VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS MAGISTRANTŪROS STUDIJŲ PROGRAMA

Magistro baigiamasis darbas

Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės modeliavimas žemo nemokumo portfeliuose veikiant sisteminiam faktoriui

Probability of Default Modeling for Low Default Portfolios under the Effect of Systematic Factor

Ieva Šimkūnaitė

Darbo vadovas doc. dr. Andrius Grigutis

Vilnius, 2021

TURINYS

1. Santrauka

Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės modeliavimas žemo nemokumo portfeliuose veikiant sisteminiam faktoriui

Santrauka

Šio magistro darbo tikslas – išsiaiškinti ir apibendrinti įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės skaičiavimo formules, žemo įsipareigojimų neįvykdymo portfeliuose, trimis atvejais: a) kai įsipareigojimų neįvykdymo įvykiai yra nepriklausomi, b) kai įsipareigojimų neįvykdymo įvykiai tarpusavyje nepriklausomi, bet juos veikia sisteminis ir individualus faktoriai, kurie yra tarpusavyje nepriklausomi, c) kai įsipareigojimų neįvykdymai tarpusavyje nepriklausomi, tačiau juos veikia sisteminis ir individualus faktoriai, kurie tarpusavyje yra priklausomi. Darbe buvo patikrinti variantai, kai įsipareigojimų neįvykdymų nėra arba yra keletas. Pagal žinomas ir gautas formules, gauti pavyzdžiai pasirenkant tam tikrus reikšmingumo lygmenis. Pavyzdžiai apžvelgti ir palyginti. Darbo pabaigoje pateiktos išvados. Ši tema aktuali bendram kredito rizikos valdymo tikslui bei portfelių, kuriuos sudaro individai, turintys piniginių įsipareigojimų, modeliavimui.

Raktiniai žodžiai: Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė, nemokumo tikimybė, žemo įsipareigojimų neįvykdymo portfeliai, sisteminis faktorius.

Probability of Default Modeling for Low Default Portfolios under the Effect of Systematic Factor

Abstract

The purpose of this master's thesis is to find formulas of default probabilities for low default portfolios in three cases: a) when default events are independent, b) where the events of default are independent of each other but are affected by systemic and individual factors that are independent of each other, c) when the events of default are independent of each other but are affected by systemic and individual factors that are interdependent. Cases where there are no or are several defaults have been checked. According to the formulas found, samples were modeled by selecting certain levels of significance. Samples were reviewed and compared. Conclusions were presented at the end of the work. This topic is relevant for modeling portfolios made up of individuals with monetary obligations and for credit risk management purpose in general.

Key words: Probability of default, probability of insolvency, low default portfolios, systematic factor.

2. Įvadas

Paskolų teikimas yra pagrindinė tradicinio banko veikla. Tam, kad jos sėkmingai būtų išduodamos klientams, bankui neužtenka vien tik turėti finansinių išteklių, jam taip pat reikia informacijos apie savo klientus – skolininkus, tam kad žinoti kiek rizikinga bus išduoti paskolą. Šiam tikslui bankui gali prireikti įvairios informacijos: bendrų duomenų apie skolininką, duomenų apie ankstesnį skolininko įsipareigojimų vykdymą, patikimumą, reputaciją ar net šalį, kurioje gyvena skolininkas. Deja, bankui pateikta informacija gali būti netiksli. Tačiau, net ir tiksli informacija neeliminuoja rizikos. Todėl riziką skolininko patikimumui būtina vertinti.

Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė (angl. probability of default, toliau trumpinsime PD), tai tikimybė, kad skolininkas per metus nesugebės įvykdyti savo finansinių įsipareigojimų [1]. Kadangi, ši tikimybė yra viena iš svarbiausių kredito rizikos vertinime, tai PD tikslumas yra tiesiogiai susijęs su kredito rizikos vertinimo modelių kokybe. Aiškiai suvokus kredito rizikos aktualumą, padidėjus jos reikšmei ir atsiradus poreikiui tiksliau įvertinti jos rodiklius, kredito rizikos modeliavimas taip pat tapo viena iš sparčiausiai besivystančių finansų inžinerijos sričių [7]. Bėda ta, kad neretai vertinami portfeliai, turi mažą įsipareigojimų neįvykdymų skaičių (angl. low default portfolios), o portfeliuose, kurie sudaryti iš finansiškai stiprių skolininkų, įsipareigojimų neįvykdymų gali iš viso nebūti. Dėl šių priežąsčių juos įvertinti gali būti sudėtinga. Atsižvelgiant į tai, kad portfeliai su mažu įsipareigojimų neįvykdymo skaičiumi pastaruoju metu dažnai pasitaiko praktikoje – ši tema ypač aktuali.

Bazelio tarptautinio komercinių bankų priežiūros komitetas (dar vadinamas Bazelio komitetu) sukūrė bankų rizikos valdymo sistemą [6]. Jie nustatė bankams kapitalo pakankamumo reikalavimą ir jo skaičiavimo metodiką, grindžiamą konservatyvizmu, o Katja Pluto ir Dirk Tasche 2004 m. pabaigoje pagal šiuos reikalavimus pasiūlė konservatyvumo metodą kredito rizikai vertinti. Jų straipsnis atspausdintas 2011 metų „SSRN Electronic Journal“ [8].

PD yra viena pagrindinių kredito rizikos sudedamųjų dalių. Šiame darbe PD analizei bus pasitelktas konservatyvumo metodas skolininkų kategorijoms vertinti, bei Bernulio schema [3]. Mūsų tikslas – apskaičiuoti PD, kai įsipareigojimų neįvykdymo atvejai yra nepriklausomi tarpusavyje ir: juos veikia sisteminis bei individualus faktoriai, kurie tarpusavyje nepriklausomi, juos veikia sisteminis ir individualus faktoriai, kurie tarpusavyje priklausomi.

2.1. Motyvacija

Šalies ir pasaulio ekonomika šiuo metu išgyvena sudėtingą laikotarpį. Pasaulinė pandemija ir įvestas karantinas nemenkai paveikė ekonomiką. Europos šalyse ir Lietuvoje yra taikomi įvairūs apribojimai: nebūtinų prekių fizinės prekybos sustabdymas, nebūtinų kontaktinių paslaugų teikimo uždraudimas, apgyvendinimo paslaugų sustabdymas, žmonių judėjimo apribojimas. Trumpai – jei paslauga ar prekė, kuri nėra būtina žmonėms išgyventi, negali būti suteikta ar perduota bekontakčiu ar nuotoliniu būdu – ji yra negalima. Dėl šios situacijos kai kuriems verslininkams darosi sunku išlaikyti verslus, žmonės praranda darbus ir pajamų šaltinius. Pasidaro sunku mokėti nuomos ir kitus mokesčius. Iškyla problema – skolininkai tampa nebemokūs. Dėl šių priežasčių bankai kelia reikalavimus skolininkams ir paskolas išdavinėja atsargiau. Palyginkime šių dienų situaciją su netolima praeitimi, tarkime keletu metų atgal, kai rinkose vyravo stabilumas. Tikėtina, kad to meto konservatyvus portfelių vertinimas, paklojo gerą pamatą šioms dienoms. Galbūt, jei puikaus mokumo skolininkai, nebūtų vertinti konservatyviai, šiuo metu turėtume dar sudėtingesnę situaciją. Todėl tirti įsipareigojimų neįvykdymo tikimybes – ypač aktualu.

2.2. Uždavinys

Įvertinti įsipareigojimų neįvykdymo tikimybę, naudojant Katja Pluto ir Dirk Tasche nelygybę [8], portfeliuose su mažu įsipareigojimų neįvykdymo skaičiumi

$$1-\gamma \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} G(p,\varrho,y)^i (1-G(p,\varrho,y))^{m-i} dy. \tag{2.1}$$

Čia:
γ – pasitikėjimo lygmuo;
$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ – normaliojo skirstinio tankis;
$\binom{m}{i} = \frac{m!}{i!(m-i)!}$ – binominis koeficientas;
$G(p,\varrho,y) = \Phi(\frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}})$;
$\Phi(\cdot), \Phi^{-1}(\cdot)$ – standartinio normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcija ir jo atvirkštinė pasiskirstymo funkcija;
p – įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė (PD);
ϱ – turto koreliacijos koeficientas, $\varrho \neq 1$.

Tarsime, kad skolininko turto grąža r_i, kai $(i = 1, 2, \ldots, m)$ skolininkų skaičius protfelyje, stebimu laikotarpiu (paprastai per 1 – erius metus) užrašoma taip

$$r_i = \beta_i S_i + \xi_i, \tag{2.2}$$

čia S_i ir ξ_i yra atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį. Atsitiktinis dydis S yra vadinamas sisteminiu faktoriumi, o ξ – individualia dalimi (taip pat individualiu faktoriumi arba liekana). Be to S_i, ξ_i yra atsitiktinės, nepriklausomos šių a. d. kopijos. Atsitiktiniai dydžiai S ir ξ visiems skolininkams yra tokie patys.

2.3. Prielaidos

Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybę p norime įvertinti galiojant šioms 5 prielaidoms:

- **I. Prielaida:** Įsipareigojimų neįvykdymo įvykiai yra nepriklausomi, įsipareigojimų neįvykdymų nėra;

- **II. Prielaida:** Įsipareigojimų neįvykdymo įvykiai yra nepriklausomi, įsipareigojimų neįvykdymų yra;

- **III. Prielaida:** Įsipareigojimų neįvykdymo atvejai priklauso nuo sisteminio faktoriaus, sisteminis ir individualus faktoriai yra nepriklausomi, įsipareigojimų neįvykdymų nėra;
- **IV. Prielaida:** Įsipareigojimų neįvykdymo atvejai priklauso nuo sisteminio faktoriaus, sisteminis ir individualus faktoriai yra nepriklausomi, yra keli įsipareigojimų neįvykdymai;
- **V. Prielaida:** Įsipareigojimų neįvykdymo atvejai priklauso nuo sisteminio faktoriaus, sisteminis ir individualus faktoriai yra priklausomi, įsipareigojimų neįvykdymų nėra arba yra keletas;

3. Sąvokos, apibrėžimai ir tyrimams naudojami bendrieji principai

Žemiau aprašomi darbui naudojami apibrėžimai bei taisyklės.

3.1. Kredito rizika. Bernulio schema

PD (angl. probability of default) – įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė, tai tikimybė, kad per vienų metų laikotarpį skolininkas neįvykdys įsipareigojimų[1].
Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė yra pagrindinis mūsų tyrimo objektas. Ji yra ir viena iš svarbiausių kredito riziką nusakančių rodiklių.

Kredito rizika (angl. credit risk) – tikimybė, kad sandorio šalis nesugebės atsiskaityti sutartyje nustatyta tvarka [1].
Bankai išduodami savo klientams paskolas, kaskart susiduria su ateities neapibrėžtumu – skolininkas gali neįvykdyi įsipareigojimų ir paskolos negrąžinti dėl įvairiausių priežasčių. Taip atsiranda kredito rizika.

Portfelis (angl. portfolio) – visos banko išduotos paskolos.
Norint bankui suvaldyti kredito riziką, jis privalo prižiūrėti ne tik atskiras paskolas ir jų įsipareigojimų vykdymą, tačiau ir visam paskolų portfeliui tenkančią kredito riziką. Pagrindinis kredito rizikos rodiklis yra įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė. Jai analizuoti naudojama Bernulio schema [3].

