupėje tikimybė, kad visi skolininkai įvykdys įsipareigojimus bus $(1 - p_C)^{n_C}$. Pasikliautinąjį intervalą tikimybei p_C gauname iš nelygybės

$$(1 - \gamma) \leq (1 - p_C)^{n_C} \Rightarrow$$
$$p_C \leq 1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{n_C}}.$$

3.2 Pavyzdys

Toliau pateiksime skaičiavimus naudojant programą R. Šiame pavyzdyje portfelis sudarytas iš $n = n_A + n_B + n_C$ skolininkų. Tariame, kad skolininkų kiekviename range yra

$$n_A = 200,\ n_B = 600,\ n_C = 400$$

1 lentelė: Vaizduojami įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių viršutiniai rėžiai

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_A}$	0,06%	0,12%	0,19%	0,25%	0,38%
$\hat{p_B}$	0,07%	0,14%	0,23%	0,30%	0,46%
$\hat{p_C}$	0,17%	0,35%	0,57%	0,75%	1,14%

Toliau pateiksime lentelę, kurioje skolininkų kiekviename range yra

$$n_A = 500,\ n_B = 700,\ n_C = 700.$$

2 lentelė: Vaizduojami įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių viršutiniai rėžiai

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_A}$	0,01%	0,07%	0,12%	0,16%	0,24%
$\hat{p_B}$	0,02%	0,10%	0,16%	0,21%	0,33%
$\hat{p_C}$	0,03%	0,20%	0,33%	0,43%	0,66%

Galime pastebėti, kad pirmoje ir antroje lentelėse, nepriklausomai nuo reikšmingumo lygio, galioja anksčiau aprašyta (1) nelygybė. Taip pat iš lentelių gana akivaizdu, kad tikimybės įvertis labai priklauso nuo to, koks reikšmingumo lygmuo pasirinktas. Taip yra todėl, kad didėjant reikšmingumo lygmeniui, didėja ir viršutinis PD intervalo rėžis. Tikimybės p_A, p_B, p_C yra nusakomos pasikliautinaisiais intervalais ir jos yra ne mažesnės nei $1 - \gamma$, todėl didinant reikšmingumo lygmenį, tikimybė, kad nebus nė vieno įsipareigojimų neįvykdymo atvejo, įgyja reikšmes iš vis platesnio intervalo. Taip pat matome, kad didinant imties dydį n, įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės mažėja.

3.3 Keli įsipareigojimų neįvykdymo atvejai

Atvejis, kuris bus nagrinėjamas šiame skyrelyje, nuo aprašyto skyriuje **3.1**, skiriasi, iš esmės, tik tuo, kad šiuo atveju yra bent vienas įsipareigojimų neįvykdymo atvejis, kitaip tariant, yra pasisekęs bent vienas Bernulio eksperimentas, o mes bandysime išsiaiškinti to eksperimento sėkmės tikimybę.

Tarkime, kad bendras viso portfelio įsipareigojimų neįvykdymų skaičius yra k. Taip pat tarkime, kad įsipareigojimų neįvykdymų skaičius kiekvienoje reitingo kategorijoje A, B ir C yra atitinkamai k_A, k_B ir k_C. Be to, tarsime, kad $k_A = 0$, $k_B = 2$, o $k_C = 2$, vadinasi $k = 4$. Skolininkų mūsų portfelyje vėl yra $n = n_A + n_B + n_C$.

Vėl bandysime įvertinti tikimybes p_A, p_B, p_C. Kaip ir skyrelyje 3.1, čia taip pat, naudosime konservatyvumo metodą ir tarsime, kad konservatyviausias įvertis, šiuo atveju, taip pat yra

$$p_A = p_B = p_C.$$

Vertindami tikimybę p_A, naudosime visą portfelį, todėl imties dydis bus $n = n_A + n_B + n_C$, o $k = k_A + k_B + k_C = 4$. Tikimybę p_A užrašysime kaip Bernulio a.d. tikimybę

$$\mathbb{P}(X \leq 4) = \sum_{i=0}^{4} \binom{n_A + n_B + n_C}{i} p_A^i (1 - p_A)^{n_A + n_B + n_C - i},$$

čia X- įsipareigojimų neįvykdymų skaičius portfelyje.

Ši tikimybė parodo, kiek tikėtina, jog skolininkų, neįvykdžiusių įsipareigojimų, skaičius neviršys k. Naudodami pasikliautinąjį intervalą su reikšmingumo lygmeniu γ, gauname nelygybę

$$1 - \gamma \leq \sum_{i=0}^{4} \binom{n_A + n_B + n_C}{i} p_A^i (1 - p_A)^{n_A + n_B + n_C - i}. \qquad (4)$$

Išsprendę (4) nelygybę, gausime intervalą, į kurį pateks visos galimos tikimybės p_A reikšmės.

Tokiu pačiu principu ieškosime tikimybės p_B įverčio. Šiuo atveju mūsų imties dydis bus lygus $n_B + n_C$, o įsipareigojimų neįvykdžiusių skolininkų skaičius šioje imtyje bus $k_B + k_C = 4$. Tuomet tikimybė p_B, kad skolininkų, kurie neįvykdys savo turimų įsipareigojimų, skaičius imtyje bus ne didesnis nei 3 bus

$$\sum_{i=0}^{4} \binom{n_B + n_C}{i} p_B^i (1 - p_B)^{n_B + n_C - i}.$$

Tuomet ir vėl pasinaudosime pasikliautinaisiais intervalais, kad galėtume tiksliau įvertinti tikimybę p_B

$$1-\gamma \leq \sum_{i=0}^{4} \binom{n_B+n_C}{i} p_B^i (1-p_B)^{n_B+n_C-i}. \tag{5}$$

