

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro baigiamasis darbas

Populiacijos mirtingumo modelių su atsitiktiniu
efektu apžvalga

Overview of population mortality models with
frailty

Laura Stankaitytė

VILNIUS 2020

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS INSTITUTAS

Darbo vadovas prof. dr. Jonas Šiaulys _____

Darbo recenzentė dr. Aldona Skučaitė _____

Darbas apgintas _____

Darbas įvertintas _____

Registravimo NR. _____

Įrašoma atidavimo į katedrą data 2020-01-06

Turinys

Santrauka /Abstract	2
1 Įvadas	5
2 Mirtingumo modeliai	7
2.1 Mirtingumo modelių aprašymas	8
2.1.1 Beard	8
2.1.2 Kannisto	9
2.1.3 Siler	9
3 Mirtingumo modelių su atsitiktiniu efektu analizė	11
3.0.1 Kannisto-Poisson	11
3.0.2 Kannisto-Gamma	13
3.0.3 Kannisto-Discrete/Uniform	14
3.0.4 Beard-Poisson	16
3.0.5 Beard-Gamma	17
3.0.6 Beard-Discrete/Uniform	18
3.0.7 Siler-Poisson	19
3.0.8 Siler-Gamma	21
3.0.9 Siler-Discrete/Uniform	21
4 Mirtingumo modelių su atsitiktiniu efektu taikymas	24
4.0.1 Naudojami duomenys ir prielaidos	24
4.0.2 Modelių praktinis taikymas bei lyginimas	26
5 Išvados ir rekomendacijos	34
Literatūra	35
Priedai A	37
Priedai B	42

Populiacijos mirtingumo modelių su atsitiktiniu efektu apžvalga

Santrauka

Šio magistrinio darbo tikslas yra apžvelgti kelis klasikinius populiacijos mirtingumo modelius (Kannisto, Perks, Siler) bei pasinaudojus Poisson, Gamma bei Discrete-Uniform a.d. rasti naujas mirtingumo funkcijas, kuriose atsitiktinis efektas nusakomas minėtųjų atsitiktinių dydžių pagalba. Taip pat šiame darbe pasinaudojus mirtingumo lentelių duomenimis bus rasti šių naujų mirtingumo funkcijų optimalūs parametrai Šveicarijos, Lietuvos bei Ukrainos populiacijoms ir nustatyta, kuri mirtingumo funkcija tiksliausiai nusako pasirinktos populiacijos mirtingumą.

Raktiniai žodžiai: Mirtingumo galia, mirtingumo modelis, atsitiktinis efektas, atsitiktinis dydis.

Overview of population mortality models with frailty

Abstract

The aim of this paper is to give an overview of few different classical mortality laws (Kannisto, Perks, Siler) and using Poisson, Gamma and Discrete-Uniform distributions derive new mortality laws, in which frailty is described as a random variable of chosen distributions. Also to apply these models to Swiss, Lithuanian and Ukrainian populations mortality data, and compare, which model represents which population's mortality curves most accurately.

Key words: Mortality rate, mortality law, frailty, random variable.

1 Įvadas

Populiacijos mirtingumo aprašymas naudojant matematinius modelius - nenauja ir gana svarbi aktuarus dominanti tema. Vienas pirmųjų bendrą gyventojų mirtingumo kreivę padengiančią išraišką, kuri atsižvelgia į aukštesnį naujagimių mirtingumą, o paskui eksponentiškai auga didėjant amžiui, dar 1825 metais pasiūlė britų matematikas-aktuaras Benjamin Gompertz. Drauge su kolega William Makeham jie paklojo pagrindą tolimesniems šios aktuarinės srities tyrimams bei tobulinimams. Didžiąją dalį nuo tada išvestų bei iki šių dienų draudimo bendrovėse bei ne tik naudojamų mirtingumo modelių, kartu su jų labai plačiu aprašymu, galima rasti danų aktuario Marius Pascariu straipsnyje [6]. Beje, to paties aktuario sukurtas R programos paketas, skirtas darbui su mirtingumo modeliu taikymu, bus naudojamas ir šiame darbe.

Kaip bebūtų, dauguma šiame straipsnyje minimų matematinių modelių yra pagrįsti prielaida, kad populiacija yra homogeniška, t.y. kiekvieno to paties amžiaus individo tikimybė mirti yra vienoda. Žinoma, gyvybės draudimo bendrovės, dėka draudėjo pildomų asmeninės informacijos anketų, gali suskirstyti savo portfelį į daug panašių homogeniškų portfelių pagal amžių, lytį, sveikatos būklę, išsilavinimą, profesiją ar fizinį aktyvumą, tokiu būdu darydamos prielaidą, kad tikimybė šioms žmonėms mirti yra labai panaši ir taip gana gerai valdyti mirtingumo riziką. Tačiau yra veiksnių, pavyzdžiui, kaip pats žmogaus požiūris į sveikatą, laisvalaikio, gyvenimo būdo įpročiai, kurių gyvybės draudimo bendrovės, sudarant gyvybės draudimo sutartį su draudėju, lengvai numatyti negali. Todėl norint padaryti tinkamas populiacijos mirtingumo prognozes, turinčias įtaką draudiko prisiimtiems įsipareigojimams, labai svarbu tinkamai įvertinti populiacijos individų skirtumus.