Bernulio schema (angl. Bernoulli scheme) – Atlikus n nepriklausomų eksperimentų, kurių kiekvieno metu įvykiai A ir $\bar{A}$ gali įvykti su tikimybėmis $P(A) = p$ ir $P(\bar{A}) = 1 - p$. Tikimybė, kad įvykis A įvyks lygiai k kartu yra

$$\mathbb{P}_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{3.1}$$

Siekiant sutaupyti laiko, Bernulio schemos neįrodinėsime. Įrodymą galima rasti V. Čekanavičiaus vadovėlyje „Statistika ir jos taikymai 1 dalis“. [3]

3.2. Konservatyvumo metodas

Konservatyvumo metodas (angl. most prudent estimation methodology) – tai metodas, kai PD skaičiavimui naudojami konservatyvūs rizikos įverčiai. Jis taip pat gali būti naudojamas kaip alternatyva atitikti Bazelio konservatyvumo reikalavimus, su priežiūros institucijų tvirtinimu. Šiuo metodu siūloma atlikti konservatyvų skolininkų vertinimą, kai paskolų porfelis turi mažą įsipareigojimų neįvykdymo skaičių, t. y. kai duomenų, apie įsipareigojimų neįvykdymą, turime ypač mažai. Bankuose konservatyvumo metodas gali būti taikomas visų rūšių mažų įsipareigojimų nevykdymo portfeliams. K. Pluto ir D. Tasche [8] šį metodą pasiūlė kaip papildymą kitiems vertinimo metodams, nesvarbu, ar tai būtų išorinių reitingų palyginimas, Schuermanno ir Hansono 2004 pasiūlymai [9] ar kiti. Pagal šį metodą skolininkai įvertinami patikimumo kategorijomis, kai A_{n_1} – patikimiausias skolininkas – jo įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė yra mažiausia, o A_{n_n} – mažiausiai patikimas skolininkas – įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė didžiausia

$$p_{A_{n_1}} \leqslant p_{A_{n_2}} \leqslant \ldots \leqslant p_{A_{n_n}} \tag{3.2}$$

Metodo pavadinimas nusako, kad PD bus vertinama saugiausiai, todėl yra įvedama reitingo tikimybė p_x. Kai x yra lygus $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_{n-1}}$ ir galioja (3.2), reitingo tikimybė yra prilyginama viršutiniam rėžiui $p_{A_{n_n}}$.
Taigi, vertinant šiuo metodu, tikimybė, kad $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_{n-1}}$ kategorijų skolininkai neįvykdys įsipareigojimų vertinama kaip A_{n_n} kategorijos skolininkų PD

$$\begin{aligned}
&p_{A_{n_1}} = p_{A_{n_n}}, \\
&p_{A_{n_2}} = p_{A_{n_n}}, \\
&\vdots \\
&p_{A_{n_{n-1}}} = p_{A_{n_n}}.
\end{aligned}$$

4. I. Prielaida: Įsipareigojimų neįvykdymo įvykiai nepriklausomi, įsipareigojimų neįvykdymų nėra

Yra du nepriklausomumo aspektai: a) tarpusavio ir b) nuo sisteminio faktoriaus. Pirmiausia tirsime atvejį, kai įsipareigojimų neįvykdymai nepriklausomi, t. y. tarsime, kad jų neveikia joks išorinis faktorius. Be to, laikysimės prielaidos, kad įsipareigojimų neįvykdymų portfelyje nėra – visi skolininkai vykdo savo įsipareigojimus.

4.1. Konservatyvumo metodo ir Bernulio schemos pritaikymas

Tyrimo objektas – paskolų portfelis su m skolininkų. Skolininkai suskirstyti į kategorijas pagal patikimumą. A_{n_1} kategorijos skolininkų yra $m_{A_{n_1}}$, A_{n_2} kategorijos – $m_{A_{n_2}}, \ldots, A_{n_n} - m_{A_{n_n}}$.

Taikome konservatyvumo metoą, todėl PD vertiname

$$p_{A_{n_1}} = p_{A_{n_2}} = \ldots = p_{A_{nn}}. \tag{4.1}$$

Pasinaudojus (4.1) lygybe, gauname, kad tikimybės kiekvienoje kategorijoje yra vienodos. Tikrinsime atvejį, kai visi skolininkai įvykdo įsipareigojimus, t. y. įsipareigojimų neįvykdymų skaičius yra 0. Tam naudosime aukščiau minėtą Bernulio chemą. Tikimybė, kad skolininkas įvykdys įsipareigojimus yra priešinga įsipareigojimų neįvykdymo tikimybei, todėl ji lygi

$$(1-p)^{m_{A_{n_1}}+m_{A_{n_2}}+\ldots+m_{A_{nn}}}.$$

Toliau naudosime Bernulio schemą. Įvykis A – „ A_{n_1} kategorijos skolininkas įsipareigojimų neįvykdė“ šiuo atveju neįvyks nei karto, todėl $k=0$. Taigi gauname

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \binom{m_{A_{n_1}}+m_{A_{n_2}}+\ldots+m_{A_{nn}}}{0} p^0_{A_{n_1}} (1-p_{A_{n_1}})^{m_{A_{n_1}}+m_{A_{n_2}}+\ldots+m_{A_{nn}}} \\ &= (1-p_{A_{n_1}})^{m_{A_{n_1}}+m_{A_{n_2}}+\ldots+m_{A_{n_1}}}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dabar mūsų ieškomą PD vertinsime pasikliautinaisiais intervalais. Naudosimės reitingo tikimybe p_x, kai x yra viena iš kategorijų $(A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_n})$ ir jos pasikliautinuoju intervalu laikysime tikimybių p_x rinkinį, su kuriuo tikimybė $(1-p_{A_{n_1}})^{m_{A_{n_2}}+m_{A_{n_2}}+\ldots+m_{A_{nn}}}$ yra didesnė arba lygi $(1-\gamma)$, čia γ – reikšmingumo lygmuo.

Reikšmingumo lygmuo (angl. singnificance level) – tikimybė pagrįstai atmesti klaidingą hipotezę. Šį dydį įprasta žymėti α arba γ [3]
Dabar pagal (4.2) ir pasirinkus reikšmingumo lygmenį gauname nelygybę

$$(1-\gamma) \leqslant (1-p_{A_{n_1}})^{m_{A_{n_1}}+m_{A_{n_2}}+\ldots+m_{A_{nn}}}.$$

Norėdami gauti tikimybę $p_{A_{n_1}}$ spręsime šią nelygybę

$$\begin{aligned} &\sqrt[m_{A_{n_1}}+m_{A_{n_2}}+\ldots+m_{A_{nn}}]{(1-\gamma)} \leqslant \sqrt[m_{A_{n_1}}+m_{A_{n_2}}+\ldots+m_{A_{nn}}]{(1-p_A)^{m_{A_{n_1}}+m_{A_{n_2}}+\ldots+m_{A_{nn}}}} \\ &\Longrightarrow\ (1-\gamma)^{\frac{1}{m_{A_{n_1}}+m_{A_{n_2}}+\ldots+m_{A_{nn}}}} \leqslant (1-p_A) \\ &\Longrightarrow\ p_A \leqslant 1-(1-\gamma)^{\frac{1}{m_{A_{n_1}}+m_{A_{n_2}}+\ldots+m_{A_{nn}}}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Analogiškai konstruojame A_{n_2} kategorijos skolininkų PD. Pasinaudoję konservatyvumo metodu, vertinam A_{n_2} kategorijos skolininkų PD ir gauname, jog $p_{A_{n_2}} = p_{A_{n_3}} = \ldots = p_{A_{nn}}$. Kadangi skolininkai vertinami vienodai abiejose klasėse, tai skolininkų skaičių galime laikyti homogeniniu rinkiniu $(m_{A_{n_2}} + m_{A_{n_3}} + \ldots + m_{A_{nn}})$.

Toliau nelygybę sprendžiame analogiškai

$$
\begin{aligned}
&(1-\gamma) \leqslant (1-p_{A_{n_2}})^{m_{A_{n_2}}+m_{A_{n_3}}+\ldots+m_{A_{nn}}} \\
&\Longrightarrow \sqrt[m_{A_{n_2}}+m_{A_{n_3}}+\ldots+m_{A_{nn}}]{(1-\gamma)} \leqslant \sqrt[m_{A_{n_2}}+m_{A_{n_3}}+\ldots+m_{A_{nn}}]{(1-p_{A_{n_2}})^{n_B+n_c}} \\
&\Longrightarrow (1-\gamma)^{\frac{1}{m_{A_{n_2}}+m_{A_{n_3}}+\ldots+m_{A_{nn}}}} \leqslant (1-p_{A_{n_2}}) \\
&\Longrightarrow p_{A_{n_2}} \leqslant 1-(1-\gamma)^{\frac{1}{m_{A_{n_2}}+m_{A_{n_3}}+\ldots+m_{A_{nn}}}}.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Taip konstruojamos nelygybės, kol pasiekiama nepatikimiausių skolininkų kategorija. Vertinant A_{n_n} kategorijos skolininkus, jų PD vertinti jau nereikia konservatyvumo metodo taikymo ir tą pačią tikimybę, kad neįvyks nė vienas įsipareigojimų neįvykdymų atvejis užrašome $(1-p_{A_{n_n}})^{m_{A_{nn}}}$ bei skaičiuodami analogiškai gauname

$$p_{A_{n_n}} \leqslant 1-(1-\gamma)^{\frac{1}{m_{A_{nn}}}}. \tag{4.5}$$

4.2. Pavyzdys: nepriklausomumo prielaida, įsipareigojimų neįvykdymų nėra

Dabar pateiksime keletą iliustracijų aukščiau aprašytai teorijai. Laikomės prielaidų, kad įsipareigojimų neįvykdymai yra nepriklausomi ir jų porfelyje neturime. Tarsime, kad turime m dydžio portfelį sudarytą iš A_1, A_2 ir A_3 kategorijos skolininkų. Sakykime, pirmuose dviejuose atvejuose $m = 1000$, o trečiuoju $m = 2000$, taip pat skiriasi kiekvienos kategotijos skolininkų skaičius. Skaičiavimams naudota formulė pateikta **III. Priede**. Pirmuoju atveju

$$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200$$

Pasirenkame reikšmingumo lygmenius γ ir kompiuterinio modeliavimo programa „R“ suskaičiuojame PD. Rezultatus pateikiame lentelėje.

1 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,0693%	0,1385%	0,2300%	0,2991%	0,4595%	0,6884%
$\hat{p}_{A_2}$	0,1385%	0,2769%	0,4595%	0,5974%	0,9168%	1,3721%
$\hat{p}_{A_3}$	0,3460%	0,6908%	1,1447%	1,4867%	2,2763%	3,3949%

Kitu atveju skaičiuojame PD pagal tas pačias prielaidas, tik pakeičiame kategorijoms priskiriamų skolininkų saičius

$$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_3} = 100$$

2 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_3} = 100$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,0693%	0,1385%	0,2300%	0,2991%	0,4595%	0,6884%
$\hat{p}_{A_2}$	0,1066%	0,2130%	0,3536%	0,4598%	0,7060%	1,0571%
$\hat{p}_{A_3}$	0,6908%	1,3767%	2,2763%	2,9513%	4,5007%	6,6746%

Trečiuoju atveju skaičiavimai analogiški, tik šįkart didžiausią skolininkų kiekį turime A_3 kategorijoje

$$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200$$

3 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,0347%	0,0693%	0,1151%	0,1497%	0,2300%	0,3448%
$\hat{p}_{A_2}$	0,0433%	0,0866%	0,1438%	0,1871%	0,2874%	0,4308%
$\hat{p}_{A_3}$	0,0577%	0,1155%	0,1917%	0,2493%	0,3830%	0,5740%

Apibendrinant šias tris lenteles, galime teigti, kad įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės priklauso nuo skolininkų skaičiaus ir reikšmingumo lygmens γ. Didesnis skolininkų skaičius portfelyje generuoja mažesnes įsipareigojumų neįvykdymo tikimybes. Taip pat yra tenkinama (3.2) nelygybė – kuo žemesnė skolininkų kategorija, tuo didesnė PD. Dar matome, kad A_1 kategorijos skolininkų PD priklauso nuo bendro skolininkų skaičiaus, o ne nuo A_1 kategorijoje esančių skolininkų, nes 1 ir 2 lentelių duomenys A_1 kategorijos skolininkams sutampa, nors šios kategorijos skolininkų skaičiai skiriasi.

Įrodysime, kad skolininkų skaičiui didėjant – PD mažėja. Pasinaudosime reitingo tikimybe p_x, kai $x \in [A_1, A_2, A_3]$. Tuomet lygties $p_x = 1 - (1-\gamma)^{\frac{1}{m_x}}$ išvestinė pagal skolininkų skaičių m_x yra

$$(p_x)'_{m_x} = \frac{1}{m_x^2}(1-\gamma)^{\frac{1}{m_x}} \ln(1-\gamma).$$

Dabar pažiūrėkime į sandaugą $\frac{1}{m_x^2}(1-\gamma)^{\frac{1}{m_x}} \ln(1-\gamma)$ dalimis. Kadangi $\frac{1}{m_x^2} > 0$, $(1-\gamma)^{\frac{1}{m_x}} > 0$, o $ln(1-\gamma) < 0$, nes $\gamma \in (0,1)$, tai gauname, kad išvestinė visuomet bus neigiama. Kuo didesni m_x, tuo išvestinė labiau neigiama. Vadinasi, didėjant m_x, mažėja reitingo PD p_x.

PD taip pat priklauso nuo reikšmingumo lygmens. Kuo didesnis γ, tuo dinesnis PD viršutinis intervalo rėžis, reiškia, kad didesnė ir reitingo tikimybė. Kadangi įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės yra nemažesnės nei $(1-\gamma)$, tai reikšmingumo lygmeniui didėjant, didėja intervalas, iš kurio reišmes įgyja PD.