Kadangi tikimybė p_C jau ir taip yra pati didžiausia, ir neturime su kuo jos palyginti, tai ją įvertinti konservatyvumo prielaidos nebenaudosime, tačiau idėja išlieka panaši. Tikimybę p_C galime užrašyti šitaip

$$\sum_{i=0}^{2} \binom{n_C}{i} p_C^i (1-p_C)^{n_C-i}.$$

Tuomet remiantis reikšmingumo lygmeniu γ, užrašome nelygybę

$$1-\gamma \leq \sum_{i=0}^{1} \binom{n_C}{i} p_C^i (1-p_C)^{n_C-i}. \tag{6}$$

Visais trimis atvejais, tikimybes p_A, p_B ir p_C, laikysime atitinkamų tikimybių pasikliautinųjų intervalų viršutiniais rėžiais. Tam, kad galėtume išspręsti nelygybes (4), (5) ir (6), dešinias nelygybių puses pakeisime Beta fukcijų integralų santykiu, t.y. Beta skirstiniu, kuris yra tolydus ir jo pasiskirstymo funkcija turi atvirkštinę.

Tam panaudosime lemą, pateiktą Pluto ir Tasche straipsnio [1] A priede.

4.3.1 Lema. Jei X yra binominis atsitiktinis dydis su parametrais n ir p, tada bet kokiam natūraliajam skaičiui $0 \leq k \leq n$ turime

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq p) = \frac{\int_p^1 t^k (1-t)^{n-k-1} dt}{\int_0^1 t^k (1-t)^{n-k-1} dt},$$

čia Y yra atsitintinis dydis, pasiskirstęs pagal Beta skirstinį, dydis su parametrais $\alpha = k+1$ ir $\beta = n-k$. Ši lema paimta iš K. Pluto ir D. Tasche straipsnio [1].

Ta pačia lema ir naudosimės skaičiuodami pavyzdžius su R.

3.4 Pavyzdys

Tarkime, kad $n = 1200$, o $n_A = 200$, $n_B = 600$ ir $n_C = 400$, , o $k_A = 0$, $k_B = 2$, $k_C = 2$. PD įverčiai pateikti lentelėje

3 lentelė: Vaizduojami įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių viršutiniai rėžiai

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_A}$	0,39%	0,52%	0,67%	0,76%	0,96%
$\hat{p_B}$	0,47%	0,63%	0,80%	0,91%	1,16%
$\hat{p_C}$	0,67%	0,98%	1,33%	1,57%	2,08%

Atvejį, kai yra keli įsipareigojimų neįvykdymo atvejai, pateiksime ir su šiek tiek kitokiais skaičiais. Šiame pavyzdyje $n_A = 500,\ n_B = 700,\ n_C = 700$, o $k_A = 0,\ k_B = 2,\ k_C = 4$

4 lentelė: Vaizduojami įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių viršutiniai rėžiai

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_A}$	0,35%	0,45%	0,55%	0,62%	0,77%
$\hat{p_B}$	0,48%	0,61%	0,75%	0,84%	1,04%
$\hat{p_C}$	0,67%	0,89%	1,14%	1,30%	1,65%

Iš rezultatų vėl galime pastebėti, kad įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė reikšmingai priklauso nuo pasirinkto reikšmingumo lygmens. Taip pat galime matyti, jog tikimybės $p_A,\ p_B$ ir p_B yra didesnės šiuo atveju nei prieš tai nagrinėtu atveju (lentelės 1 ir 2), kai portfelyje nebuvo įsipareigojimų neįvykdymo atvejų, todėl galima sakyti, kad portfeliai, kuriuose jau buvo užfiksuotų įsipareigojimų neįvykdymų, yra rizikingesni už tuos portfelius, kuriuose tokių atvejų nebuvo.

4 Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės priklausomumo nuo sisteminio faktoriaus atvejis

4.1 Keli įsipareigojimų neįvykdymo atvejai

Dažniausiai praktikoje nepriklausomumo sąlyga yra kiek pritempta ir nereali, ne išimtis yra ir mūsų nagrinėjamas, įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių, atvejis. Praktikoje nėra visiškai logiška sakyti, kad skolininkų neįvykdymo tikimybės yra visiškai nepriklausomos. Šiame skyrelyje atsisakysime šios prielaidos ir palyginsime, kaip gautų tikimybių įverčiai skiriasi nuo **3** skyriuje nagrinėto atvejo, kai įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės yra nepriklausomos.

Visų pirma, reikia apibrėžti, kas yra sisteminiai faktoriai. Sisteminiai faktoriai yra veiksniai, kurie gali turėti įtakos stebimiems parametrams. Darbe nagrinėjamu atveju tas parametras yra įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė. Šiame baigiamajame darbe remsimės vieno faktoriaus tikimybiniais modeliais. Tokio modelio esmė, jog jis leidžia aprašyti koreliaciją tarp priklausomų įvykių per bendrą sisteminį faktorių.

Tolesniose formulėse ir skaičiavimuose kaip sisteminį faktorių, kuris veikia įsipareigojimų įvykdymo tikimybę, naudosime turto koreliaciją. **Turto koreliacija** (angl. asset correlation) - yra apibūdinama kaip priklausomybė nuo turto, atsižvelgiant į visos šalies ekonomiką ir visi skolininkai yra susiję vienas su kitu pagal šitą rizikos faktorių [7]. Taip pat tariame, kad turto koreliacija visiems skolininkams yra vienoda, o skolininkai ir toliau yra tarpusavyje nepriklausomi. Mūsų atveju tai reiškia, jog visus klientus veikiantis faktorius yra turtas. Bazelio komitetas 2005 metais aprašė šią turto koreliaciją ir nustatė rėžius, kuriais turėtų vadovautis bankai kurdami savo kredito rizikos modelius. Tie rėžiai yra [12%,24%]. Pažymėkime ϱ turto koreliaciją.