Vienas pirmųjų į šią mirtingumo modelių spragą dėmesį atkreipė amerikiečių mokslininkas James Vaupel, apibrėžęs tokį neneigiamą atsitiktinį dydį, vadinamą atsitiktiniu efektu (ang. *frailty*) [12], kuris, taikomas kartu su pasirinktu analiziniu mirtingumo modeliu, turėtų geriau įvertinti negalimų apskaičiuoti individo rizikos faktorių įtaką mirtingumo galiai ir dėl šių priežasčių susidarančiam skirtumui nuo bendro populiacijos vidurkio. Autorius pastebi, kad remiantis praktiniais skaičiavimais su Švedijos gyventojų duomenimis, šie skirtumai gali būti net labai reikšmingi, ypač vyresniame amžiuje.

Toliau atsitiktinį efektą nagrinėjo italų aktuarė Annamaria Olivieri (2006), savo praktiniame tyrime pasiūliusi [4] atsitiktinį efektą aprašyti Gamma skirstiniu ir jį pritaikyti Gompertz mirtingumo kreivei. Autorė išskiria draudimo bei pensijų fondų bendrovių prisiimtų įsipareigojimų jautrumą, kuomet rezervams skaičiuoti naudojami mirtingumo modeliai su ir be atsitiktinio efekto.

Taip pat populiacijos individų heterogeniškumo įtaką mirtingumo kreivei analizavo ir kiti matematikai-aktuarai Zoltan Butt [2] bei Emanuel Pitacco [7] ir [8], kurių darbai ir įkvėpė tolimesnį tyrimą, kuriam ir bus paskirtas šis rašto darbas.

Pagrindinis šio darbo tikslas yra toliau tęsti mirtingumo modelių su atsitiktiniu efektu tyrimą. Pasirinksime tris mirtingumo modelius - Kannisto, Beard ir Siler - bei išvesime analizes mirtingumo galios funkcijas, kuriose šiems modeliams atsitiktinis efektas bus išreikštas Poisson, Gamma bei Discrete-Uniform atsitiktiniais dydžiais. Toliau tikrinsime gautų mirtingumo funkcijų tinkamumą pasirinktų skirtingo ekonominio išsivystymo šalių mirtingumui aprašyti.

2 Mirtingumo modeliai

Šiame skyriuje pristatysime tris populiacijos mirtingumo modelius, kuriuos vėliau pritaikysime Lietuvos, Šveicarijos bei Ukrainos žmonių populiacijos mirtingumui nusakyti ir palyginsime, kuris modelis kuriai šaliai tinka labiausiai.

Visų pirma, apibrėžkime išgyvenamumo teorijoje naudojamus dydžius, kuriuos taikysime šiame darbe:

1.1. Apibrėžimas. Funkcija

$$F(x) = P(T \leq x)$$

vadinama gyvenimo trukmės *pasiskirstymo funkcija*, kuri parodo tikimybę, kad naujagimis mirs iki kol jam sukaks x metų [9]. Atsitiktinis dydis T žymi atsitiktinę naujagimio gyvenimo trukmę. Galime analogiškai apibrėžti pasiskirstymo funkciją, kuri žymi tikimybę, kad x amžiaus individas nesulauks $x + t$ metų [7]:

$$F_x(t) = P(T_x \leq t) = \frac{F(x+t) - F(x)}{s(x)},$$

kur T_x - neneigiamas atsitiktinis dydis, žymintis atsitiktinę x amžiaus individo gyvenimo trukmę, $s(x)$ - išgyvenamumo funkcija (žr. 1.2. Apibrėžimas).

1.2. Apibrėžimas. Funkcija

$$s(x) = 1 - F(x) = P(T > x)$$

yra vadinama *išgyvenamumo funkcija*, žyminti tikimybę, kad naujagimis sulauks x metų [9].

1.3. Apibrėžimas. Laikome, kad $F_x(t)$ yra diferencijuojamas [9], todėl funkcija

$$f_x(t) = F'_x(t) = -s'(t),$$

$\forall t \geq 0$ ir vadinama atsitiktinio dydžio T_x *tankio funkcija*.

1.4. Apibrėžimas. Dydis

$$\mu_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(T_x \leq t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+t) - F(x)}{t \cdot s(x)} = \frac{f(x)}{s(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)}$$

vadinamas *mirtingumo galia*. Čia $s(x)$ – išgyvenamumo funkcija, $f(x)$ – naujagimio gyvenimo trukmės tankio funkcija, T_x – neneigimas atsitiktinis dydis, žymintis atsitiktinę x amžiaus individo gyvenimo trukmę [7]. Dydis μ_x apibūdina išgyvenamumo funkcijos mažėjimo greitį didėjant amžiui x .

2.1 Mirtingumo modelių aprašymas

2.1.1 Beard

Ilgėjant žmonių gyvenimo trukmei, buvo pastebėta, kad vieni pirmųjų ir populiariausių mirtingumo modelių, tokių kaip Gomperz $\mu_x = \alpha e^{\beta x}$ [1826] bei Makeham $\mu_x = c + \alpha e^{\beta x}$ [1860], ne visai tiksliai nusako populiacijos mirtingumą vyresniame amžiuje [3]. Dėl šios priežasties, buvo pradėta galvoti, kad mirtingumą tiksliau numatyti gali logistiniai modeliai. Priešingai nei eksponentinių modelių atveju, logistiniai modeliai prognozuoja mirtingumo galios augimo tempo sulėtėjimą pasiekus tam tikrą amžių x . Tokia prognozė tiksliau nusako realią mirtingumo galios kreivės formą. Vienas pirmųjų pastebėjęs, kad empirinės μ_x reikšmės iš mirtingumo lentelės gali būti išreikštos kaip tam tikra kreivė, tenkinanti logistinę funkciją, buvo William Perks. Jis 1932 metais pasiūlė logistinį keturių parametru modelį, pagal kurį

$$\mu_x = \frac{c + \alpha e^{\beta x}}{1 + d e^{\beta x}}, x \geq 0, \quad (1)$$

kur $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $c \geq -\alpha$ ir $d > 0$.