5. II. Prielaida: Įsipareigojimų neįvykdymo įvykiai nepriklausomi, yra keli įsipareigojimų neįvykdymo atvejai

Toliau dėstome sekantį tyrimo atvejį, kuris nuo 4 skyriaus skiriasi tuo, kad dabar turime įsipareigojimų neįvykdymų. Vėl taikysime konservatyvumo metodą. Paskolų portfelis sudarytas iš m skolininkų, suskirstytų į tas pačias 3 kategorijas $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_n}$, kai $m = m_{A_{n_1}} + m_{A_{n_2}} + \ldots + m_{A_{n_n}}$. Dabar tarsime, kad kiekvienoje kategorijoje gali būti įsiparegojimų neįvydymo atvejis $k_x, x \in [A_{n_1}, \ldots, A_{n_n}]$. Tarsime, kad kategorijose įsipareigojimų neįvydymų skaičius yra

$$k = k_{A_1} + k_{A_2} + \ldots + k_{A_n}.$$

Pagal konservatyvumo metodą

$$p_{A_{n_1}} = p_{A_{n_2}} = \ldots = p_{A_{nn}}.$$

Toliau, skaičiuojame kiekvienos kotegorijos PD atskirai, naudodami Bernulio schemą, pradėdami nuo $p_{A_{n_1}}$, kai įsipareigojimų neįvykdymo skaičius portfelyje k

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{m_{A_{n_1}} + m_{A_{n_2}} + \ldots + m_{A_{n_n}}}{i} p_{A_{n_1}}^i (1 - p_{A_{n_1}})^{m_{A_{n_1}} + m_{A_{n_2}} + \ldots + m_{A_{nn}} - i}.$$

Vėl pasitelkiame pasikliautinųjų intervalų metodą, su reikšmingumo lygmeniu γ

$$1 - \gamma \leqslant \sum_{i=1}^{k} \binom{m}{i} p_{A_{n_1}}^i (1 - p_{A_{n_1}})^{m-i}. \tag{5.1}$$

Nelygybės sprendinys būtų mūsų ieškoma $p_{A_{n_1}}$, bet ją skaičiuosime skyriuje 5.1. Toliau išreiškiame $p_{A_{n_2}}$. Vėl vertiname konservatyviai, todėl $p_{A_{n_2}} = p_{A_{nn}}$. Dabar skolininkų porfelyje turime $m_{A_{n_2}} + m_{A_{n_3}} + \ldots + m_{A_{nn}}$, o įsipareigojimų neįvykdymų $k_{A_{n_2}} + k_{A_{n_3}} + \ldots + k_{A_{nn}}$. Taikome Bernulio schemą ir užrašome nelygybę, vertinimui pasitelkę pasiklautinąjį intervalą

$$1 - \gamma \leqslant \sum_{i=1}^{k_{A_{n_2}} + \ldots + k_{A_{nn}}} \binom{m_{A_{n_2}} + m_{A_{n_3}} + \ldots + m_{A_{nn}}}{i} p_{A_{n_2}}^i (1 - p_{A_{n_2}})^{m_{A_{n_2}} + \ldots + m_{A_{nn}} - i}.$$

Tliekame analogiškus veiksmus iki pasiekiame paskutiniąją kategoriją A_{n_n} kategorijos skolininkų PD skaičiavimui konservatyvumo metodo taikyti nereikia, įsipareigojimų neįvykdymų skaičius $k_{A_{nn}}$. PD vertinimui analogiškai suformuluojame nelygybę su pasirinktu reikšmingumo lygmeniu

$$1 - \gamma \leqslant \sum_{i=1}^{k_{A_{nn}}} \binom{m_{A_{nn}}}{i} p_{A_{nn}}^i (1 - p_{A_{nn}})^{m_{A_{nn}} - i}.$$

Gautų nelygybių nespręsime, tačiau skyriuje 5.1 parodysime, kad egzistuoja šių nelygybių sprendiniai ir jie yra vieninteliai.

5.1. Analitinis Pluto – Tasche nelygybės sprendimas

Tarkime, X yra binominis atsitiktinis dydis su dydžio parametru m ir sėkmės tikimybe p, tada $\forall k \in [0, m]$ turime

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} = P[X \leqslant k] = 1 - P[Y \leqslant p] = \frac{\int_p^1 t^k (1-t)^{m-k-1} dt}{\int_0^1 t^k (1-t)^{m-k-1} dt}, \tag{5.2}$$

čia Y yra Beta atsitiktinis dydis su parametrais $\alpha = k + 1$ ir $\beta = m - k$ (plačiau apie Beta funkciją ir jos savybes galima rasti Hinderio knygoje [5]). **Beta funkcija** – tokia funkcija, su parametrais $\alpha > 0, \beta > 0$ kurios atsitiktiniam dydžiui Y, dalinė forma yra apibrėžiama taip

$$B(y, \alpha, \beta) = \int_0^y t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt.$$

Laikysime, kad α ir β yra teigiami sveikieji skaičiai, kurie su mūsų turimais skolininkais susiejami taip

$$\alpha = k + 1, \beta = m - k.$$

Čia m – skolininkų skaičius portfelyje, o k – įsipareigojimų neįvykdymų skaičius portfelyje. Šiuo atveju, Beta pasiskirstymo funkcija tampa atitikmeniu mūsų turimai Binominei pasiskirstymo funkcijai ir $\forall y \in (0, 1), \forall \alpha, \beta > 0$ Binominę pasiskirstymo funkciją galime pakeisti Beta funkcija

$$F_{\alpha,\beta}(y) = \int_0^y \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} = \sum_{i=\alpha}^{\alpha+\beta-1} \binom{\alpha+\beta-1}{i} y^i (1-y)^{\alpha+\beta-1-i} = I_y(\alpha, \beta)$$

Sekantis teiginys parodo nelygybės (5.1) sprendinio egzistavimą ir vienatį, taip pat suteikia mums pradines vertes skaitiniam šaknies radimui (žr. (5.4)).

Teiginys 5.1. Apibrėžkime funkciją $f_{m,k} : (0,1) \to \mathbb{R}$, kai $0 \leqslant k < m$:

$$f_{m,k}(p) = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i}, \quad p \in (0,1).$$

Fiksuojam $\upsilon \in (0,1)$. Tada lygtis

$$f_{m,k}(p) = \upsilon \tag{5.3}$$

turi lygiai vieną sprendinį $0 < p = p(\upsilon) < 1$. Taip pat šis sprendinys $p(\upsilon)$ tenkina nelygybes

$$1 - \sqrt[m]{\upsilon} \leqslant p(\upsilon) \leqslant \sqrt[m]{1-\upsilon}. \tag{5.4}$$

Įrodymas. Funkcijos $f_{m,k}(p)$ išvestinė pagal p yra

$$\frac{df_{m,k}(p)}{dp} = -(m-k)\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k-1} < 0, \forall k \in [0,m).$$

Taigi, pastebime, kad $f_{m,k}$ yra griežtai mažėjanti. Tai reiškia, kad lygtis (5.3) turi tik vienintelį sprendinį. Tuomet nelygybės

$$f_{m,0}(p) \leqslant f_{m,k}(p) \leqslant f_{m,m-1}(p) \tag{5.5}$$

parodo, kad egzistuoja toks (5.3) lygties sprendinys ir nelygybės (5.5) yra teisingos. $\square$

5.2. Pavyzdys: Nepriklausomumo prielaida, yra keli įsipareigojimų neįvykdymo atvejai

Skaičiavimai atlikti naudojantis programa „MS Excel“. PD skaičiuojamos skolininkams iš kategorijų A_1, A_2 ir A_3 pasirenkant skirtingas reikšmingumo lygmens γ reikšmes. Skolininkų skaičius modeliuojamuose portfeliuose taip pat kaip (4.2) pavyzdyje. Pirmuoju atveju turime $m = 1000$ skolininkų portfelį. Skolininkai kategorijose pasiskirstę taip

$$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200$$

Įsipareigojimų neįvykdymai kiekvienoje skolininkų patikimumo kategorijoje atrodo taip

$$k_{A_1} = 0, k_{A_2} = 1, k_{A_3} = 1 \tag{5.6}$$

Įsipareigojimų neįvykdymų skaičiai (5.6) bus naudojami visiems trim atvejais. PD skaičiavimui naudojome programos „MS Excel“ formulę BETAINV(γ, α, β), kai
γ – pasirinktas reikšmingumo lygmuo,
α – įsipareigojimų neįvykdymų skaičius skaičiuojamoje kategorijoje
(A kategorijai $k_{A_1} + k_{A_2} + k_{A_3} + 1$, A_2 kategorijai $k_{A_2} + k_{A_3} + 1$ ir A_3 kategorijai $k_{A_3} + 1$),
β – skolininkų skaičiaus skaičiuojamoje kategorijoje ir įsipareigojimų neįvykdymų skirtumas
(A_1 kategorijoje $m_{A_1} + m_{A_2} + m_{A_3} - (k_{A_1} + k_{A_2} + k_{A_3} + 1)$,
A_2 kategorijoje $m_{A_2} + m_{A_3} - (k_{A_2} + k_{A_3} + 1)$ ir A_3 kategorijoje $m_{A_3} - (k_{A_3} + 1)$)

4 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200, k_{A_1} = 0, k_{A_2} = 1, k_{A_3} = 1$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,2676%	0,3921%	0,5319%	0,6289%	0,8387%	1,1188%
$\hat{p}_{A_2}$	0,5355%	0,7841%	1,0631%	1,2563%	1,6738%	2,2296%
$\hat{p}_{A_3}$	0,8420%	1,3473%	1,9405%	2,3615%	3,2890%	4,5451%

Sekančiu atveju, skaičiuojame PD, kai skolininkų skaičus yra $m = 1000$ ir

$$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_3} = 100.$$

5 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_2} = 100, k_{A_2} = 0, k_{A_2} = 1, k_{A_3} = 1$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,2676%	0,3921%	0,5319%	0,6289%	0,8387%	1,1188%
$\hat{p}_{A_2}$	0,4118%	0,6032%	0,8180%	0,9669%	1,2888%	1,7179%
$\hat{p}_{A_3}$	1,6895%	2,6967%	3,8721%	4,7021%	6,5176%	8,9485%

Trečiuoju atveju laikome, kad portfelis sudarytas iš $m = 2000$ skolininkų, o kategorijos atrodo taip

$$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200.$$

6 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200, k_{A_1} = 0, k_{A_2} = 1, k_{A_3} = 1$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,1337%	0,1960%	0,2660%	0,3146%	0,4198%	0,5604%
$\hat{p}_{A_2}$	0,1672%	0,2450%	0,3325%	0,3932%	0,5246%	0,7002%
$\hat{p}_{A_3}$	0,1399%	0,2244%	0,3240%	0,3950%	0,5524%	0,7675%

Apžvelgę tyrimo rezultatus, matome, kad didžiausia priklausomybė yra nuo pasirinkto reikšmingumo lygmens. Kuo didesnis reikšmingumo lygmuo γ tuo didesnė įsipareigojimų neįvykdymo tikimybė. PD taip pat priklauso ir nuo skolininkų skaičiaus, kuo jis mažesnis, tuo didesnė PD. Vėlgi, išlieka teisinga (3.2) nelygybė. Palyginus rezultatus su lentelėmis (4.2) pavyzdyje, nesunku pastebėti, kad esant įsipareigojimų neįvykdymams portfelyje, PD ženkliai padidėjo.

6. III. Prielaida: Įsipareigojimų neįvykdymų atvejai priklauso nuo sisteminio faktoriaus, sisteminis ir individualus faktoriai yra nepriklausomi, įsipareigojimų neįvykdymų nėra

Iki šio skyriaus nagrinėjome atvejus, kai įsipareigojimų neįvydymai buvo nepriklausomi, tačiau realiame gyvenime įsipareigojimų neįvykdymus sąlygoja vienokie ar kitokie veiksniai. Mes pasirinksime patį akivaizdžiausią sisteminį faktorių – skolininkų turtą.

Sisteminis faktorius (angl. systematic factor) – finansų rinkoje tai gali būti beveik bet koks finansinis ar ekonominis rodiklis pavyzdžiui bendras vidaus produktas (BVP), biržos indeksas ar kt.

Toliau laikysime, kad turtas – sisteminis faktorius yra vienintelis ir tikimybiniai modeliai, kuriais toliau remsimės vadinami vienfaktoriniais tikimybiniais modeliais [4]. Toks modelis leidžia išreikšti koreliaciiją tarp įvykių, kurie turi priklausomybę per juos veikiančius bendrus faktorius, šįkart – turtą. Be to, skolininkus toliaus laikysime nepriklausomais.

Turto priklausomybė išreiškiama procentais, Baselio komitetas šią koreliaciją nustatė kai nemažesnę nei 12% [6], tokios laikysimės ir mes. Turto koreliaciją tarp skolininkų turto vertės grąžos $r_i, i \in [1,m]$ žymėsime ϱ ir ją laikysime vienodą visam skolininkų portfeliui. Šiuo atveju įsipareigojimų neįvykdymo atvejų nėra tarp skolininkų.