Šiame skyrelyje tarsime, kad portfelyje yra keli (bent vienas) skolininkai, kurie neįvykdė savo įsipareigojimų ir įsipareigojimų neįvykdymo atvejai priklauso nuo bendro sisteminio faktoriaus. Kaip ir **4** skyrelyje, tas sisteminis faktorius bus X ir jis reiškia turto koreliaciją. Taip pat tariame, kad skolininkai yra suskirstyti į reitingų kategorijas A, B ir C, kaip ir anksčiau, o visų skolininkų turto koreliacija yra lygi ϱ.

4.1 skyrelio esminis tikslas yra rasti nelygybę bendruoju atvejui, kurią būtų galima panaudoti ieškant įsipareigojimų neįvykdymų tikimybių.

Lema 4.1 Tarkime, kad X ir Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ir $Z = aX + Y$, kai $a \in \mathbb{R}$. Tuomet,

$$Z = aX + Y \Leftrightarrow \tilde{Z} = a\frac{\sigma_x}{\sigma_z}\tilde{X} + \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\tilde{Y},$$

čia $\tilde{Z} = \frac{Z-\mathbb{E}Z}{\sigma_z}$, $\tilde{X} = \frac{X-\mathbb{E}X}{\sigma_x}$, ir $\tilde{Y} = \frac{Y-\mathbb{E}Y}{\sigma_y}$.

Teiginys 4.2 Tarkime, kad mūsų portfelyje įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės yra priklausomos nuo sisteminio faktoriaus X. Jei portfelyje yra n skolininkų ir k atvejų, kai skolininkai neįvykdo įsipareigojimų, tai tikimybę p, jog šito portfelio skolininkas neįvykdys įsipareigojimų, randame iš nelygybės

$$
\begin{aligned}
&(1-\gamma) \\
&\leq \int_{\infty}^{\infty} \phi(y) \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)^{i} \left(1-\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{n-i} dy,
\end{aligned} \tag{7}
$$

čia ϕ yra standartinio normaliojo a. d. tankio funkcija, Φ yra standartinio normaliojo a. d. pasiskirstymo funkcija, o Φ^{-1} yra atvirkštinė standartinio normaliojo a. d. pasiskirstymo funkcija.

Įrodymas. Darome prielaidą, kad skolininkų turto vertės grąža r_i, $i \in [1, n]$. Tam tikro stebimo laikotarpio metu ši grąža gali būti užrašyta taip

$$r_i = \beta_i S_i + \xi_i,$$

čia S_i ir ξ_i yra nepriklausomi a.d., pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį.

S vadiname sisteminiu faktoriumi, o ξ - individualiu faktoriumi. Be to, tarkime, kad S_i ir ξ_i yra vienodi visiems skolininkams.

Pasinaudojus teiginiu **4.1**, lygtį $r_i = \beta_i S_i + \xi_i$ galime užrašyti kaip

$$\tilde{r} = \beta \frac{\sigma_s}{\sigma_r} \tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r} \tilde{\xi},$$

čia $\tilde{r} = \frac{r - \mathbb{E}r}{\sigma_r}$, $\tilde{S} = \frac{S - \mathbb{E}S}{\sigma_S}$, ir $\tilde{\xi} = \frac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sigma_\xi}$.

Paprastesnę $\tilde{r}$ išraišką gausime iš

$$1 = \sigma_r = \sqrt{\mathbb{E}r^2 - (\mathbb{E}r)^2}. \tag{8}$$

Pirmiausia atskirai rasime $\mathbb{E}r^2$ ir $(\mathbb{E}r)^2$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}r^2 &= \mathbb{E}\left(\beta \frac{\sigma_S}{\sigma_r} \tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r} \tilde{\xi}\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\beta \frac{\sigma_S}{\sigma_r} \tilde{S}\right)^2 + 2\beta \frac{\sigma_S}{\sigma_r} \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r} \tilde{S}\tilde{\xi} + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r} \tilde{\xi}\right)^2\right) \\
&= \left(\beta \frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 \mathbb{E}\tilde{S}^2 + 2\beta \frac{\sigma_S}{\sigma_r} \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r} \mathbb{E}\tilde{S}\mathbb{E}\tilde{\xi} + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2 \mathbb{E}\tilde{\xi}^2 \\
&= \left(\beta \frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{E}r)^2 &= \left(\mathbb{E}\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}\right)\right)^2 \\
&= \left(\mathbb{E}\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}\right)\right)^2. \\
&= \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\mathbb{E}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\mathbb{E}\tilde{\xi}\right)^2 = 0
\end{aligned}
$$

Gautas išraiškas įstatę į lygtį (8) gauname

$$
\begin{aligned}
1 = \sigma_r &= \sqrt{\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2} \\
1 &= \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2 \\
\Rightarrow \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2 &= 1 - \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 \\
\Rightarrow \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r} &= \sqrt{1 - \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Pažymime $\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 = \varrho$. Tada $\tilde{r} = \sqrt{\varrho}\tilde{S} + \sqrt{1-\varrho}\tilde{\xi}$, čia ϱ turto koreliacija. Tuomet turime

$$
\begin{aligned}
\rho = \rho(\tilde{r}, \tilde{S}) &= \frac{cov(\tilde{r}, \tilde{S})}{\sigma_{\tilde{r}}\sigma_{\tilde{S}}} = cov\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}, \tilde{S}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}\right)\tilde{S}\right) - \mathbb{E}\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}\right)\mathbb{E}\tilde{S} \\
&= \beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\mathbb{E}\tilde{S}^2 + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\mathbb{E}\tilde{\xi}\mathbb{E}\tilde{S} = \beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r} = \sqrt{\varrho}.
\end{aligned}
$$

Taip pat

$$
\begin{aligned}
1 = \sigma_{\tilde{r}}^2 &= cov(\tilde{r}, \tilde{r}) = \mathbb{E}(\tilde{r}^2) - \mathbb{E}(\tilde{r})\mathbb{E}(\tilde{r}) \\
&= \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2 = \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2\right) \\
&= \varrho + (1 - \varrho).
\end{aligned}
$$

Be to, S ir ξ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai $\tilde{S}$, $\tilde{\xi}$ yra nepriklausomi.