Kiek vėliau, 1963 metais, William Perks kolega Robert Beard pasiūlė [1] Perks modelio variaciją, c parametru prilygindamas nuliui ir taip sudarydamas trijų parametru mirtingumo modelį, pagal kurį

$$\mu_x = \frac{\alpha e^{\beta x}}{1 + d e^{\beta x}}, x \geq 0, \quad (2)$$

kur $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ir $d > 0$.

Beard, tyrinédamas vėlyvojo amžiaus mirtingumo duomenis, pastebėjo, kad mirtingumo galios augimas vyresniame amžiuje sulėtėja [8]. Jis teigė, kad šiam reiškiniiui įtaką daro „Atsitiktinis efektas“ (*angl.* frailty) (žr. 3 skyrių).

2.1.2 Kannisto

Galiausiai 1992 metais šį (2) logistinį modelį supaprastino demografas Vaino Kannisto, kuris d parametą prilygindamas α parametrai, pasiūlė paprastą dviejų parametų modelį populiacijos mirtingumui nusakyti, pagal kurį mirtingumo galia

$$\mu_x = \frac{\alpha e^{\beta x}}{1 + \alpha e^{\beta x}}, x \geq 0, \quad (3)$$

kur $\alpha > 0$ ir $\beta > 0$.

Nesunku pastebėti, kad šie modeliai (Beard ir Kannisto) yra logistinės mirtingumą nusakančios kreivės, kai didėjant x (mūsų atveju – amžiui) mirtingumo galia μ_x asimptotiškai artėja prie tiesės:

1) Kannisto modelio atveju:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha e^{\beta x}}{1 + \alpha e^{\beta x}} = 1;$$

2) Beard modelio atveju:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha e^{\beta x}}{1 + d e^{\beta x}} = \frac{\alpha}{d}.$$

2.1.3 Siler

Siler toliau tęsė Gompertz-Makeham mirtingumo kreivės tyrinėjimą ir ją išstobulino iki penkių parametų modelio, kuris daug geriau galėtų nusakyti populiacijos mirtingumą trijose ker-
tinėse jos stadijose atskirai - vaikystėje, subrendusiame amžiuje bei senatvėje [6]. Pagal Siler pasiūlytą modelį mirtingumo galia

$$\mu_x = \alpha_1 e^{-\beta_1 x} + \alpha_2 e^{\beta_2 x} + c, x \geq 0, \quad (4)$$

kur parametrai $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ ir $c \geq -\alpha_2$. Parametras α_1 nusako naujagimių mirtingumo lygį, o β_1 yra ankstyvojo mirtingumo su amžiumi mažėjimo laipsnis. Parametrai α_2

ir β_2 atkeliauja iš Gomperz mirtingumo kreivės ir atitinkamai nusako bendrą suaugusiųjų mirtingumo lygį bei kaip mirties rizika auga didėjant amžiui. Konstanta c skolinamasi iš Makeham lygties ir nusako su amžiumi nesusijusią mirtingumo rizikos dalį.

3 Mirtingumo modelių su atsitiktiniu efektu analizė

Vienas pirmųjų atsitiktinio efekto modelių aprašė amerikiečių mokslininkas James Vaupel [12]. Atsitiktinį efektą (*angl.* frailty) jis nusakė kaip neneigiamą atsitiktinį dydį, kuris parodo negalimų įvertinti individo rizikos faktorių įtaką mirtingumo galiai ir skirtumą nuo visos populiacijos mirtingumo vidurkio. Pagrindinė šio modelio idėja yra ta, kad lauktinoji individo būsimo gyvenimo trukmė su didesniu atsitiktinio efekto dydžiu yra mažesnė nei kitų. [10]

Tegul $\mu_{x|Z}$ nusako x amžiaus individo mirtingumo galią su Z dydžio atsitiktiniu efektu. Tokiu atveju yra siūloma [7] mirtingumo galią išreikšti kaip sandaugą:

$$\mu_{x|Z} = Z\mu_x, x \geq 0, \quad (5)$$

kur μ_x yra individo su $Z = 1$ mirtingumo galia (standartinė populiacijos mirtingumo galia).

Sakykime Z yra neneigiamas atsitiktinis dydis, su tankio funkcija $f_Z(z)$. Tuomet populiacijos individo (naujagimio) išgyvenamumo funkcija, atsižvelgus į dydį Z , nusakoma lygybe

$$S(x|Z) = S^*(x) = \int_0^\infty e^{-\int_0^x \mu_t|z dt} f_Z(z) dz \quad (6)$$

Bendru atveju, kai a.d. Z nebūtinai absoliučiai tolydus, išgyvenimo funkcija su atsitiktiniu efektu

$$S(x|Z) = S^*(x) = E(e^{-Z \int_0^x \mu_t dt}). \quad (7)$$

Toliau šiame skyriuje išvesime visas galimas 3 anksčiau aptartų mirtingumo modelių (Kannisto, Beard, Siler) variacijas, kai atsitiktinį efektą šiems modeliams nusako neneigiami atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal Poisson, Gamma bei Discrete - Uniform (*toliau D/U*) dėsnius.