Sakykime sisteminis faktorius yra a. d. X. Čia $\sqrt{1-\varrho}Z_i$, kai $Z_i \sim N(0,1)$ atlieka liekanos ε_i vaidmenį. Pagal C. Bluhm, L. Overbeck ir C. Wagner knygą „An Introduction to Credit Risk Modeling“ [2] įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės priklausomybę nuo X galime užrašyti

$$p_i(X) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\varrho}X}{\sqrt{1-\varrho}}\right), \qquad i \in [1; m].$$

Čia Φ žymime standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją, o Φ^{-1} – jos atvirkštinę. Tada perrašome lygtį per X realizaciją x

$$p_i(X = x) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right), \qquad i \in [1; m].$$

Nagrinėdami skolininkų portfelį 4 skyriuje turėjome tokią nelygybę

$$(1-\gamma) \leqslant (1 - p_{A_{n_1}})^{m_{A_{n_1}} + m_{A_{n_2}} + \ldots + m_{A_{n_n}}}.$$

Dabar, remdamiesi konservatyvumo metodu, skolininkų iš A_{n_1} kategorijos PD vertiname apribodami ją iš apačios

$$1-\gamma \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{A_{n_1}}) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{m_{A_{n_1}} + m_{A_{n_2}} + \ldots + m_{A_{n_n}}} dx$$

čia ϕ – standartinio normaliojo dydžio tankio funkcija, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$. Perrašę dešiniąją nelygybės pusę, gauname

$$1-\gamma \leqslant \mathbb{E}\left[\left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{A_{n_1}}) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{m_{A_{n_1}} + m_{A_{n_2}} + \ldots + m_{A_{n_n}}}\right].$$

Toliau vertiname A_{n_2} kategorijos skolininkų PD. Nelygybė bus užrašoma taip

$$1-\gamma \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{A_{n_2}}) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{m_{A_{n_2}} + m_{A_{n_3}} + \ldots + m_{A_{n_n}}} dx$$

arba

$$1-\gamma \leqslant \mathbb{E}\left[\left(1-\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{A_{n_2}})-\sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{m_{A_{n_2}}+m_{A_{n_3}}+\ldots+m_{A_{n_n}}}\right].$$

Taip atliekame veiksmus iki rizikingiausios skolininkų kategorijos A_{n_n}. Šios kategorijos skolininkų PD vertiname analogiškai

$$1-\gamma \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\left(1-\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{A_{n_n}})-\sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{m_{A_{n_n}}} dx$$

arba

$$1-\gamma \leqslant \mathbb{E}\left[\left(1-\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{A_{n_n}})-\sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{m_{A_{n_n}}}\right].$$

Išsprendžiame šias nelygybes ir pateikiame PD reikšmes pavyzdyje (6.1).

6.1. Pavyzdys: priklausomumo nuo sisteminio faktoriaus prielaida, sisteminis ir individualus faktoriai yra nepriklausomi, įsipareigojimų neįvykdymų nėra

Šiame pavyzdyje neturime įsipareigojimų neįvykdymų, tačiau turim sisteminį faktorių – skolininkų turtą. Turto koreliacija bus lygi $\varrho = 12\%$. Skaičiavimai atlikti kompiuterinio modeliavimo programa „R“. Kodas pateiktas **I. Priede**. Vėl patikrinsime 3 skolininkų portfelius kaip ir praeituose pavyzdžiuose. Pirmiausia, kai skolininkai pasiskirstę taip

$$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_1} = 200$$

7 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200, \varrho = 12\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,1262%	0,3350%	0,7234%	1,1030%	2,2655%	4,5858%
$\hat{p}_{A_2}$	0,2347%	0,6001%	1,2580%	1,8827%	3,7063%	7,1419%
$\hat{p}_{A_3}$	0,3722%	0,9241%	1,8895%	2,7791%	5.3027%	9,8401%

Toliau porfelis, kur skolininkai kategorijose paskirstyti taip

$$m_{A_1} = 350, m_{A_1} = 550, m_{A_1} = 100$$

8 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_3} = 100, \varrho = 12\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,1262%	0,3350%	0,7234%	1,1030%	2,2655%	4,5858%
$\hat{p}_{A_2}$	0,1827%	0,4815%	1,0221%	1,5397%	3,0778%	6,0427%
$\hat{p}_{A_3}$	0,9926%	2,3438%	4,5195%	6,3947%	11,3225%	19,2434%

Ir trečiasis variantas, kai skolininkai pasiskirstę taip

$$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200$$

9 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200, \varrho = 12\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,0696%	0,1872%	0,4146%	0,6645%	1,3803%	2,9245%
$\hat{p}_{A_2}$	0,0847%	0,2232%	0,4968%	0,7688%	1,6207%	3,3826%
$\hat{p}_{A_3}$	0,1038%	0,2816%	0,6245%	0,9569%	1,9903%	4,0778%

Taigi, apžvelgę lenteles, matome, kad vėl lieka galioti (3.2) nelygybė. PD priklauso nuo reikšmingumo lygmens, bei skolininkų skaičiaus. Palyginę šiuos rezultatus, su lentelėmis 5 skyriuje, matome, kad esant $\gamma = 50\%$ ir $\gamma = 75\%$ PD mažesnės veikiant sisteminiam faktoriui, nei kai jo nėra, bet turime įsipareigojimų neįvykdymo atvejų. Tačiau, didėjant reikšmingumo lygmeniui, sisteminio faktoriaus veikimas įsipareigojimų neįvykdymo tikimybę padidina stipriau, negu įsipareigojimų neįvykdymo atvejai, kai sisteminio faktoriaus nėra.

7. IV. Prielaida: Įsipareigojimų neįvykdymo atvejai priklauso nuo sisteminio faktoriaus, sisteminis ir individualus faktoriai yra nepriklausomi, yra keli įsipareigojimų neįvykdymai

Šiame skyriuje tarsime, kad portfelyje yra keletas įsipareigojimų neįvykdymų ir tie įsipareigojimų neįvykdymai priklauso nuo bendro sisteminio faktoriaus. Skolininkus tarpusavyje laikome nepriklausomais. Kaip ir 6 skyriuje, sisteminis faktorius bus X ir jis reikš, kaip ir praėjusį kartą – turto koreliaciją. Toliau, laikysime, kad skolininkai yra suskirstyti į reitingų kategorijas $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_n}$, kaip ir anksčiau, o visų skolininkų turto koreliacija yra lygi ϱ. Trumpai tariant, turto koreliacijo rodo, kaip vieno skolininko turto vertė (pvz., visų įmonės turto verčių suma) priklauso nuo kito skolininko turto vertės. [6]

Šio skyriaus esminis tikslas yra rasti nelygybę bendram atvejui, kurią galima panaudoti ieškant įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių (žr. (7.1)).

Lema 7.1 Tarkime, kad X ir Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ir $Z = aX + Y$, kai $a \in \mathbb{R}$. Tuomet,

$$Z = aX + Y \iff \tilde{Z} = a\frac{\sigma_x}{\sigma_z}\tilde{X} + \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\tilde{Y},$$

čia $\tilde{Z} = \frac{Z-\mathbb{E}Z}{\sigma_z}$, $\tilde{X} = \frac{X-\mathbb{E}X}{\sigma_x}$, ir $\tilde{Y} = \frac{Y-\mathbb{E}Y}{\sigma_y}$.

Teiginys 7.2 Tarkime, kad mūsų portfelyje įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės yra priklausomos nuo sisteminio faktoriaus X. Portfelyje yra m skolininkų ir k atvejų, kai skolininkai neįvykdo įsipareigojimų. Tuomet tikimybę, jog šito portfelio skolininkas neįvykdys įsipareigojimų, randame iš nelygybės

$$(1-\gamma) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)^{i} \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{m-i} dy, \quad (7.1)$$

čia Φ yra standartinio normaliojo a. d. pasiskirstymo funkcija, Φ^{-1} yra jos atvirkštinė pasiskirstymo funkcija, o $\varphi(y)$ yra standartinio normaliojo skirstinio tankio funkcija.

Įrodymas. Darome prielaidą, kad skolininkų turto vertės grąža r_i, $i \in [1,m]$. Remiantis lema (7.1) tam tikro stebimo laikotarpio metu ši grąža gali būti užrašyta

$$r_i = \beta_i S_i + \xi_i, \quad (7.2)$$

čia S_i ir ξ_i yra nepriklausomi a. d., pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį. Nepamirškime, kad S vadiname sisteminiu faktoriumi, o ξ – individualiu, S_i ir ξ_i, pagal prielaidą, yra vienodi visiems skolininkams.

Pasinaudokime lema (7.1) ir lygtį $r_i = \beta_i S_i + \xi_i$ perrašykime kaip

$$\tilde{r} = \beta\frac{\sigma_s}{\sigma_r}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}.$$

Kai $\tilde{r} = \frac{r-\mathbb{E}r}{\sigma_r}$, $\tilde{S} = \frac{S-\mathbb{E}S}{\sigma_S}$, ir $\tilde{\xi} = \frac{\xi-\mathbb{E}\xi}{\sigma_\xi}$ – standartizuotos grąžos r, sisteminio faktoriaus S ir individualaus faktoriaus ξ išraiškos.

Norėdami surasti paprastesnę $\tilde{r}$ išraišką, išspręsime lygtį

$$1 = \sigma_r = \sqrt{\mathbb{E}\tilde{r}^2 - (\mathbb{E}\tilde{r})^2}. \quad (7.3)$$

Pirmiausia atskirai rasime $\mathbb{E}\tilde{r}^2$ ir $(\mathbb{E}\tilde{r})^2$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\tilde{r}^2 &= \mathbb{E}\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S}\right)^2 + 2\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{S}\tilde{\xi} + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}\right)^2\right) \\
&= \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 \mathbb{E}\tilde{S}^2 + 2\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\mathbb{E}\tilde{S}\mathbb{E}\tilde{\xi} + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2 \mathbb{E}\tilde{\xi}^2 \\
&= \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{E}\tilde{r})^2 &= \left(\mathbb{E}\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}\right)\right)^2 \\
&= \left(\mathbb{E}\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}\right)\right)^2. \\
&= \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\mathbb{E}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\mathbb{E}\tilde{\xi}\right)^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Gautas išraiškas įstatę į lygtį (7.3) gauname

$$
\begin{aligned}
1 = \sigma_r &= \sqrt{\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2} \\
1 &= \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2 \\
&\Rightarrow \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2 = 1 - \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 \\
&\Rightarrow \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r} = \sqrt{1 - \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Pažymime $\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 = \varrho$. Tada $\tilde{r} = \sqrt{\varrho}\tilde{S} + \sqrt{1-\varrho}\tilde{\xi}$, čia ϱ – turto koreliacija. Tada turime

$$
\begin{aligned}
\rho = \rho(\tilde{r},\tilde{S}) &= \frac{cov(\tilde{r},\tilde{S})}{\sigma_{\tilde{r}}\sigma_{\tilde{S}}} = cov\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}, \tilde{S}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}\right)\tilde{S}\right) - \mathbb{E}\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}\right)\mathbb{E}\tilde{S} \\
&= \beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\mathbb{E}\tilde{S}^2 + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\mathbb{E}\tilde{\xi}\mathbb{E}\tilde{S} = \beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r} = \sqrt{\varrho}.
\end{aligned}
$$

Taip pat

$$\begin{aligned}1 &= \sigma_{\tilde{r}}^2 = cov(\tilde{r},\tilde{r}) = \mathbb{E}(\tilde{r}^2) - \mathbb{E}(\tilde{r})\mathbb{E}(\tilde{r})\\ &= \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2 = \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2\right)\\ &= \varrho + (1-\varrho).\end{aligned}$$

Be to, S ir ξ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai $\tilde{S}$, $\tilde{\xi}$ – standartizuotos išraiškos yra nepriklausomos.