Apibrėžkime įvykį D, kai standartizuota grąža $\tilde{r} = \sqrt{\varrho}S + \sqrt{1-\varrho}\xi$, nenukrenta žemiau x_p reikšmės

$$D = \begin{cases} 1, & \text{jei } \tilde{r} = \sqrt{\varrho}S + \sqrt{1-\varrho}\xi < x_p \\ 0, & \text{kitu atveju.} \end{cases}$$

Kadangi žinome grąžos $\tilde{r}$ pasiskirstymo funciją, galime D perrašyti kaip

$$D = \begin{cases} 1, & \text{jei } \tilde{r} = \sqrt{\varrho}S + \sqrt{1-\varrho}\xi < \Phi^{-1}(p) \\ 0, & \text{kitu atveju.} \end{cases}$$

Jeigu standartizuotas sisteminis faktorius S įgyja reiškmę $y \in \mathbb{R}$, tada

$$D = \begin{cases} 1, & \text{jei } \tilde{\xi} < \frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}, \\ 0, & \text{kitu atveju} \end{cases}$$

ir

$$\mathbb{P}(D=1|S=y) = \mathbb{P}\left(\tilde{\xi} < \frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right).$$

Tuomet šią PD galime užrašyti šitaip

$$\mathbb{P}(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Aprašome indikatorių

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1, & \text{jei įvyksta įvykis A;} \\ 0, & \text{jei ne įvyksta įvykis A.} \end{cases}$$

Tada

$$\mathbb{E}\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{P}(A) + 0 \cdot \mathbb{P}(\bar{A}).$$

Apibrėžkime

$$\mathbb{1}_i = \begin{cases} 1, & \text{jei i-asis skolinkas neįvykdė įsipareigojimo} \\ 0, & \text{kitu atveju} \end{cases}$$

ir $X = \mathbb{1}_0 + \mathbb{1}_1 + \ldots + \mathbb{1}_k,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$
Tada

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_0 + \mathbb{1}_1 + \ldots + \mathbb{1}_k) = \mathbb{E}\mathbb{1}_0 + \mathbb{E}\mathbb{1}_1 + \ldots + \mathbb{E}\mathbb{1}_k \\
&= \mathbb{P}(0 \text{ įsipareigojimų neįvykdymų portfelyje su } n \text{ skolininkų}) \\
&+ \mathbb{P}(1 \text{ įsipareigojimų neįvykdymų portfelyje su } n \text{ skolininkų}) \\
&\vdots \\
&= \mathbb{P}(k \text{ įsipareigojimų neįvykdymų portfelyje su } n \text{ skolininkų}) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \mathbb{P}^i (1-\mathbb{P})^{n-i} = \mathbb{P}(X \leq k).
\end{aligned}
$$

Įrodyme naudosime pilnojo vidurkio formulė

$$
\mathbb{E}X = \mathbb{E}_S(\mathbb{E}(X|S=y)).
$$

Tada

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq k) &= \mathbb{E}X = \mathbb{E}_S(\mathbb{E}(X|S=y)) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\mathbb{E}(X|S=y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\mathbb{P}(X \leq k|S=y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)^i \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{n-i} dy.
\end{aligned}
$$

Grįžę prie konservatyvumo metodo, galime užrayti nelygybę tikimybei p_A rasti

$$
1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) \sum_{i=0}^{k_A+k_B+k_C} \binom{n_A+n_B+n_C}{i} G(p_A,\varrho,y)^i \left(1 - G(p_A,\varrho,y)\right)^{n_A+n_B+n_C-i} dy, \tag{9}
$$

čia

$$
G(p_A,\varrho,y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right).
$$

Lygiai taip pat galime užrašyti ir tikimybes p_B ir p_C

$$
1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) \sum_{i=0}^{k_B+k_C} \binom{n_B+n_C}{i} G(p_B,\varrho,y)^i \left(1 - G(p_B,\varrho,y)\right)^{n_B+n_C-i} dy, \tag{10}
$$

ir

$$1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) \sum_{i=0}^{k_C} \binom{n_C}{i} G(p_C, \varrho, y)^i \left(1 - G(p_C, \varrho, y)\right)^{n_C - i} dy. \qquad (11)$$

4.2 Pavyzdys

Tarkime, kad mūsų imtis kaip ir ankstesniuose pavyzdžiuose yra

$$n_A = 500,\ n_B = 700,\ n_C = 700,$$

o įsipareigojimų neįvykdymų skaičius kiekviename range

$$k_A = 0,\ n_B = 2,\ n_C = 4.$$

Tuomet, gavę nelygybes (9), (10) ir (11) bei naudodami programą R paskaičiuosime įsipareigojimų neįvykdymo tikimybes.

5 lentelė: Vaizduojami įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių viršutiniai rėžiai, skyrelyje 4.1 aprašytu atveju

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_A}$	0,57%	1,11%	1,95%	2,67%	4,62%
$\hat{p_B}$	0,74%	1,43%	2,47%	3,35%	5,67%
$\hat{p_C}$	1,00%	1,91%	3,26%	4,39%	7,33%

Taip pat pateiksime ir kitą pavyzdį, kad būtų galima palyginti, kur

$$n_A = 200,\ n_B = 600,\ n_C = 400,$$

o įsipareigojimų neįvykdymų skaičius kiekviename range

$$k_A = 0,\ n_B = 2,\ n_C = 2.$$

6 lentelė: Vaizduojami įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių viršutiniai rėžiai, skyrelyje 4.1 aprašytu atveju

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_A}$	0,62%	1,22%	2,15%	2,96%	5,11%
$\hat{p_B}$	0,72%	1,42%	2,48%	3,38%	5,78%
$\hat{p_C}$	0,99%	1,97%	3,44%	4,67%	7,92%

Kaip ir visuose pavyzdžiuose prieš tai, matome, kad didinant reikšmingumo lygmenį, tikimybės ženkliai didėja ir perėjimas nuo 95% reikšmingumo lygmens iki 99% lygmenį padidina įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės viršutinį įvertį beveik dvigubai.