3.0.1 Kannisto-Poisson

Tarkime, kad Z yra pagal Poisson skirstinį pasiskirstęs a.d. $Z \sim Poiss(\lambda)$, kuris yra nusakomas formule

$$P(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0. \quad (8)$$

Remiantis (7), o taip pat tuo, kad Poisson a.d. yra diskretus, gauname, kad $S(x|Z)$ įgyja tokią išraišką:

$$S^*(x) = e^{-\lambda} + e^{-\int_0^x \mu_t dt} e^{-\lambda \frac{\lambda^1}{1!}} + e^{-2 \int_0^x \mu_t dt} e^{-\lambda \frac{\lambda^2}{2!}} + \dots = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-\int_0^x \mu_t dt})^k}{k!} \quad (9)$$

Pasinaudoję žinoma lygybe

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

gauname, kad $S^*(x)$ įgyja tokį pavidalą:

$$S^*(x) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{-\int_0^x \mu_t dt}} = e^{\lambda(e^{-\int_0^x \mu_t dt} - 1)}. \quad (10)$$

Suintegravę Kannisto mirtingumo dėsnį gauname tokią išraišką:

$$\int_0^x \mu_t dt = \int_0^x \frac{\alpha e^{\beta t}}{1 + \alpha e^{\beta t}} dt = \frac{1}{\beta} (\ln(\alpha e^{\beta x} + 1) - \ln(\alpha + 1)) = \frac{1}{\beta} \left(\ln \left(\frac{\alpha e^{\beta x} + 1}{\alpha + 1} \right) \right) \quad (11)$$

Šią išraišką įsistatę į (10) ir atlikę keletą nesudėtingų matematinių veiksmų gauname, kad išgyvenamumo funkcija su Kannisto mirtingumo galia bei atsitiktinį efektą nusakančiu Poisson a.d. įgyja tokį pavidalą:

$$S^*(x) = e^{\lambda(e^{-\frac{1}{\beta}(\ln(\frac{\alpha e^{\beta x} + 1}{\alpha + 1)})} - 1)} = e^{\lambda \left(\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha e^{\beta x} + 1} \right)^{\frac{1}{\beta}} - 1 \right)} \quad (12)$$

Apskaičiavę šios funkcijos išvestinę ir gavę, kad

$$(S^*(x))' = -S^*(x) \frac{\lambda \alpha e^{\beta x} (\alpha + 1)^{\frac{1}{\beta}}}{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{1+\beta}{\beta}}}$$

galime rasti ir Kannisto mirtingumo galios su atsitiktinį efektą nusakančiu Poisson dėsnio išraišką, lygią:

$$\mu_x = -\frac{(S^*(x))'}{S^*(x)} = \frac{\lambda \alpha e^{\beta x} (\alpha + 1)^{\frac{1}{\beta}}}{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{1+\beta}{\beta}}}. \quad (13)$$

3.0.2 Kannisto-Gamma

Tarkime, kad šiuo atveju Z yra pagal Gamma skirstinį pasiskirstęs a.d. $Z \sim \Gamma(k, \lambda)$, kurio tankio funkcija turi išraišką:

$$f_Z(z) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} z^{k-1} e^{-\lambda z}, \quad z \geq 0, k, \lambda > 0, \quad (14)$$

o $\Gamma(k)$ yra Gamma funkcija: $\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-t} t^{k-1} dt$.

Tolimesniuose skaičiavimuose naudosime anksčiau aprašytos išgyvenamumo funkcijos išraišką (6), Gamma skirstinio tankio funkciją (14) bei nuo 0 iki x suintegruotos Kannisto mirtingumo galios išraišką (11). Nesunku pastebėti, kad nagrinėjamu atveju

$$S^*(x) = \int_0^\infty \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} e^{-z \int_0^x \mu_t dt} z^{k-1} e^{-\lambda z} dz = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_0^\infty e^{-z(\int_0^x \mu_t dt + \lambda)} z^{k-1} dz. \quad (15)$$

Pažymėkime $w := z(\int_0^x \mu_t dt + \lambda)$, tada:

$$\begin{aligned} S^*(x) &= \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_0^\infty e^{-w} \left(\frac{w}{\int_0^x \mu_t dt + \lambda} \right)^{k-1} \frac{1}{\int_0^x \mu_t dt + \lambda} dw \\ &= \frac{\lambda^k}{\Gamma(k) (\int_0^x \mu_t dt + \lambda)^k} \int_0^\infty e^{-w} w^{k-1} dw. \end{aligned} \quad (16)$$

Pastebėję, kad $\int_0^\infty e^{-w} w^{k-1} dw = \Gamma(k)$ ir į (16) įsistatę suintegruotą Kannisto mirtingumo galią, gauname tokią išgyvenamumo funkciją:

$$S^*(x) = \frac{\lambda^k}{(\int_0^x \mu_t dt + \lambda)^k} = \left(\frac{\lambda}{\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\alpha e^{\beta x} + 1}{\alpha + 1} \right) + \lambda} \right)^k = \left(\frac{\lambda \beta}{\ln \left(\frac{\alpha e^{\beta x} + 1}{\alpha + 1} \right) + \lambda \beta} \right)^k \quad (17)$$

Kannisto-Gamma mirtingumo galios išraiškai rasti belieka suskaičiuoti aukščiau pateiktos

funkcijos išvestinę, kuri yra lygi

$$(S^*(x))' = -\frac{\alpha\beta k e^{\beta x} (\lambda\beta)^k}{(\alpha e^{\beta x} + 1)(\ln\left(\frac{\alpha e^{\beta x} + 1}{\alpha + 1}\right) + \lambda\beta)^{k+1}}$$

ir pakartoti (13) formulėje atliktus veiksmus:

$$\mu_x = -\frac{(S^*(x))'}{S^*(x)} = \frac{\alpha\beta k e^{\beta x}}{(\alpha e^{\beta x} + 1)(\ln\left(\frac{\alpha e^{\beta x} + 1}{\alpha + 1}\right) + \lambda\beta)}. \quad (18)$$