Apibrėžkime įvykį D, čia standartizuota grąža $\tilde{r} = \sqrt{\varrho}\tilde{S} + \sqrt{1-\varrho}\tilde{\xi}$, nenukrenta žemiau x_p reikšmės

$$D = \begin{cases} 1, & \text{jei } \tilde{r} = \sqrt{\varrho}\tilde{S} + \sqrt{1-\varrho}\tilde{\xi} < x_p \\ 0, & \text{kitu atveju.} \end{cases}$$

Kadangi žinome grąžos $\tilde{r}$ pasiskirstymo funciją, galime D perrašyti kaip

$$D = \begin{cases} 1, & \text{jei } \tilde{r} = \sqrt{\varrho}\tilde{S} + \sqrt{1-\varrho}\tilde{\xi} < \Phi^{-1}(p) \\ 0, & \text{kitu atveju.} \end{cases}$$

Jeigu standartizuotas sisteminis faktorius $\tilde{S}$ įgyja reikšmę $y \in \mathbb{R}$, tada

$$D = \begin{cases} 1, & \text{jei } \tilde{\xi} < \frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}} \\ 0, & \text{kitu atveju} \end{cases}$$

ir

$$\mathbb{P}(D = 1|\tilde{S} = y) = \mathbb{P}\left(\tilde{\xi} < \frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right).$$

Tuomet šią PD galime perrašyti

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i}.$$

Tokiu atveju indikatorių, kad įvykis įvyks galime užrašyti taip

$$\mathbb{E}\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{P}(A) + 0 \cdot \mathbb{P}(\bar{A}).$$

Apibrėžkime

$$\mathbb{1}_i = \begin{cases} 1, & \text{jei i-asis skolininkas neįvykdė įsipareigojimo} \\ 0, & \text{kitu atveju} \end{cases}$$

ir $X = \mathbb{1}_0 + \mathbb{1}_1 + \ldots + \mathbb{1}_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, m.$

Tada

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_0 + \mathbb{1}_1 + \ldots + \mathbb{1}_k) = \mathbb{E}\mathbb{1}_0 + \mathbb{E}\mathbb{1}_1 + \ldots + \mathbb{E}\mathbb{1}_k \\
&= \mathbb{P}(0 \text{ įsipareigojimų neįvykdymų portfelyje su } m \text{ skolininkų}) \\
&+ \mathbb{P}(1 \text{ įsipareigojimų neįvykdymų portfelyje su } m \text{ skolininkų}) \\
&\vdots \\
&+ \mathbb{P}(k \text{ įsipareigojimų neįvykdymų portfelyje su } m \text{ skolininkų}) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \mathbb{P}^i (1-\mathbb{P})^{m-i} = \mathbb{P}(X \leqslant k).
\end{aligned}$$

Įrodyme yra svarbi pilno vidurkio formulė

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}_{\tilde{S}}(\mathbb{E}(X|\tilde{S} = y)).$$

Tada

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leqslant k) &= \mathbb{E}X = \mathbb{E}_{\tilde{S}}(\mathbb{E}(X|\tilde{S} = y)) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \mathbb{E}(X|\tilde{S} = y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \mathbb{P}(X \leqslant k|\tilde{S} = y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho} y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)^i \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho} y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)\right)^{m-i} dy. \ \square
\end{aligned}$$

Grįžę prie konservatyvumo metodo, galime užrašyti nelygybę rasti tikimybei $p_{A_{n_1}}$

$$\begin{aligned}
1 - \gamma \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \sum_{i=0}^{k_{A_{n_1}} + k_{A_{n_2}} + \ldots + k_C} \binom{m_{A_{n_1}} + m_{A_{n_2}} + \cdots + m_{A_{n_n}}}{i} \times \\
\times G(p_{A_{n_1}}, \varrho, y)^i \left(1 - G(p_{A_{n_1}}, \varrho, y)\right)^{m_{A_{n_1}} + m_{A_{n_2}} + \ldots + m_{A_{n_n}} - i} dy,
\end{aligned}$$

čia

$$G(p_{A_{n_1}}, \varrho, y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{A_{n_1}}) - \sqrt{\varrho} y}{\sqrt{1-\varrho}}\right).$$

Toliau užrašome nelygybę tikimybei $p_{A_{n_2}}$ rasti

$$\begin{aligned}
1 - \gamma \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \sum_{i=0}^{k_{A_{n_2}} + \ldots + k_{A_{n_n}}} \binom{m_{A_{n_2}} + \ldots + m_{A_{n_n}}}{i} \times \\
\times G(p_{A_{n_2}}, \varrho, y)^i \left(1 - G(p_{A_{n_2}}, \varrho, y)\right)^{m_{A_{n_2}} + \ldots + m_{A_{n_n}} - i} dy,
\end{aligned}$$

čia

$$G(p_{A_{n_2}}, \varrho, y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{A_{n_2}}) - \sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)^i.$$

Taip galime užrašyti visas nelygybes rasti PD. Paskutinė nelygybė rasti tikimybei $p_{A_{n_n}}$ yra

$$1-\gamma \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \sum_{i=0}^{k_{A_{n_n}}} \binom{m_{A_{n_n}}}{i} G(p_{A_{n_n}},\varrho,y)^i \left(1-G(p_{A_{n_n}},\varrho,y)\right)^{m_{A_{n_n}}-i} dy,$$

čia

$$G(p_{A_{n_n}}, \varrho, y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{A_{n_n}}) - \sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-\varrho}}\right)^i.$$

Gauname išraiškas, kurios primena PD nelygybes gautas 5 skyriuje. Taigi, $G(p_{A_{n_1}}, \varrho, y),\ G(p_{A_{n_2}}, \varrho, y),\ \ldots,\ G(p\ _{G(p_{A_{n_n}},}, \varrho, y)$ parodo kiekvienos kategorijos, t. y. atitinkamai $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_n}$ įsipareigojimų neįvykdymo tikimybes.

7.1. Pavyzdys: priklausomumo nuo sisteminio faktoriaus prielaida, sisteminis ir individualus faktoriai yra nepriklausomi, yra keli įsipareigojimų neįvykdymai

Šiame skyriuje turime ir sisteminio faktoriaus veikimą ir įsipareigojimų neįvykdymo atvejų. Skaičiavimus atliekame programa „R“. Pirmuoju atveju yra $m = 1000$ skolininkų, po vieną įsipareigojimų neįvykdymo atvejį A_2 ir A_3 skolininkų kategorijose. Sisteminio faktoriaus – turto koreliacijos koeficienas $\varrho = 12\%$. Kodas pateiktas **I. Priede**. Skolininkai portfelyje pasiskirstę

$$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200$$

10 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200, k_{A_1} = 0, k_{A_2} = 1, k_{A_3} = 1, \varrho = 12\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,4367%	0,9133%	1,6850%	2,3662%	4,2611%	7,3643%
$\hat{p}_{A_2}$	0,8100%	1,6336%	2,8931%	3,9654%	6,8156%	11,6159%
$\hat{p}_{A_3}$	0,8357%	1,7542%	3,1804%	4,4076%	7,6730%	13,1324%

Sekančioje lentelėje taip pat yra $m = 1000$ skolininkų, 2 įsipareigojimų neįvykdymai $k_{A_2} = 1$ ir $k_{A_3} = 1$, skolininkai pagal kategorijas pasiskirstę taip

$$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_3} = 100$$

11 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_3} = 100, k_{A_1} = 0, k_{A_2} = 1, k_{A_3} = 1, \varrho = 12\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,4367%	0,9133%	1,6850%	2,3662%	4,2611%	7,6343%
$\hat{p}_{A_2}$	0,6390%	1.3121%	2,3574%	3,2619%	5,7085%	9,9259%
$\hat{p}_{A_3}$	2,2361%	4,3887%	7,4505%	9,9121%	15,9399%	24,9263%

Trečias atvejis, kai skolininkų portfelyje yra $m = 2000$. Įsipareigojimų neįvykdymų turime daugiau – 1 A_2 kategorijoje ir 2 A_3 kategorijoje. Skolininkai portfelyje pasiskirstę taip

$$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200$$

12 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200, k_{A_1} = 0, k_{A_2} = 0, k_{A_3} = 2, \varrho = 12\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,2358%	0,5134%	0,9816%	1,4083%	2,6450%	4,9712%
$\hat{p}_{A_2}$	0,2870%	0,6199%	1,1679%	1,6647%	3,0840%	5,7138%
$\hat{p}_{A_3}$	0,3716%	0,7867%	1,4653%	2,0682%	3,7612%	6,8252%

Iš šių rezultatų matome, kad veikiant sisteminiam faktoriui išlieka teisinga nelygybė

$$p_{A_1} \leqslant p_{A_2} \leqslant p_{A_3}.$$

Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės sparčiai auga kylant reikšmingumo lygmeniui. Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės šiuo atveju yra didžiausios kol kas.

8. V. Prielaida: Įsipareigojimų neįvykdymo atvejai priklauso nuo sisteminio faktoriaus, sisteminis ir individualus faktoriai yra priklausomi

Šiame skyriuje bandysime gausime neįvykdymo tikimybės išraišką, kai įsipareigojimų neįvykdymo atvejus veikia sisteminis faktorius – turtas. Kadangi visame darbe rėmėmės Bazelio komiteto nuorodomis, kur turto koreliacija patenka į intervalą nuo 12% iki 24% [6], nusprendėme ir šiuo atveju koreliacijos koeficiento ϱ dydžio nekeisti. Be to sisteminis ir individualus faktoriai yra priklausomi. Skolininkai portfelyje vis dar laikomi nepriklausomais. Naudosime tą pačią tikimybės išraišką kaip ir anksčiau, kai nemokumo atvejus veikia sisteminis faktorius X, ieškoti

$$p_i(X=x)=\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i)-\sqrt{\varrho}x}{\sqrt{1-\varrho}}\right),\ i=1,\ldots,m.$$

Vėl ieškosime nelygybės bendrajam atvejui. Kai įsipareigojimų neįvykdymų nebus, pasirinksime k – įsipareigojimų neįvykymų skaičių portfelyje $k=0$.

Lema 8.1 Tarkime, kad X ir Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ir $Z=aX+Y$, kai $a\in\mathbb{R}$. Tuomet galime teigti, kad $Z=aX+Y$ tada ir tik tada, kai $\tilde{Z}=a\frac{\sigma_x}{\sigma_z}\tilde{X}+\frac{\sigma_y}{\sigma_z}\tilde{Y}$, čia $\tilde{Z}=\frac{Z-\mathbb{E}Z}{\sigma_z}$, $\tilde{X}=\frac{X-\mathbb{E}X}{\sigma_x}$ ir $\tilde{Y}=\frac{Y-\mathbb{E}Y}{\sigma_y}$ – standartizuotos išraiškos. Toliau tarkim, kad X bus įsipareigojimų neįvykdymo tikimybes veikiantis sisteminis faktorius, portfelis sudarytas iš m skolininkų, įsipareigojimų neįvykdymų skaičius k.

Įrodymas. Užrašome turto vertės grąžos r_i išraišką kai $i=1,\ldots,m$. Ji, pagal prielaidą, atrodo taip

$$r_i=\beta_iS_i+\xi_i.$$

Čia sisteminis faktorius S ir individualus faktorius ξ, pagal prielaidą, yra priklausomi. Todėl ieškant r_i vidurkio, mums prireiks keleto kovariacijos formulių.

$$cov(\tilde{S},\tilde{\xi})=\rho(\tilde{S},\tilde{\xi},)$$

$$cov(\tilde{S},\tilde{\xi})=\frac{cov(S,\xi)}{\sigma_S\sigma_\xi}=\rho(S,\xi),$$

$$\sigma_S\sigma_\xi\cdot cov(\tilde{S},\tilde{\xi})=cov(S,\xi).$$

Čia $\tilde{S}=\frac{S-\mathbb{E}S}{\sigma_S}$ ir $\tilde{\xi}=\frac{\xi-\mathbb{E}\xi}{\sigma_\xi}$ yra standartizuoti atsitiktinių dydžių S ir ξ a. d.