4.3 Įsipareigojimų neįvykdymų nėra, o įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė priklauso nuo sisteminio faktoriaus

Šiame skyrelyje nagrinėsime atvejį, kai visame portfelyje nė vienas skolininkas nėra neįvykdęs įsipareigojimų, t.y. $k = k_A + k_B + k_B = 0$.

Tarkime, kad X – sisteminis faktorius, remiantis formule (7), įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė priklausanti nuo X yra užrašoma šitaip

$$p_i(X = x) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right), \; i = 1, \dots, n. \tag{12}$$

Čia Φ yra standartinio normaliojo a. d. pasiskirstymo funkcija, o Φ^{-1} yra atvirkštinė standartinio normaliojo a.d. pasiskirstymo funkcija, o x yra a.d. X realizacija.

Skyrelyje (3) naudojome konservatyvumo prielaidą ir gavome šią nelygybę

$$(1 - \gamma) \leq (1 - p_A)^{n_A + n_B + n_C}.$$

Tarę, kad γ, kaip ir anksčiau žymi reikšmingumo lygmenį, sakome, kad tikimybė p_A su reikšmingumo lygmeniu γ reiškia aibę visų reikšmių, kurios tenkina nelygybę

$$(1 - \gamma) \leq \int_{\infty}^{\infty} \phi(y) \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{n_A + n_B + n_C} dy. \tag{13}$$

Galime pastebėti, jog dešinioji nelygybės (13) pusė yra ne kas kita, kaip atsitiktinio dydžio vidurkis.

$$(1 - \gamma) \leq \mathbb{E}\left[1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right]^{n_A + n_B + n_C}. \tag{14}$$

Kitą PD p_B skaičiuosime identiškai, tiesiog imtis bus dydžio $n_B + n_C$.

$$(1 - \gamma) \leq \int_{\infty}^{\infty} \phi(y) \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{n_B + n_C} dy. \tag{15}$$

Tuomet belieka suskaičiuoti tikimybę p_C. Tai galime padaryti iš nelygybės

$$(1-\gamma) \leq \int_{\infty}^{\infty} \phi(y) \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{n_C} dy. \tag{16}$$

Toliau, pasinaudoję statistiniu paketu R, mes paskaičiuosime 4.3 skyrelyje aprašytas PD. Tarkime, kad rangų dydžiai yra

$$n_A = 500,\ n_B = 700,\ n_C = 700,$$

7 lentelė: Vaizduojami įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių viršutiniai rėžiai

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_A}$	0,07%	0,20%	0,43%	0,67%	1,43%
$\hat{p_B}$	0,09%	0,25%	0,55%	0,85%	1,78%
$\hat{p_C}$	0,17%	0,45%	0,96%	1,45%	2,92%

Pateiksime pavyzdį su šiek tiek mažesne imtimi. Tarkime, kad pavyzdyje

$$n_A = 200,\ n_B = 600,\ n_C = 400.$$

8 lentelė: Vaizduojami įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių viršutiniai rėžiai

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_A}$	0,10%	0,28%	0,62%	0,96%	1,99%
$\hat{p_B}$	0,13%	0,34%	0,72%	1,10%	2,27%
$\hat{p_C}$	0,28%	0,72%	1,50%	2,23%	4,33%

Iš lentelių 7 ir 8 galime pastebėti, kad didėjant reikšmingumo lygiui PD, įverčiai taip pat didėja, tačiau, didėjant imties dydžiui, įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė mažėja.

5 Asimptotikos skaičiavimas

Kadangi formulė (13) yra gana sudėtinga, atvejui, kai nėra įsipareigojimų neįvykdymo atvejų $k = 0$, galime pabandyti suskaičiuoti asimptotę formulę, pagal kurią bus galima taip pat skaičiuoti PD, ir pažiūrėti, ar gausime formulę patogesnę praktiniams skaičiavimams.

Tarkime, kad $a > 0$ yra fiksuota konstanta ir

$$f_n(b) = \mathbb{E}[1 - \Phi(ax + b)]^n,$$

čia $X \sim N(0,1)$, o Φ yra standartinio normalaus a.d. pasiskirstymo funkcija

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt.$$

Galime pastebėti, jog kiekviena f_n yra mažėjanti funkcija ir

$$f_n(b) \xrightarrow{b \to -\infty} 1, \quad f_n(b) \xrightarrow{b \to \infty} 0.$$

Sakykime, kad $\gamma \in (0,1)$ irgi yra fiksuotas skaičius. Tuomet yra vienintelis toks b_n, kad

$$f_n(b_n) = 1 - \gamma.$$

Bandysime surasti b_n asimptotiką, kai $n \to \infty$.