3.0.3 Kannisto-Discrete/Uniform

Šiuos atveju atsitiktinį efektą Z nusakantis atsitiktinis dydis nusakomas formule:

$$P(Z = k) = \frac{1}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

Tada išgyvenamumo funkcija ieškoma naudojant (7) ir atrodo taip:

$$S^*(x) = E(e^{-Z \int_0^x \mu_t(z) dt}) = \frac{1}{N} e^{-\int_0^x \mu_t dt} + \frac{1}{N} e^{-2 \int_0^x \mu_t dt} + \dots + \frac{1}{N} e^{-N \int_0^x \mu_t dt} \quad (20)$$

Į aukščiau aprašytą funkciją vietoje μ_t įsistačius Kannisto mirtingumo galią gausime tokią išraišką:

$$S^*(x) = \frac{1}{N} \left(\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha e^{\beta x} + 1} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha e^{\beta x} + 1} \right)^{\frac{2}{\beta}} + \dots + \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha e^{\beta x} + 1} \right)^{\frac{N}{\beta}} \right) \quad (21)$$

Tada pažymėję $\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha e^{\beta x} + 1} \right)^{\frac{1}{\beta}} =: a$, kur $0 < a < 1$ gausime, kad $S^*(x)$ išreiškiama suma $\frac{1}{N} (a^1 + a^2 + \dots + a^N) = \frac{a}{N} (1 + a^1 + a^2 + \dots + a^{N-1})$. Pritaikę geometrinės progresijos narių sumos formulę, gauname lygybę:

$$\begin{aligned}
S^*(x) &= \frac{a}{N} \left(\frac{1 - a^N}{1 - a} \right) = \frac{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha e^{\beta x} + 1} \right)^{\frac{1}{\beta}}}{N} \left(\frac{1 - \left(\frac{\alpha+1}{\alpha e^{\beta x} + 1} \right)^{\frac{N}{\beta}}}{1 - \left(\frac{\alpha+1}{\alpha e^{\beta x} + 1} \right)^{\frac{1}{\beta}}} \right) \\
&= \frac{1}{N} \frac{(\alpha+1)^{\frac{1}{\beta}} \left((\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N}{\beta}} - (\alpha+1)^{\frac{N}{\beta}} \right)}{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N}{\beta}} \left((\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{1}{\beta}} - (\alpha+1)^{\frac{1}{\beta}} \right)} \\
&= \frac{1}{N} \frac{(\alpha+1)^{\frac{1}{\beta}} (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N}{\beta}} - (\alpha+1)^{\frac{N+1}{\beta}}}{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N+1}{\beta}} - (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N}{\beta}} (\alpha+1)^{\frac{1}{\beta}}}. \tag{22}
\end{aligned}$$

Kaip ir ankstesniuose modeliuose, toliau skaičiuojame gautosios išgyvenamumo funkcijos išvestinę:

$$\begin{aligned}
(S^*(x))' &= -\frac{1}{N} \left(\frac{\alpha e^{\beta x} (\alpha+1)^{\frac{1}{\beta}} (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{-\beta+2N+1}{\beta}} - (N+1) \alpha e^{\beta x} (\alpha+1)^{\frac{N+1}{\beta}} (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{-\beta+N+1}{\beta}} + N \alpha e^{\beta x} (\alpha+1)^{\frac{N+2}{\beta}} (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{-\beta+N}{\beta}}}{\left((\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N+1}{\beta}} - (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N}{\beta}} (\alpha+1)^{\frac{1}{\beta}} \right)^2} \right) \\
&= \left(\frac{-\alpha e^{\beta x} (\alpha+1)^{\frac{1}{\beta}} (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{-\beta+N}{\beta}}}{N} \right) \times \\
&\quad \times \left(\frac{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N+1}{\beta}} - (N-1) (\alpha+1)^{\frac{N}{\beta}} (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{1}{\beta}} + N (\alpha+1)^{\frac{N+1}{\beta}}}{\left((\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N+1}{\beta}} - (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N}{\beta}} (\alpha+1)^{\frac{1}{\beta}} \right)^2} \right). \tag{23}
\end{aligned}$$

Ir galiausiai gauname mirtingumo galios Kannisto - DU išraišką:

$$\begin{aligned}
\mu_x &= -\frac{(S^*(x))'}{S^*(x)} = \left(\frac{\alpha e^{\beta x} (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{-\beta+N}{\beta}}}{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N}{\beta}} - (\alpha + 1)^{\frac{N}{\beta}}} \right) \times \\
&\times \left(\frac{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N+1}{\beta}} - (N-1)(\alpha + 1)^{\frac{N}{\beta}} (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{1}{\beta}} + N(\alpha + 1)^{\frac{N+1}{\beta}}}{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N+1}{\beta}} - (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N}{\beta}} (\alpha + 1)^{\frac{1}{\beta}}} \right) \\
&= \left(\frac{\alpha e^{\beta x} (\alpha e^{\beta x} + 1)^{-1}}{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N}{\beta}} - (\alpha + 1)^{\frac{N}{\beta}}} \right) \times \\
&\times \left(\frac{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N+1}{\beta}} - (N-1)(\alpha + 1)^{\frac{N}{\beta}} (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{1}{\beta}} + N(\alpha + 1)^{\frac{N+1}{\beta}}}{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{1}{\beta}} - (\alpha + 1)^{\frac{1}{\beta}}} \right) \\
&= \left(\frac{-\alpha e^{-\beta x}}{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N}{\beta}} - (\alpha + 1)^{\frac{N}{\beta}}} \right) \times \\
&\times \left(\frac{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N+1}{\beta}} - (N-1)(\alpha + 1)^{\frac{N}{\beta}} (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{1}{\beta}} + N(\alpha + 1)^{\frac{N+1}{\beta}}}{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{1}{\beta}} - (\alpha + 1)^{\frac{1}{\beta}}} \right) \\
&= \left(\frac{(\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N+1}{\beta}} - (N-1)(\alpha + 1)^{\frac{N}{\beta}} (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{1}{\beta}} + N(\alpha + 1)^{\frac{N+1}{\beta}}}{\alpha e^{\beta x} \left((\alpha + 1)^{\frac{N}{\beta}} - (\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{N}{\beta}} \right) \left((\alpha e^{\beta x} + 1)^{\frac{1}{\beta}} - (\alpha + 1)^{\frac{1}{\beta}} \right)} \right). \quad (24)
\end{aligned}$$

3.0.4 Beard-Poisson

Jeï norime išvesti mirtingumo galios funkciją su atsitiktiniu efektu, aprašytu naudojant Poisson skirstinį: $Z \sim Poiss(\lambda)$, jau žinome, kad tokio modelio išgyvenimo funkcija įgyja pavidalą (10):

$$S^*(x) = e^{\lambda(e^{-\int_0^x \mu_t dt} - 1)} \quad (25)$$

Todėl norint išvesti Beard mirtingumo galios funkciją su atsitiktiniu efektu, pasiskirsčiusiu pagal Poisson dėsnį, belieka suintegruoti Beard μ_t jos reikšmių srityje ir įsistatyti į aukščiau pateiktą formulę:

$$\int_0^x \mu_t dt = \int_0^t \frac{\alpha e^{\beta t}}{1 + de^{\beta x}} dt = \frac{\alpha}{\beta d} (\ln(de^{\beta t} + 1) - \ln(d + 1)) = \frac{\alpha}{\beta d} \left(\ln \left(\frac{de^{\beta x} + 1}{d + 1} \right) \right) \quad (26)$$

Tuomet išgyvenamumo funkcija:

$$S^*(x) = e^{\lambda \left(e^{-\frac{\alpha}{\beta d} \ln \left(\frac{de^{\beta x} + 1}{d + 1} \right) - 1} \right)} = e^{\lambda \left(\left(\frac{d + 1}{de^{\beta x} + 1} \right)^{\frac{\alpha}{\beta d} - 1} \right)}, \quad (27)$$

o jos išvestinė lygi

$$(S^*(x))' = -S^*(x) \frac{\lambda \alpha e^{\beta x} (d + 1)^{\frac{\alpha}{\beta d}}}{(de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha + \beta d}{\beta d}}}. \quad (28)$$

Tada Beard-Poisson mirtingumo galia užrašoma kaip:

$$\mu_x = -\frac{(S^*(x))'}{S^*(x)} = \frac{\lambda \alpha e^{\beta x} (d + 1)^{\frac{\alpha}{\beta d}}}{(de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha + \beta d}{\beta d}}}. \quad (29)$$

3.0.5 Beard-Gamma

Kaip ir Kannisto mirtingumo galios su pagal Gamma skirstinį $Z \sim \Gamma(k, \lambda)$, pasiskirsčiusiu atsitiktiniu efektu, taip ir Beard atveju, šio modelio išgyvenamumo funkcija iš pradžių įgyja pavidalą, kurį jau išsivedėme (17):

$$S^*(x) = \frac{\lambda^k}{\left(\int_0^x \mu_t dt + \lambda \right)^k} \quad (30)$$

Todėl dabar belieka pasinaudoti jau suintegruota Beard mirtingumo galios funkcija (26) ir ją įsistatyti į aukščiau pateiktą formulę.

$$S^*(x) = \frac{\lambda^k}{\left(\frac{\alpha}{\beta d} \left(\ln \left(\frac{de^{\beta x} + 1}{d + 1} \right) \right) + \lambda \right)^k} = \left(\frac{\lambda \beta d}{\alpha \ln \left(\frac{de^{\beta x} + 1}{d + 1} \right) + \lambda \beta d} \right)^k \quad (31)$$

Kaip ir ankstesniuose modeliuose, mirtingumo galiai rasti skaičiuojame šios išgyvenamumo funkcijos išvestinę:

$$(S^*(x))' = -\frac{\alpha k \lambda^k e^{\beta x} \beta^{k+1} d^{k+1}}{(de^{\beta x} + 1) \left(\alpha \ln \left(\frac{de^{\beta x} + 1}{d+1} \right) + \lambda \beta d \right)^{k+1}} \quad (32)$$

Galiausiai Beard-Gamma mirtingumo galia įgyja tokį pavidalą:

$$\mu_x = -\frac{(S^*(x))'}{S^*(x)} = \frac{\alpha \beta d k e^{\beta x}}{(de^{\beta x} + 1) \left(\alpha \ln \left(\frac{de^{\beta x} + 1}{d+1} \right) + \lambda \beta d \right)}. \quad (33)$$

3.0.6 Beard-Discrete/Uniform

Jau žinome, kad naudojant DU a.d. kaip atsitiktinį efektą, išgyvenamumo funkcija įgyja pavidalą

$$S^*(x) = \frac{e^{-a}}{N} \left(\frac{1 - e^{-aN}}{1 - e^{-a}} \right),$$

kur $N \in \mathbb{N}$, o $a > 0$ - bet kuri savo reikšmių srityje suintegruota analizinė mirtingumo galia.