Dabar skaičiuosime atsitiktinių dydžių $(X-a)$ ir $(Y-b)$ kovariaciją, čia a,b – konstantos

$$\begin{aligned}cov((X-a),(Y-b))&=\mathbb{E}(X-a)(Y-b)-\mathbb{E}(X-a)\mathbb{E}(Y-b)\\&=\mathbb{E}(X\cdot Y-bX-aY+ab)-(\mathbb{E}X-a)(\mathbb{E}Y-b)\\&=\mathbb{E}X\cdot Y-b\mathbb{E}X-a\mathbb{E}Y+ab-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y+b\mathbb{E}X+a\mathbb{E}Y-ab\\&=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y.\end{aligned}$$

Toliau, $\tilde{r}$ galime išreikšti kaip

$$\tilde{r}=\beta\cdot\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\cdot\tilde{S}+\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\cdot\tilde{\xi}. \tag{8.1}$$

Ieškosime paprastesnės $\tilde{r}$ išraiškos. Tam mums reikės apskaičiuoti standartinį turto vertės grąžos nuokrypį $\sigma_{\tilde{r}}$

$$1=\sigma_{\tilde{r}}=\sqrt{\mathbb{E}\tilde{r}^2-(\mathbb{E}\tilde{r})^2}. \tag{8.2}$$

Tada,

$$\begin{aligned}
1 = \sigma_{\tilde{r}} &= \sqrt{\beta^2 \cdot \left(\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2 + 2\beta\left(\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right) \cdot cov(\tilde{S},\tilde{\xi})} \\
&= \sqrt{\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2 + \frac{2\cdot\beta\cdot\sigma_S\cdot\sigma_\xi\cdot\rho(\tilde{S},\tilde{\xi})}{\sigma_r^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\beta^2\cdot\sigma_S^2 + \sigma_\xi + 2\cdot\beta\cdot cov(S,\xi)}{\sigma_r^2}}
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Pakėlę abi lygties puses kvadratu, gauname

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2 + \frac{2\cdot\beta\cdot cov(S,\xi)}{\sigma_r^2} \\
1 &= \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2 + \frac{2\cdot\beta\cdot\rho(S,\xi)\cdot\sigma_S\sigma_\xi}{\sigma_r^2} \\
\Rightarrow \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\right)^2 &= 1 - \left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 - \frac{2\cdot\beta\cdot\rho(S,\xi)\cdot\sigma_S\sigma_\xi}{\sigma_r^2} \\
\Rightarrow \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r} &= \sqrt{1 - \left(\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 + \frac{2\cdot\beta\cdot\rho(S,\xi)\cdot\sigma_S\sigma_\xi}{\sigma_r^2}\right)}
\end{aligned}$$

Dabar pasižymėkime, $\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\right)^2 = \varrho$, $\frac{2\cdot\beta\cdot\rho(S,\xi)\cdot\sigma_S\sigma_\xi}{\sigma_r^2} = \zeta$. Tada turime, kad

$$\tilde{r} = \sqrt{\varrho}\cdot\tilde{S} + \sqrt{1-(\varrho+\zeta)}\cdot\tilde{\xi} \tag{8.4}$$

Kadangi $\tilde{S}$ ir $\tilde{\xi}$ yra priklausomi a. d., todėl mums prireiks a. d. $\tilde{S}\cdot\tilde{\xi}$ vidurkio. Šiuo atveju, laikome, kad standartizuoto sisteminio faktoriaus $\tilde{S}$ realizacija yra x, o standartizuoto individualaus a. d. $\tilde{\xi}$ realizacija yra y. Kovariaciją $Cov(\tilde{S},\tilde{\xi})$ žymėsime ρ. Integruosime standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio tankio funkciją. Ji atrodo taip

$$f_{\tilde{S},\tilde{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}.$$

Matematinio modeliavimo programa „Mathematica“ vidurkiui rasti, suintegruojame tankį padaugintą iš reikšmės. Gauname

$$\mathbb{E}\tilde{S}\tilde{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot y\cdot\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\right)\cdot e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}dxdy = \rho$$

Tada koreliacija tarp $\tilde{r}$ ir $\tilde{S}$ bus

$$\begin{aligned}
\rho(\tilde{r},\tilde{S}) &= \frac{cov(\tilde{r},\tilde{S})}{\sigma_{\tilde{r}}\sigma_{\tilde{S}}} = cov\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi},\tilde{S}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}\right)\tilde{S}\right) - \mathbb{E}\left(\beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\tilde{S} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\tilde{\xi}\right)\mathbb{E}\tilde{S} \\
&= \beta\frac{\sigma_S}{\sigma_r}\mathbb{E}\tilde{S}^2 + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_r}\mathbb{E}\tilde{\xi}\tilde{S} = \sqrt{\varrho} + \rho(\tilde{S},\tilde{\xi})\sqrt{1-(\varrho+\zeta)}
\end{aligned}$$

Be to,

$$\begin{aligned}
1 = \sigma_{\tilde{r}}^2 &= Cov(\tilde{r},\tilde{r}) = \mathbb{E}(\tilde{r}^2) - \overbrace{\mathbb{E}(\tilde{r})\mathbb{E}(\tilde{r})}^{=0} \\
&= \mathbb{E}(\tilde{r})^2 = \mathbb{E}\Big[\sqrt{\varrho}\tilde{S} + \sqrt{1-(\varrho+\zeta)}\tilde{\xi}\Big]^2 \\
&= \mathbb{E}\Big[\varrho\cdot\tilde{S}^2 + (1-(\varrho+\zeta))\cdot\tilde{\xi}^2 + 2\sqrt{\varrho}\sqrt{1-(\varrho+\zeta)}\cdot\tilde{S}\cdot\tilde{\xi}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\varrho\tilde{S}^2 + \xi^2 - \varrho\tilde{\xi}^2 - \zeta\tilde{\xi}^2 + 2\sqrt{\varrho}\sqrt{1-(\varrho+\zeta)}\cdot\tilde{S}\cdot\tilde{\xi}\Big] \\
&= \varrho\mathbb{E}\tilde{S}^2 + \mathbb{E}\tilde{\xi}^2 - \varrho\mathbb{E}\tilde{\xi}^2 - \zeta\mathbb{E}\tilde{\xi}^2 + 2\sqrt{\varrho}\sqrt{1-(\varrho+\zeta)}\mathbb{E}\tilde{S}\tilde{\xi} \\
&= 1+\zeta+2\sqrt{\varrho}\sqrt{1-(\varrho+\zeta)}\rho.
\end{aligned}$$

Apibrėžkime įvykį D, čia standartizuota grąža $\tilde{r} = \sqrt{\varrho}\cdot\tilde{S} + \sqrt{1-(\varrho+\zeta)}\cdot\tilde{\xi}i$, nenukrenta žemiau x_p reikšmės

$$D = \begin{cases} 1, & \text{jei } \tilde{r} = \sqrt{\varrho}\cdot\tilde{S} + \sqrt{1-(\varrho+\zeta)}\cdot\tilde{\xi} < x_p \\ 0, & \text{kitu atveju.} \end{cases}$$

Kadangi žinome grąžos $\tilde{r}$ pasiskirstymo funkciją, galime D perrašyti kaip

$$D = \begin{cases} 1, & \text{jei } \tilde{r} = \sqrt{\varrho}\cdot\tilde{S} + \sqrt{1-(\varrho+\zeta)}\cdot\tilde{\xi} < \Phi^{-1}(p) \\ 0, & \text{kitu atveju.} \end{cases}$$

Jeigu standartizuotas sisteminis faktorius $\tilde{S}$ įgyja reiškmę $y \in \mathbb{R}$, tada

$$D = \begin{cases} 1, & \text{jei } \tilde{\xi} < \frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-(\varrho+\zeta)}} \\ 0, & \text{kitu atveju} \end{cases}$$

ir

$$\mathbb{P}(D=1|\tilde{S}=y) = \mathbb{P}\left(\tilde{\xi} < \frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-(\varrho+\zeta)}}\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p)-\sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-(\varrho+\zeta)}}\right).$$

Tuomet šią PD galime perrašyti

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}p^i(1-p)^{m-i}.$$

Tuomet

$$\mathbb{E}\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{P}(A) + 0 \cdot \mathbb{P}(\bar{A}).$$

Apibrėžkime

$$\mathbb{1}_i = \begin{cases} 1, & \text{jei i-asis skolininkas neįvykdė įsipareigojimo} \\ 0, & \text{kitu atveju} \end{cases}$$

ir

$$X = \mathbb{1}_0 + \mathbb{1}_1 + \ldots + \mathbb{1}_k, \qquad k = 0, 1, \ \ldots, m.$$

Tada

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_0 + \mathbb{1}_1 + \ldots + \mathbb{1}_k) = \mathbb{E}\mathbb{1}_0 + \mathbb{E}\mathbb{1}_1 + \ldots + \mathbb{E}\mathbb{1}_k \\
&= \mathbb{P}(0 \text{ įsipareigojimų neįvykdymų portfelyje su } m \text{ skolininkų}) \\
&+ \mathbb{P}(1 \text{ įsipareigojimų neįvykdymų portfelyje su } m \text{ skolininkų}) \\
&\vdots \\
&+ \mathbb{P}(k \text{ įsipareigojimų neįvykdymų portfelyje su } m \text{ skolininkų}) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \mathbb{P}^i (1 - \mathbb{P})^{m-i} = \mathbb{P}(X \leqslant k).
\end{aligned}$$

Įrodyme vėlgi yra svarbi pilno vidurkio formulė

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}_{\tilde{S}}(\mathbb{E}(X|\tilde{S} = y)).$$

Tada

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leqslant k) &= \mathbb{E}X = \mathbb{E}_{\tilde{S}}(\mathbb{E}(X|\tilde{S} = y)) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \mathbb{E}(X|\tilde{S} = y) dy \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \mathbb{P}(X \leqslant k|\tilde{S} = y) dy \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho} y}{\sqrt{1 - (\varrho + \zeta)}}\right)^i \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\varrho} y}{\sqrt{1 - (\varrho + \zeta)}}\right)\right)^{m-i} dy. \ \square
\end{aligned}$$

Grįžę prie konservatyvumo metodo, galime užrašyti nelygybę tikimybei $p_{A_{n_1}}$ rasti

$$\begin{aligned}
1 - \gamma \leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) \sum_{i=0}^{k_{A_{n_1}} + k_{A_{n_2}} + \ldots + k_{A_{nn}}} & \binom{m_{A_{n_1}} + m_{A_{n_2}} + \ldots + m_{A_{nn}}}{i} \times \\
& \times G(p_{A_{n_1}}, \varrho, \zeta, y)^i \left(1 - G(p_{A_{n_1}}, \varrho, \zeta, y)\right)^{m_{A_{n_1}} + m_{A_{n_2}} + \ldots + m_{A_{n_1}} - i} dy,
\end{aligned}$$

čia
$$G(p_{A_{n_1}}, \varrho, \zeta, y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{A_{n_1}}) - \sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-(\varrho+\zeta)}}\right).$$
Lygiai taip pat galime užrašyti ir tikimybes $p_{A_{n_2}}, \ldots, p_{A_{n_n}}$
$$\begin{aligned}
1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) & \sum_{i=0}^{k_{A_{n_2}}+\ldots+k_{A_{n_n}}} \binom{m_{A_{n_2}}+\ldots+m_{A_{n_n}}}{i} \times \\
& \times G(p_{A_{n_2}},\varrho,\zeta,y)^i \left(1-G(p_{A_{n_2}},\varrho,\zeta,y)\right)^{m_{A_{n_2}}+\ldots+m_{A_{n_n}}-i} dy, \\
& \vdots \\
1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) & \sum_{i=0}^{k_{A_{n_n}}} \binom{m_{A_{n_n}}}{i} \times \\
& \times G(p_{A_{n_n}},\varrho,\zeta,y)^i \left(1-G(p_{A_{n_n}},\varrho,\zeta,y)\right)^{m_{A_{n_n}}-i} dy,
\end{aligned}$$
kur
$$G(p_{A_{n_2}}, \varrho, \zeta, y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{A_{n_2}}) - \sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-(\varrho+\zeta)}}\right)^i, G(p_{A_{n_n}}, \varrho, \zeta, y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{A_{n_n}}) - \sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1-(\varrho+\zeta)}}\right)^i.$$
Taigi, $G(p_{A_{n_1}}, \varrho, \zeta, y), G(p_{A_{n_2}}, \varrho, \zeta, y), \ \ldots, G(p_{A_{n_n}}, \varrho, \zeta, y)$ parodo kategorijų $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_n}$ skolininkų įsipareigojimų neįvykdymo tikimybes.

8.1. Pavyzdys: priklausomumo nuo sisteminio faktoriaus prielaida, koreliacija tarp sisteminio ir individualaus faktorių yra 5 %, įsipareigojimų neįvykdymų nėra

Pirmiausia tikrinsime atvejus, kai įsipareigojimų neįvykdymai priklauso nuo sisteminio faktoriaus, o sisteminis faktorius yra priklausomas nuo individualaus faktoriaus; įsipareigojimų neįvykdymų nėra. Sisteminis faktorius bus turtas, turto koreliaciją paliksime $\varrho = 12\%$, o priklausomumą nuo sisteminio faktoriaus patikrinsime 2 atvejais. Kodas pateiktas **II. Priede**. Pirmu atveju, kai koreliacija tarp sisteminio ir individualaus faktorių yra $\zeta = 5\%$. Skolininkų portfelis atrodo taip
$$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200$$

13 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200, k = 0, \varrho = 12\%, \zeta = 5\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,1672%	0,4247%	0,9002%	1,3541%	2,7102%	5,3506%
$\hat{p}_{A_2}$	0,2977%	0,7443%	1,5209%	2,2395%	4,3076%	8,1124%
$\hat{p}_{A_3}$	0,4654%	1,1226%	2,2349%	3,2403%	6,0428%	10,9683%

Sekančioje lentelėje taip pat yra $m = 1000$ skolininkų, skolininkai pagal kategorijas pasiskirstę taip

$$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_3} = 100$$

14 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_3} = 100, k = 0, \varrho = 12\%, \zeta = 5\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,1672%	0,4247%	0,9002%	1,3541%	2,7102%	5,3506%
$\hat{p}_{A_2}$	0,2412%	0,6032%	1,2470%	1,8553%	3,6201%	6,9387%
$\hat{p}_{A_3}$	1,1857%	2,7088%	5,0962%	7,1255%	12,3592%	20,6153%

Trečias atvejis, kai skolininkų portfelyje yra $m = 2000$. Skolininkai portfelyje pasiskirstę taip

$$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200$$

15 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200, k = 0, \varrho = 12\%, \zeta = 5\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,0915%	0,2432%	0,5329%	0,8173%	1,6992%	3,5055%
$\hat{p}_{A_2}$	0,1103%	0,2930%	0,6310%	0,9601%	1,9768%	4,0223%
$\hat{p}_{A_3}$	0,1455%	0,3669%	0,7847%	1,1859%	2,3872%	4,7904%

Matome, kad lieka galioti (3.2) nelygybė. PD veikia γ ir skolininkų skaičius. Įsipareigojimų neįvykdymų neturint, sisteminio faktoriaus poveikis PD didina, o šio faktoriaus priklausomumas nuo individualaus faktoriaus ζ įsipareigojimų neįvykdymo tikimybes didina dar stipriau.