Toliau reikės rasti sekos p_n asimptotiką. Čia p_n yra lygties

$$\frac{\Phi^{-1}(p_n)}{\sqrt{1-\rho}} = b_n \tag{17}$$

sprendinys, o $\rho \in (0,1)$ yra toks skaičius, kad

$$\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} = a. \tag{18}$$

Iš visų aukščiau aprašytų lygybių (17) ir (18) gauname, kad

$$\rho = \frac{a^2}{1+a^2},\ p_n = \Phi(\sqrt{1-\rho}\, b_n) \text{ ir } p_n = \Phi\left(\frac{b_n}{\sqrt{1+a^2}}\right). \tag{19}$$

Iš pradžių spręsime paprastesnę lygtį

$$[1 - \Phi(ax + b)]^n = 1 - \gamma,$$

čia x yra bet koks fiksuotas skaičius. Jei $b_n(x)$ yra šios lygties sprendinys, tai

$$
\begin{aligned}
1-\Phi(ax+b_n(x)) &= (1-\gamma)^{n^{-1}} \Rightarrow \\
1-\Phi(ax+b_n(x)) &= e^{n^{-1}\ln(1-\gamma} \Rightarrow \\
1-\Phi(ax+b_n(x)) &= 1-\frac{\ln(1-\gamma)}{n}+o(n^{-1}) \Rightarrow \\
\Phi(ax+b_n(x)) &= -\frac{\ln(1-\gamma)}{n}+o(n^{-1}).
\end{aligned}
$$

Pažymėkime $c=-\ln(1-\gamma)$. Galime pastebėti, kad $c>0$. Tuomet gauname

$$
\begin{aligned}
\Phi(ax+b_n(x)) &= \frac{c}{n}+o(n^{-1}) \Rightarrow \\
b_n(x) &= \Phi^{-1}\left(\frac{c}{n}+o(n^{-1})\right)-ax.
\end{aligned}
$$

Toliau ieškosime $y_n=\Phi^{-1}\left(\frac{c}{n}+o(n^{-1})\right)$ sekos asimptotikos, kai y_n yra lygties

$$
\Phi(-y_n)=\frac{c}{n}+o(n^{-1})
$$

sprendinys. Matome, kad $y_n\to\infty$. Tada pasinaudoję standartinio normaliojo a. d. pasiskirstymo funkcijos savybe $\Phi(-y)=1-\Phi(y)$, gauname

$$
1-\Phi(y_n)=\frac{c}{n}+o(n^{-1}).
$$

Kai $y\to\infty$, funkcijos $1-\Phi(y)$ asimptotiką galime užrašyti šitaip

$$
\begin{aligned}
1-\Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_y^\infty e^{\frac{-t^2}{2}}dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_y^\infty t^{-1}de^{\frac{-t^2}{2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{-1}e^{\frac{-t^2}{2}}\Big|_y^\infty - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_y^\infty e^{\frac{-t^2}{2}}t^{-2}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-1}e^{\frac{-y^2}{2}}(1+o(1)).
\end{aligned}
$$

Tada turime

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y_n^{-1}e^{\frac{-y_n^2}{2}}(1+o(1)) &= \frac{c}{n}(1+o(1)) \\
y_n^{-1}e^{\frac{-y_n^2}{2}} &= -\frac{\sqrt{2\pi}c}{n}(1+o(1)) \\
-\ln y_n-\frac{y_n^2}{2} &= -\ln n+\ln(\sqrt{2\pi}c)+o(1) \\
\ln y_n^2+y_n^2 &= 2\ln n-\ln(2\pi c^2)+o(1).
\end{aligned}
$$

Tarkime, kad $z = z(u)$ yra lygties $z + \ln z = u$ sprendinys. Galime pastebėti, kad $z(u) \xrightarrow{u\to\infty} \infty$ ir todėl

$$\frac{u}{z(u)} = 1 + \frac{z(u)}{z(u)} = 1 + o(1).$$

Be to,

$$z(u) = u - \ln z(u).$$

Iš čia

$$z(u) = u - \ln(u - \ln z(u)) = u - \ln u - \ln\left(1 - \frac{\ln z(u)}{u}\right) = u - \ln u + o(1),$$

kai $u \to \infty$. Todėl

$$\begin{aligned} y_n^2 &= 2\ln n - \ln(2\pi c^2) + o(1) - \ln(2\ln n - \ln(2\pi c^2) + o(1)) \\ &= 2\ln n - \ln(2\ln n) - \ln(2\pi c^2) + o(1) \\ &= 2\ln n - \ln(\ln n) - \ln(4\pi c^2) + o(1). \end{aligned}$$

Tada

$$b_n(x) = -\sqrt{2\ln n - \ln\ln n - \ln(4\pi c^2) + o(1)} - ax = -\sqrt{2\ln n} - ax + o(1).$$

Tuomet galima tikėtis, kad ir

$$b_n = -\sqrt{2\ln n} - a' + o(1)$$

su kokiu nors $a' \in \mathbb{R}$?

Toliau skaičiuosime b_n asimptotiką. Suformuluojame hipotezę, kad

$$b_n = -\sqrt{2\ln n} - a' + o(1)$$

su tam tikru a'.

Pažymime

$$b_n(a') = -\sqrt{2\ln n} - a'$$

ir bandome rasti $[1 - \Phi(ax + b_n(a'))]^n$ asimptotiką su fiksuotu x. Galime pastebėti, kad

$$1 - \Phi(ax + b_n(a')) = \Phi(\sqrt{2\ln n} - a' - ax)$$

ir

$$1-\Phi(\sqrt{2\ln n}-a'-ax)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+o(1)}{\sqrt{2\ln n}+a'-ax}\exp\left(\frac{-(\sqrt{2\ln n}+a'-ax)^2}{2}\right)$$
$$\asymp\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\exp(-\ln n-(a'-ax)\sqrt{\ln n}).$$

Jei $a'>ax$, tai reiškinys dešinėje pusėje yra $o(n^{-1})$ ir

$$[1-\Phi(ax+b_n(a'))]^n=(1-o(n^{-1}))^n\to 1.$$

Jei $a'>ax$, tai reiškinys dešinėje pusėje asimptotiškai didesnis už $\frac{1}{n}$, nes

$$\frac{e^{\delta\sqrt{\ln n}}}{\sqrt{\ln n}}\to\infty$$

su bet kokiu $\delta>0$. Vadinasi,

$$[1-\Phi(ax+b_n(a'))]^n\to 0.$$

Tada

$$[1-\Phi(ax+b_n(a'))]^n\to\begin{cases}1, & \text{kai } x<\frac{a'}{a}\\ 0, & \text{kai } x>\frac{a'}{a}.\end{cases}$$