Todėl Beard atveju gauname:

$$\begin{aligned} S^*(x) &= \frac{1}{N} \left(e^{-\frac{\alpha}{\beta d} \left(\ln \left(\frac{de^{\beta x} + 1}{d+1} \right) \right)} \right) \left(\frac{1 - e^{-\frac{N\alpha}{\beta d} \left(\ln \left(\frac{de^{\beta x} + 1}{d+1} \right) \right)}}{1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta d} \left(\ln \left(\frac{de^{\beta x} + 1}{d+1} \right) \right)}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\frac{d+1}{de^{\beta x} + 1} \right)^{\frac{\alpha}{\beta d}} \left(\frac{\left(1 - \frac{d+1}{de^{\beta x} + 1} \right)^{\frac{\alpha N}{\beta d}}}{1 - \left(\frac{d+1}{de^{\beta x} + 1} \right)^{\frac{\alpha}{\beta d}}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \frac{(d+1)^{\frac{\alpha}{\beta d}} \left((de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha N}{\beta d}} - (d+1)^{\frac{\alpha N}{\beta d}} \right)}{(de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha N}{\beta d}} \left((de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha}{\beta d}} - (d+1)^{\frac{\alpha}{\beta d}} \right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{(d+1)^{\frac{\alpha}{\beta d}} (de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha N}{\beta d}} - (d+1)^{\frac{\alpha(N+1)}{\beta d}}}{(de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha(N+1)}{\beta d}} - (d+1)^{\frac{\alpha}{\beta d}} (de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha N}{\beta d}}}. \quad (34)$$

Šios funkcijos išvestinė:

$$(S^*(x))' = -\frac{1}{N} \left(\frac{\alpha e^{\beta x} (d+1)^{\frac{\alpha}{\beta d}} (de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha N}{\beta d}}}{N (de^{\beta x} + 1)} \right) \times \\ \times \left(\frac{(de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha(N+1)}{\beta d}} - (N+1)(d+1)^{\frac{\alpha N}{\beta d}} (de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha}{\beta d}} + N(d+1)^{\frac{\alpha(N+1)}{\beta d}}}{\left((de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha(N+1)}{\beta d}} - (d+1)^{\frac{\alpha}{\beta d}} (de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha N}{\beta d}} \right)^2} \right) \quad (35)$$

Tuomet Beard mirtingumo galia su atsitiktiniu efektu, išreikštu per diskretųjį-tolydųjį atsitiktinį dydį įgys pavidalą:

$$\mu_x = -\frac{(S^*(x))'}{S^*(x)} = \left(\frac{\alpha e^{\beta x} (d+1)^{\frac{\alpha}{\beta d}}}{(de^{\beta x} + 1)} \right) \times \\ \times \left(\frac{(de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha(N+1)}{\beta d}} - (N+1)(d+1)^{\frac{\alpha N}{\beta d}} (de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha}{\beta d}} + N(d+1)^{\frac{\alpha(N+1)}{\beta d}}}{(de^{\beta x} + 1)^{\frac{\alpha}{\beta d}} - (d+1)^{\frac{\alpha}{\beta d}}} \right). \quad (36)$$

3.0.7 Siler-Poisson

Norint apskaičiuoti Siler mirtingumo galios (4) analizinę išraišką su atsitiktiniu efektu, išreikštu Poisson dėsnium, naudosime jau anksčiau aprašytos išgyvenamumo funkcijos pavidalą

$$S^*(x) = \int_0^\infty e^{-\int_0^x \mu_t |z| dt} f_Z(z) dz,$$

kuris kai $Z \sim Poiss(\lambda)$ tampa paprastu

$$S^*(x) = e^{\lambda(e^{-\int_0^x \mu_t dt} - 1)}.$$

Todėl tolimesniems skaičiavimams atlikti turime suintegruoti Siler μ_x funkciją jos reikšmių srityje, kurią vėliau statysime $S^*(x)$ išraišką

$$\int_0^x \mu_t dt = \int_0^x \alpha_1 e^{-\beta_1 t} + \alpha_2 e^{\beta_2 t} + c dt = -\frac{\alpha_1 (e^{-\beta_1 x} - 1)}{\beta_1} + \frac{\alpha_2 (e^{\beta_2 x} - 1)}{\beta_2} + cx. \quad (37)$$

$$S^*(x) = e^{\lambda e^{-\left(-\frac{\alpha_1 (e^{-\beta_1 x} - 1)}{\beta_1} + \frac{\alpha_2 (e^{\beta_2 x} - 1)}{\beta_2} + cx\right)}} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{\frac{\alpha_1 (e^{-\beta_1 x} - 1)}{\beta_1} - \frac{\alpha_2 (e^{\beta_2 x} - 1)}{\beta_2} - cx}}. \quad (38)$$

$$\begin{aligned} (S^*(x))' &= \lambda \left(-\alpha_1 e^{-\beta_1 x} - \alpha_2 e^{\beta_2 x} - c \right) e^{-\lambda + \lambda e^{\frac{\alpha_1 (e^{-\beta_1 x} - 1)}{\beta_1} - \frac{\alpha_2 (e^{\beta_2 x} - 1)}{\beta_2} - cx}} \times \\ &\times e^{\frac{\alpha_1 (e^{-\beta_1 x} - 1)}{\beta_1} - \frac{\alpha_2 (e^{\beta_2 x} - 1)}{\beta_2} - cx} \end{aligned} \quad (39)$$