8.2. Pavyzdys: priklausomumo nuo sisteminio faktoriaus prielaida, koreliacija tarp sisteminio ir individualaus faktorių yra -15 %, įsipareigojimų neįvykdymų nėra

Šiuo atveju įsipareigojimų neįvykdymai priklauso nuo sisteminio faktoriaus, o sisteminis faktorius yra priklausomas nuo individualaus faktoriaus; įsipareigojimų neįvykdymų nėra. Sisteminis faktorius bus turtas, turto koreliaciją paliksime $\varrho = 12\%$, o koreliacija tarp sisteminio ir individualaus faktorių yra $\zeta = -15\%$. Kodas pateiktas **II. Priede**. Skolininkų portfelis atrodo taip

$$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200$$

16 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200, k = 0, \varrho = 12\%, \zeta = -15\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,0561%	0,1600%	0,3765%	0,5983%	1,3235%	2,8871%
$\hat{p}_{A_2}$	0,1096%	0,3166%	0,7165%	1.1153%	2,3587%	4,8735%
$\hat{p}_{A_3}$	0,1880%	0,5192%	1,1518%	1,7594%	3,5935%	7,1211%

Sekančioje lentelėje taip pat yra $m = 1000$ skolininkų, skolininkai pagal kategorijas pasiskirstę taip

$$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_3} = 100$$

17 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_3} = 100, k = 0, \varrho = 12\%, \zeta = -15\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,0561%	0,1600%	0,3765%	0,5983%	1,3235%	2,8871%
$\hat{p}_{A_2}$	0,0879%	0,2424%	0,5610%	0,8812%	1,8982%	4,0039%
$\hat{p}_{A_3}$	0,5915%	1,5331%	3,1670%	6,6456%	8,7283%	15,6828%

Trečias atvejis, kai skolininkų portfelyje yra $m = 2000$. Skolininkai portfelyje pasiskirstę taip

$$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200$$

18 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200, k = 0, \varrho = 12\%, \zeta = -15\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,0244%	0,0846%	0,1977%	0,3192%	0,7376%	1,6960%
$\hat{p}_{A_2}$	0,0344%	0,1019%	0,2449%	0,3927%	0,8913%	2,0152%
$\hat{p}_{A_3}$	0,0427%	0,1339%	0,3143%	0,5095%	1.1394%	2,5131%

Apžvelgus pavyzdžio rezultatus, matome, kad veikia (3.2) nelygybė. Taip pat, akivaizdu, kad įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės yra ypač mažos, kai kurios netgi mažesnės už atvejį, kai įsipareigojimų neįvykdymai nepriklausomi ir jų nėra.

8.3. Pavyzdys: priklausomumo nuo sisteminio faktoriaus prielaida, koreliacija tarp sisteminio ir individualaus faktorių yra 5 %, yra keli įsipareigojimų neįvykdymai

Dabar tikriname atvejį, kai įsipareigojimų neįvykdymai priklauso nuo sisteminio faktoriaus, o sisteminis faktorius yra priklausomas nuo individualaus faktoriaus; įsipareigojimų neįvykdymų turime po vieną A_2 ir A_3 kategorijose. Kodas pateiktas **II. Priede**. Sisteminis faktorius bus turtas, turto koreliaciją paliksime $\varrho = 12\%$. Patikrinsime atvejį, kai koreliacija tarp sisteminio ir individualaus faktorių yra $\zeta = 5\%$. Įsipareigojimų neįvykdymai $k = k_{A_1} + k_{A_1} + k_{A_1} = 0 + 1 + 2 = 3$. Skolininkų portfelis atrodo taip

$$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200$$

19 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200, k_{A_1} = 0, k_{A_2} = 1, k_{A_3} = 2, \varrho = 12\%, \zeta = 5\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,7148%	1,4126%	2,4780%	3,3867%	5,8092%	9,9401%
$\hat{p}_{A_2}$	1,2853%	2,4392%	4,1077%	5,4851%	9,0041%	14,6551%
$\hat{p}_{A_3}$	1,5072%	2,8825%	4,8708%	6,4981%	10,6193%	17,1065%

Sekančioje lentelėje taip pat yra $m = 1000$ skolininkų, skolininkai pagal kategorijas pasiskirstę taip

$$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_3} = 100$$

20 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_2} = 100, k_{A_1} = 0, k_{A_2} = 1, k_{A_3} = 2, \varrho = 12\%, \zeta = 5\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,7148%	1,4126%	2,4780%	3,3867%	5,8092%	9,9401%
$\hat{p}_{A_2}$	1,0282%	1.9815%	3,3950%	4,5731%	7,6330%	12,6684%
$\hat{p}_{A_3}$	3,8433%	6,8370%	10,7943%	13.8112%	20,8506%	30,7288%

Trečias atvejis, kai skolininkų portfelyje yra $m = 2000$. Įsipareigojimų neįvykdymo atvejų yra $k = k_{A_1} + k_{A_2} + k_{A_3} = 0 + 0 + 3 = 3$. Skolininkai portfelyje pasiskirstę taip

$$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200$$

21 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200, k_{A_1} = 0, k_{A_2} = 0, k_{A_3} = 3, \varrho = 12\%, \zeta = 5\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,4004%	0,8188%	1,4877%	2,0821%	3,7252%	6,6755%
$\hat{p}_{A_2}$	0,4818%	0,9749%	1,7515%	2,4321%	4,2963%	7,5947%
$\hat{p}_{A_3}$	0,6123%	1,2252%	2,1656%	2,9787%	5,1718%	8,9573%

Iš gautų rezultatų nesunku pastebėti, kad lieka galioti (3.2) nelygybė. Taip pat, kad γ stipriai veikia PD. Skolininkų skaičius daro didelę įtaką PD. Jei palygintume pavyzdį, kai sisteminis faktorius nepriklauso nuo individualaus, t. y. $\zeta = 0\%$, pastebėtume, kad PD yra mažesnės. Todėl, galime teigti, kad teigiama koreliacija tarp sisteminio ir individualaus faktorių didina įsipareigojimų neįvykdymo tikimybę.

8.4. Pavyzdys: priklausomumo nuo sisteminio faktoriaus prielaida, koreliacija tarp sisteminio ir individualaus faktorių yra -15 %, yra keli įsipareigojimų neįvykdymai

Paskutiniuoju atveju įsipareigojimų neįvykdymai priklauso nuo sisteminio faktoriaus, sisteminis faktorius yra priklausomas nuo individualaus faktoriaus; įsipareigojimų neįvykdymų yra. Kodas pateiktas **II. Priede**. Sisteminis faktorius bus turtas, turto koreliaciją paliksime $\varrho = 12\%$. Koreliacija tarp sisteminio ir individualaus faktorių yra $\zeta = -15\%$. Įsipareigojimų neįvykdymai $k = k_{A_1} + k_{A_2} + k_{A_3} = 0 + 0 + 3 = 3$. Skolininkų portfelis atrodo taip

$$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200$$

22 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200, k_{A_1} = 0, k_{A_2} = 0, k_{A_3} = 3, \varrho = 12\%, \zeta = -15\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,3201%	0,6796%	1,2747%	1,8136%	3,3326%	6,1327%
$\hat{p}_{A_2}$	0,6463%	1,3243%	2,3760%	3,2856%	5,7486%	9,9928%
$\hat{p}_{A_3}$	1,0946%	2,1603%	3,7469%	5,0763%	8,5270%	14,1781%

Sekančioje lentelėje $m = 1000, k = 3$, skolininkai pasiskirstę taip

$$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_1} = 100.$$

23 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 350, m_{A_2} = 550, m_{A_3} = 100, k_{A_1} = 0, k_{A_2} = 0, k_{A_3} = 3, \varrho = 12\%, \zeta = -15\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,3201%	0,6796%	1,2747%	1,8136%	3,3326%	6,1327%
$\hat{p}_{A_2}$	0,4974%	1.0304%	1,8789%	2,6353%	4,6826%	8,3210%
$\hat{p}_{A_3}$	3,3951%	6,1302%	9,8065%	12,6481%	19,3656%	28,9572%

Trečias atvejis – skolininkai portfelyje pasiskirstę taip

$$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200.$$

24 lentelė. A_1, A_2 ir A_3 kategorijų skolininkų PD, pagal pasirinktus γ

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
$m_{A_1} = 400, m_{A_2} = 400, m_{A_3} = 1200, k_{A_1} = 0, k_{A_2} = 0, k_{A_3} = 3, \varrho = 12\%, \zeta = -15\%$						
$\hat{p}_{A_1}$	0,1571%	0,3457%	0,6817%	0,9923%	1,9135%	3,7166%
$\hat{p}_{A_2}$	0,1953%	0,4296%	0,8332%	1,2042%	2,2899%	4,3731%
$\hat{p}_{A_3}$	0,2645%	0,5707%	1,0813%	1,5453%	2,8825%	5,3814%

Iš gautų rezultatų matome, kad veikia nelygybė (3.2). Reikšmingumo lygmeniui didėjant – didėja PD. Taip pat matome, kad neigiama koreliacija tarp sisteminio ir individualaus faktorių mažina įsipareigojimų neįvykdymo tikimybes.

9. Išvados

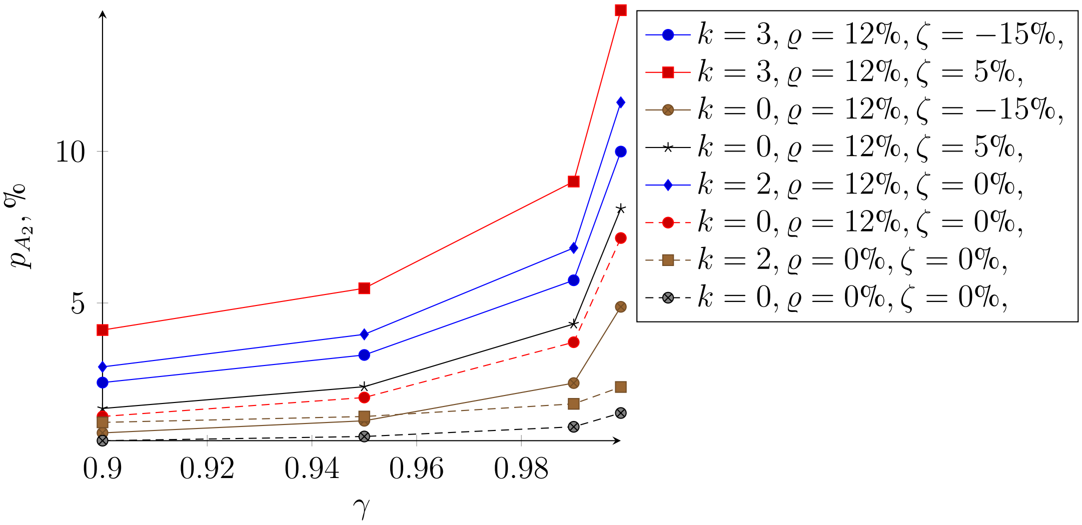
Baigiamajame darbe nagrinėjome įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių modeliavimo būdą, kai:

- Įsipareigojimų neįvykdymo įvykiai yra nepriklausomi;
- Įsipareigojimų neįvykdymo įvykiai tarpusavyje nepriklausomi, juos veikia sisteminis ir individualus faktoriai, kurie tarpusavyje yra nepriklausomi;
- Įsipareigojimų neįvykdymai tarpusavyje nepriklausomi, juos veikia sisteminis ir individualus faktoriai, kurie tarpusavyje yra priklausomi.