Tuomet, kadangi didėjanti arba mažejanti aprėžta seka turi ribą, gauname, kad

$$\mathbb{E}[1-\Phi(ax+b_n(a'))]^n\to\mathbb{P}\left(X<\frac{a'}{a}\right).$$

Tarkime, kad $z_{1-\gamma}$ yra standartinio normalaus dėsnio $(1-\gamma)$ kvantilis, t.y.

$$\mathbb{P}(X<z_{1-\gamma})=1-\gamma.$$

Pažymėkime $a'=d$, jei $d<az_{1-\gamma}$. Tada

$$\mathbb{E}[1-\Phi(ax+b_n(d))]^n\to\mathbb{P}\left(X<\frac{d}{a}\right)<1-\gamma$$

todėl, kai n pakankamai didelis,

$$\mathbb{E}[1-\Phi(ax+b_n(d))]^n<1-\gamma,$$

o tai reiškia, kad $b_n(d)>b_n$. Panašiai galima įrodyti, kad jei $d'>az_{1-\gamma}$, tai $b_n(d')<b_n$ su pakankamai dideliais n. Vadinasi,

$$b_n = -\sqrt{2\ln n} - az_{1-\gamma} + o(1).$$

Toliau į (19) lygybę įsistatę ką tik gautą b_n asimptotiką gauname:

$$\begin{aligned} p_n &= \Phi\left(\frac{-\sqrt{2\ln n} - az_{1-\gamma} + o(1)}{\sqrt{1+a^2}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{2\ln n} + az_{1-\gamma} + o(1)}{\sqrt{1+a^2}}\right) \\ &= \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{2\ln n} + az_{1-\gamma} + o(1)} \exp\left(-\frac{\sqrt{2\ln n} + az_{1-\gamma} + o(1)}{2(1+a^2)}\right) \\ &\asymp \frac{1}{\sqrt[1+a^2]{n}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}az_{1-\gamma}}{1+a^2}\sqrt{\ln n}\right) \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \exp(o(\sqrt{\ln n})). \end{aligned} \tag{20}$$

Paskutinė riesta lygybė reiškia, jog išraiškos yra asimptotiškai lygios, vadinasi, kai kintamasis artėja į begalybę, funkcijų p_n ir gautos asimtotinės formulės santykis riboje lygus vienam. Šią asimptotiką jau galime naudoti suskaičiuoti įsipareigojimų neįvykdymo tikimybes, kai nėra įsipareigojimų neįvykdymų atvejų. Skaičiavimuose žemiau **5.1**, vietoj o-mažiuko funkcijos, naudojau funkcijos $e^{\frac{log(1-\gamma)}{n}}$ Teiloro eilutės skleidinio pirmus 3 narius.

5.1 Pavyzdys

Toliau pateiksime pavyzdį, kokios PD gaunasi jas skaičiuojant pagal (20) apskaičiuotą asimptotinę formulę, kai $n_A = 500,\ n_B = 700,\ n_C = 700$.

9 lentelė: Vaizduojami įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių viršutiniai rėžiai paskaičiuoti su asimptotine formule

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_A}$	0,01%	0,03%	0,07%	0,11%	0,23%
$\hat{p_B}$	0,02%	0,04%	0,09%	0,13%	0,28%
$\hat{p_C}$	0,03%	0,08%	0,16%	0,24%	0,48%

Pateiksime dar vieną pavyzdį, kai $n_A = 200,\ n_B = 600,\ n_C = 400$

10 lentelė: Vaizduojami įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių viršutiniai rėžiai paskaičiuoti su asimptotine formule

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_A}$	0,02%	0,05%	0,10%	0,15%	0,32%
$\hat{p_B}$	0,02%	0,06%	0,12%	0,18%	0,37%
$\hat{p_C}$	0,06%	0,13%	0,25%	0,37%	0,73%

Galiausiai pateiksime pavyzdį su šiek didesniu imties dydžiu. Tuomet $n_A = 1000,\ n_B = 1400,\ n_C = 1400$

11 lentelė: Vaizduojami įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių viršutiniai rėžiai paskaičiuoti su asimptotine formule

γ	50%	75%	90%	95%	99%
$\hat{p_A}$	0,01%	0,02%	0,04%	0,06%	0,13%
$\hat{p_B}$	0,01%	0,02%	0,05%	0,08%	0,17%
$\hat{p_C}$	0,02%	0,04%	0,09%	0,13%	0,28%

Palyginę 9, 10 ir 11 lenteles su lentelėmis 7 ir 8, kuriose yra tos pačios PD tik skaičiuotos tiesiogiai pagal formulę, matome, kad tikimybės naudojant asimptotinę formulę yra mažesnės. Iš tiesų, šios tikimybės yra panašesnės į 1-oje ir 2-oje lentelėse aprašytas tikimybes. Taip pat, kai imtis yra didesnė (pvz., skaičiuojant PD p_A) tikimybės naudojant asimptotinę formulę yra arčiau tikimybių skaičiuojant naudojant teorines formules. Tai yra ganėtinai natūralu, nes asimptotinės formulės veikia geriau, kai imtis n yra didelė.

6 Išvados

Šio darbo tikslas buvo praplėsti K. Pluto ir D. Tasche straipsnio [1] idėjas pavyzdžiais ir pabandyti surasti asimptotinę formulę apskaičiuoti PD, kai įsipareigojimų neįvykdimai yra veikiami sisteminiu faktoriumi. Deja, panašu, kad asimptotinę formulę sąlyginai lengvai galima apskaičiuoti iš bendros formulės tik tuo atveju, kai nėra įsipareigojimų neįvykdymų. Bendru atveju, kai yra bent vienas įsipareigojimų neįvykdymo atvejis, formulė (7) tampa ganėtinai sudėtinga. Tačiau atsižvelgiant į tai, jog su statistiniais paketais ir kompiuteriu nėra sudėtinga skaičiuoti ir teorines formules (7) ar (12), nėra aišku, kiek yra verta naudoti gautą asimptotinę formulę ar ieškoti asimptotinių formulių kitiems atvejams. Paprastos apytikslės ir efektyvios formulės būtų geriau nei skaitinis sprendimas.