Įsipareigojimų neįvykdymo tikimybes vertinome pasikliautinaisiais intervalais, pasirenkant dažniausiai praktikoje naudojamus reikšmingumo lygmenis, portfelius sudarančių skolininkų skaičius, kategorijoms priklausančius skolininkus bei įsipareigojimų neįvykdymų skaičius. Sisteminis faktorius pasirinktas pagal Bazelio komiteto nuorodas [6] – skolininkų turto koreliacija, o jo priklausomybes nuo individualaus faktoriaus rinkomės dvi, kad pamatytume kaip PD veikia tiek teigiama, tiek neigiama koreliacijos. Visuose pavyzdžiuose rėmėmės konservatyvumo metodu. Taip galėjome įvertinti viršutinius įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių rėžius. Kadangi informacijos naudojamos tyrimui turėjome nedaug, skolininkų ir įsipareigojimų neįvykdymų skaičiai teoriniai, rezultatus gavome ganėtinai konservatyvius, tačiau juos laikome logiškais.

Nustačius 5 prielaidų atvejus (skyrelis (2.3)), kuriais nutarėme patikrinti PD, skaičiavome po 3 pavyzdžius kiekvienoms prielaidoms. Taip pasirinkome, kad galėtume palyginti – kaip kiekvienas faktorius, skolininkų skaičius ar kategorijas sudarantis skolininkų kiekis, veikia PD. Apibendrinimui pasirinkome A_2 kategorijos skolininkų PD, kai $m_{A_1} = 500, m_{A_2} = 300, m_{A_3} = 200$, pavaizduoti grafiškai.

1 pav. A_2 kategorijos skolininkų PD pagal γ iš lentelių:1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 ir 22.



Iš grafiko, nesunku pastebėti, kad mažiausios PD generuojamos atveju, kai įsipareigojimų neįvykdymai yra nepriklausomi, t. y. turto koreliacija yra 0%, įsipareigojimų neįvykdymų nėra. Kita vertus, didžiausios įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės tenka atvejui, kai įsipareigojimų neįvykdymai priklausomi nuo sisteminio faktoriaus, sisteminis ir individualus faktorius turi teigiamą korialiaciją ir turime 3 įsipareigojimų neįvykdymo atvejus. Palyginę atvejus, kai $k = 0, \varrho = 12\%, \zeta = 0\%$ ir $k = 0, \varrho = 12\%, \zeta = -15\%$, nesunku pastebėti, jog neigiama koreliacija tarp sisteminio ir individualaus faktorių ζ mažina PD. Taip pat, palyginę atvejus, kai $k = 0, \varrho = 12\%, \zeta = 0\%$ ir $k = 0, \varrho = 12\%, \zeta = 5\%$ matome, kad teigiama koreliacija tarp sisteminio ir individualaus faktorių didina įsipareigojimų neįvykdymų tikimybes. Be to, jei sulygintume atvejus, kai $k = 0$, $\varrho = 12\%, \zeta = 0\%$ ir $k = 2$, $\varrho = 0\%, \zeta = 0\%$, pamatytume, kad atvejis, kai veikia teigiama turto koreliacija, generuoja didesnę PD, nei atvejis, kai turto koreliacija $\varrho = 0\%$ bet portfelyje turime 2 įsipareigojimų neįvykdymus.

Literatūra

[1] Lietuvos banko valdybos 2006 11 09 nutarimas Nr. 138. *Dėl kapitalo pakankamumo skaičiavimo bendrųjų nuostatų*. Nr. 142-5442, 2006.

[2] C. Bluhm, L. Overbeck, and C. Wagner. *An Introduction to Credit Risk Modeling*. New York, USA: Chapman and Hall/CRC, 2003.

[3] V. Čekanavičius ir G. Murauskas. *Statistika ir jos taikymai. I dalis.* Vilnius, Lietuva: TEV, 2000.

[4] B. Engelman and R. Rauhmeier. “The Basel II Risk Parameters. Estimation, Validation, Stress Testing - with applications to Loan Risk Management”. In: (2006, 2011).

[5] K. Hinderer. „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie. Zweiter korrigierter Nachdruck der ersten Auflage“. (1980).

[6] Bank for International Settlements. “An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions”. In: (2005).

[7] R. Leipus ir M. Valužis. „Kredito rizika kaip pasirinkimo sandoris“. (2006).

[8] K. Pluto and D. Tasche. “Estimating Probabilities of Default for Low Default Portfolios”. In: *SSRN Electronic Journal* (2011).

[9] T. Schuermann and S. Hanson. “Estimating Probabilities of Default, Staff Report No. 190”. In: (2004).

PRIEDAI

I. Priedas

```
#Isvalome skaiciuokle
rm(list = ls())
#kvieciame pagrindine funkcija
get.ProbDefTable <- function(portf.uncond, portf.def,
  correlation_type,confidence) {
  start.time <- Sys.time()
  confidence_interval_at_0 = confidence;
  confidence_interval_at_k = confidence;
  ProbDefTables <- ProbDefTable_solve(portf.uncond,
  correlation_type)
  ProbDefTable_0 <- ProbDefTables[1]
  ProbDefTable_k <- ProbDefTables[2]
  #Sioje vietoje skaiciuojam PD
  ProbDefTable <- c(c(portf.uncond, portf.def,
        percent(portf.def/portf.uncond),
        percent(ProbDefTable_0),
        round(rho(ProbDefTable_0, correlation_type), 4),
        percent(confidence_interval_at_0, 2),
        percent(ProbDefTable_k),
        round(rho(ProbDefTable_k, correlation_type), 4),
        percent(confidence_interval_at_k, 2)))
  #pazymime fukncijos skaiciavimo laika
  end.time <- Sys.time()
  time.taken <- round(end.time - start.time, 3)
  ProbDefTable <- matrix(c(ProbDefTable,time.taken), 1, 10)
  colnames(ProbDefTable) <- c("Portfolio size",
        "Number of defaults",
        "ObserveDefRate",
        "ProbDefTable_0",
        "Correlation coefficient at 0 defaults",
        "Confidence interval at 0 defaults",
         paste("ProbDefTable_",portf.def),
         paste("Correlation coefficient at",portf.def,"defaults"),
         paste("Confidence interval at",portf.def,"defaults"),
        "Time taken (seconds)")
  return(ProbDefTable)
}
vget.ProbDefTable <- Vectorize(get.ProbDefTable,
```

```
        c("portf.uncond", "portf.def"))
#Sisteminio faktoriaus (turto) kObserveDefRateeliacija
rho <- function(ProbDefTable, correlation_type) {
  if (correlation_type == "Retail") { rho.val<-0.12 }
  return(rho.val)
}
#pagrindine lygtis
G <- function(ProbDefTable, y, correlation_type)
{pnorm((qnorm(ProbDefTable) -
sqrt(rho(ProbDefTable,correlation_type)) * y) /
 (sqrt(1 - rho(ProbDefTable,correlation_type))))}
ProbDefTable_solve <- function(portf.uncond,
    correlation_type){
  y <- seq(-8.5, 8.5, by = 0.0001)
  val <- 0
  #Sprendziam lygti
  f <- function(x)
  {
    for (i in 1:(length(y)-1))
    { val <- val + sum(dbinom(0:k,
portf.uncond,G(x,y[i], correlation_type)))*
(pnorm(y[i+1])-pnorm(y[i]))}
    return(val-1+alpha)
  }
  #Suskaiciuojame PD kai k=0 ir kai k=k
  k <- 0; alpha <- confidence
  ProbDefTable_0 <- uniroot(f,c(0,1))$root
  k <- portf.def; alpha <- confidence
  ProbDefTable_k <- uniroot(f,c(0,1))$root
  return(c(ProbDefTable_0, ProbDefTable_k))
}
# isreiskiame procentine dalimi
percent <- function(x, digits = 4, format = "f", ...) {
  paste0(formatC(100 * x, format = format,
  digits = digits, ...), "%")
}

#Isivedame kintamuosius PD skaiciavimui:
#skolininku skaicius
portf.uncond = 1200
```

```
#Isipareigojimu neivykdymu skaicius
portf.def = 2
#Reiksmingumo lygmuo gamma
confidence = 0.5
#Turto koreliacija, siuo atveju 12%
correlation_type = "Retail"
#skaiciavimo funkcija
ProbDefTable = get.ProbDefTable(portf.uncond = portf.uncond,
      portf.def = portf.def,
      correlation_type = correlation_type,
      confidence=confidence)
#isspausdina lentele su rezultatais
View(ProbDefTable)
```

II. Priedas

```
#Isvalome skaiciuokle
rm(list = ls())
#kvieciame pagrindine funkcija
get.ProbDefTable <- function(portf.uncond, portf.def,
  correlation_type,confidence) {
  start.time <- Sys.time()
  confidence_interval_at_0 = confidence;
  confidence_interval_at_k = confidence;
  ProbDefTables <- ProbDefTable_solve(portf.uncond,
  correlation_type)
  ProbDefTable_0 <- ProbDefTables[1]
  ProbDefTable_k <- ProbDefTables[2]
  #Sioje vietoje skaiciuojam PD
  ProbDefTable <- c(c(portf.uncond, portf.def,
        percent(portf.def/portf.uncond),
        percent(ProbDefTable_0),
        round(rho(ProbDefTable_0, correlation_type), 4),
        percent(confidence_interval_at_0, 2),
        percent(ProbDefTable_k),
        round(rho(ProbDefTable_k, correlation_type), 4),
        percent(confidence_interval_at_k, 2)))
  #pazymime fukncijos skaiciavimo laika
  end.time <- Sys.time()
  time.taken <- round(end.time - start.time, 3)
  ProbDefTable <- matrix(c(ProbDefTable,time.taken), 1, 10)
```

```
  colnames(ProbDefTable) <- c("Portfolio size",
          "Number of defaults",
          "ObserveDefRate",
          "ProbDefTable_0",
          "Correlation coefficient at 0 defaults",
          "Confidence interval at 0 defaults",
            paste("ProbDefTable_",portf.def),
            paste("Correlation coefficient at",portf.def,"defaults"),
            paste("Confidence interval at",portf.def,"defaults"),
          "Time taken (seconds)")
  return(ProbDefTable)
}
vget.ProbDefTable <- Vectorize(get.ProbDefTable,
          c("portf.uncond", "portf.def"))
#Sisteminio faktoriaus (turto) koreliacija
rho <- function(ProbDefTable, correlation_type) {
  if (correlation_type == "Retail") { rho.val<-0.12 }
  return(rho.val)
}
#Sisteminio faktoriaus priklausomybe nuo
#individualaus faktoriaus zeta, pasikeisti kitu atveju
zeta <- function(ProbDefTable, correlation_type) {
  if (correlation_type == "Retail") { zeta.val<-(0.05) }
  return(zeta.val)
}
#pagrindine lygtis
G <- function(ProbDefTable, y, correlation_type)
{pnorm((qnorm(ProbDefTable) -
sqrt(rho(ProbDefTable,correlation_type)) * y) /
 (sqrt(1 - (rho(ProbDefTable,correlation_type)+
zeta(ProbDefTable,correlation_type)))))}
ProbDefTable_solve <- function(portf.uncond,
    correlation_type){
  y <- seq(-8.5, 8.5, by = 0.0001)
  val <- 0
  #Sprendziam lygti
  f <- function(x)
  {
    for (i in 1:(length(y)-1))
    { val <- val + sum(dbinom(0:k,
```

```
portf.uncond,G(x,y[i], correlation_type)))*
(pnorm(y[i+1])-pnorm(y[i]))}
    return(val-1+alpha)
  }
  #Suskaiciuojame PD kai k=0 ir kai k=k
  k <- 0; alpha <- confidence
  ProbDefTable_0 <- uniroot(f,c(0,1))$root
  k <- portf.def; alpha <- confidence
  ProbDefTable_k <- uniroot(f,c(0,1))$root
  return(c(ProbDefTable_0, ProbDefTable_k))
}
# isreiskiame procentine dalimi
percent <- function(x, digits = 4, format = "f", ...) {
  paste0(formatC(100 * x, format = format,
  digits = digits, ...), "%")
}

#Isivedame kintamuosius PD skaiciavimui:
#skolininku skaicius
portf.uncond = 1200
#Isipareigojimu neivykdymu skaicius
portf.def = 2
#Reiksmingumo lygmuo gamma
confidence = 0.5
#Turto koreliacija, siuo atveju 12%
correlation_type = "Retail"
#skaiciavimo funkcija
ProbDefTable = get.ProbDefTable(portf.uncond = portf.uncond,
      portf.def = portf.def,
      correlation_type = correlation_type,
      confidence=confidence)
#isspausdina lentele su rezultatais
View(ProbDefTable)
```

III. Priedas

```
PD_indep_no_defaults <- function(n,gamma) {
  PD <- 1 - (1 - gamma)^(1/n)
  PD}
```