Literatūra

[1] Katja Pluto and Dirk Tasche *Estimating Probabilities of Default for Low Default Portfolios*, straipsnio adresas - https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0411699v2.pdf, 2004 gruodžio 11.

[2] Lietuvos banko valdybos 2006 11 09 nutarimas Nr. 138 *Dėl Kapitalo pakankamumo skaičiavimo bendrosios nuostatos*, 2006, Vilnius.

[3] Christian Blunhm, Ludger Overbeck, Christoph Wagner *An Introduction to Credit Risk Modeling*, A CRC Press Company, London, New York, Washington, D.C., 285 p.

[4] Basel Committee on Banking Supervision, *Studies on the Validation of Internal Rating Systems*, Basel, 2005, 120 p.

[5] Rūta Vainienė, *Ekonomikos terminų žodynas*, Vilnius, 2005, 328 p.

[6] Remigijus Leipus ir Mantas Valužis, *Kredito rizika kaip pasirinkimo sandoris*, Vilnius, 2006, 59 p.

[7] Bank for Intenational Settlements, *An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions* , Basel, 2005, 16 p.

7 Priedai

7.1 R kodas

```
#Viska isvalo
rm(list = ls())
library(LaplacesDemon)
library(VaRES)

get.PDT <- function(n, defaults, rho,gamma) {
  start.time <- Sys.time()
  #Isistatom pasitikejimo lygmeni
  confidence_interval_at_0 = gamma;
  #Isistatom pasitikejimo lygmeni
  confidence_interval_at_k = gamma;
  #Kai yra 0 ir k isipareigojimu nevykdymu.
  PDTs <- PDT_solve(n, rho)
  PDT_0 <- PDTs[1]
  PDT_k <- PDTs[2]
  #Skaiciuojam PD
  PDT <- c(c(n, defaults,
             percent(defaults/n),
             percent(PDT_0),
             rho,
             percent(confidence_interval_at_0, 2),
             percent(PDT_k),
             rho,
             percent(confidence_interval_at_k, 2)))

  #Skaiciavimo laikas
  end.time <- Sys.time()
  time.taken <- round(end.time - start.time, 3)
  #Pavadiname
  PDT <- matrix(c(PDT,time.taken), 1, 10)
  colnames(PDT) <- c("Size",
                     "Number of defaults",
                     "ODR", "PDT_0", "Correlation at 0 defaults",
                     "gamma interval at 0 defaults",
                     paste("PDT_",defaults),
                     paste("Correlation at",defaults,"defaults"),
                     paste("gamma interval at",defaults,"defaults"),
```

```
                   "Time taken (seconds)")
  return(PDT)
}
vget.PDT <- Vectorize(get.PDT, c("n", "defaults"))


#Pluto Tasche
G <- function(PDT, y, rho)
{pnorm((qnorm(PDT) - sqrt(rho) * y) / (sqrt(1 - rho)))}
PDT_solve <- function(n, rho){
  #Integralo intervalai ir zingsniai
  y <- seq(-20, 20, by = 0.0001)
  val <- 0

  #Sprendziam Pluto Tasche
  f <- function(x)
  {
    for (i in 1:(length(y)-1))
    { val <- val + sum(dbinom(0:k,n,G(x,y[i], rho)))*
      (pnorm(y[i+1])-pnorm(y[i]))}
    return(val-1+alpha)
  }
  #Suranda PD 0 ir k
  k <- 0;
  alpha <- gamma
  PDT_0 <- uniroot(f,c(0,1))$root
  k <- defaults;
  alpha <- gamma
  PDT_k <- uniroot(f,c(0,1))$root
  return(c(PDT_0, PDT_k))
}


# Uzrasoma procentais
percent <- function(x, digits = 4, format = "f", ...) {
  paste0(formatC(100 * x, format = format, digits = digits, ...), "%")
}


#Skolininku skaicius
n = 400
```

```
#Isipareigojimu nevykdymo skaicius
defaults = 2
#Pasitikejimuo lygmuo
gamma = 0.5
#Turto koreliacija
rho = 0.12

PDT = get.PDT(n,
              defaults,
              rho,
              gamma)
View(PDT)



#skaiciuojama pagal asimptotikos formule, kai k = 0
asimptotika <- function(n, gamma) {
a <- sqrt(0.12)/sqrt(1-0.12)
z <- qnorm(1-gamma)
f <- (sqrt(2*log(n))+a*z+(((log(1-gamma))/n)^2)/2
      + (((log(1-gamma))/n)^3)/6
      + (((log(1-gamma))/n)^4)/24)/(sqrt(1+a^2))
rez <- 1 - pnorm(f)
rez
}

test <- asimptotika(n, gamma)
test

#atvejis, kai tikimybes nepriklausomos ir nera isipareigojimu neivykdyr
p_nepriklausomos_be_defaults <- function(n,gamma) {
  p <- 1 - (1 - gamma)^(1/n)
  p
}


#atvejis, kai tikimybes nepriklausomos, bet yra keli isipareigojimu ne
p_nepriklausomos_keli_defaults <- function(n,k,gamma) {
  alfa <- k+1
  beta <- n-k
  p <- qbeta(gamma, alfa ,beta)
```

```
  p
}

p_asimptotika <- asimptotika(n,gamma)
p_be_defaults <- p_nepriklausomos_be_defaults(n,gamma)
p_su_defaults <- p_nepriklausomos_keli_defaults(n,defaults,gamma)

rezultatas <- round(c(p_asimptotika, p_be_defaults,
                      p_su_defaults)*100, digits = 4)
rezultatas
```