Gautosios išraiškos gana sudėtingos, todėl prastinimo veiksams atlikti įveskime keletą pažymėjimų:

- 1) $y := \frac{\alpha_1 (e^{-\beta_1 x} - 1)}{\beta_1} - \frac{\alpha_2 (e^{\beta_2 x} - 1)}{\beta_2} - cx$;
- 2) $w := (\alpha_1 e^{-\beta_1 x} + \alpha_2 e^{\beta_2 x} + c)$;

Tada $S^*(x) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^y}$, o šios funkcijos išvestinė bus lygi

$$(S^*(x))' = -w \lambda e^{-\lambda + \lambda e^y + y} = -w \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda e^y} e^y.$$

Toliau skaičiuojame Siler - Poisson mirtingumo galią:

$$\mu_x = -\frac{(S^*(x))'}{S^*(x)} = -\frac{-w \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda e^y} e^y}{e^{-\lambda} e^{\lambda e^y}} = w \lambda e^y \quad (40)$$

Sugrįžus prie pažymėjimų ir juos įsistačius į aukščiau gautą lygtį gauname Siler mirtinumo galios analizinę funkciją su atsitiktiniu Poisson efektu:

$$\mu_x = \lambda(\alpha_1 e^{-\beta_1 x} + \alpha_2 e^{\beta_2 x} + c) e^{\frac{\alpha_1(e^{-\beta_1 x} - 1)}{\beta_1} - \frac{\alpha_2(e^{\beta_2 x} - 1)}{\beta_2} - cx}. \quad (41)$$

3.0.8 Siler-Gamma

Kaip ir ankstesniuose modeliuose, kur atsitiktinis efektas Z yra išreiškiamas kaip $Z \sim \Gamma(k, \lambda)$, naudosime (17) išvestą išgyvenamumo funkcijos pavidalą bei (37) suintegruotą Siler analizinę funkciją. Todėl:

$$\begin{aligned} S^*(x) &= \frac{\lambda^k}{\left(\int_0^x \mu_t dt + \lambda\right)^k} = \frac{\lambda^k}{\left(-\frac{\alpha_1(e^{-\beta_1 x} - 1)}{\beta_1} + \frac{\alpha_2(e^{\beta_2 x} - 1)}{\beta_2} + cx + \lambda\right)^k} \\ &= \frac{\lambda^k (\beta_1 \beta_2)^k}{\left(-\alpha_1 \beta_2 (e^{-\beta_1 x} - 1) + \alpha_2 \beta_1 (e^{\beta_2 x} - 1) + cx \beta_1 \beta_2 + \lambda \beta_1 \beta_2\right)^k} \end{aligned} \quad (42)$$

O šios išgyvenamumo funkcijos išvestinė atrodys taip:

$$(S^*(x))' = -\frac{k \lambda^k (\beta_1 \beta_2)^{k+1} (\alpha_1 e^{-\beta_1 x} + \alpha_2 e^{\beta_2 x} + c)}{\left(-\alpha_1 \beta_2 (e^{-\beta_1 x} - 1) + \alpha_2 \beta_1 (e^{\beta_2 x} - 1) + cx \beta_1 \beta_2 + \lambda \beta_1 \beta_2\right)^{k+1}} \quad (43)$$

Tuomet gauname Siler mirtingumo galios analizinę funkciją su atsitiktiniu efektu, išreikštu kaip Gamma a.d.:

$$\mu_x = -\frac{(S^*(x))'}{S^*(x)} = -\frac{k \beta_1 \beta_2 (\alpha_1 e^{-\beta_1 x} + \alpha_2 e^{\beta_2 x} + c)}{-\alpha_1 \beta_2 (e^{-\beta_1 x} - 1) + \alpha_2 \beta_1 (e^{\beta_2 x} - 1) + \beta_1 \beta_2 (cx + \lambda)}. \quad (44)$$

3.0.9 Siler-Discrete/Uniform

Kaip jau buvo išvesta 3.0.6 poskyrio pradžioje, Siler išgyvenamumo funkcija su diskrečiuojamuoju tolydžiuoju a.d. bei jos išvestinė bus randama atitinkamai:

$$\begin{aligned}
S^*(x) &= \frac{e^{-a}}{N} \left(\frac{1 - e^{-aN}}{1 - e^{-a}} \right) = \frac{1}{N} \left(e^{\left(\frac{\alpha_1(e^{-\beta_1 x - 1})}{\beta_1} - \frac{\alpha_2(e^{\beta_2 x - 1})}{\beta_2} - cx \right)} \right) \times \\
&\times \left(\frac{1 - e^{N \left(\frac{\alpha_1(e^{-\beta_1 x - 1})}{\beta_1} - \frac{\alpha_2(e^{\beta_2 x - 1})}{\beta_2} - cx \right)}}{1 - e^{\left(\frac{\alpha_1(e^{-\beta_1 x - 1})}{\beta_1} - \frac{\alpha_2(e^{\beta_2 x - 1})}{\beta_2} - cx \right)}} \right). \tag{45}
\end{aligned}$$

Norint palengvinti šios sudėtingos išraiškos išvestinės skaičiavimus įsiveskime pažymėjimą:

$$A1) \ r := \frac{\alpha_1(e^{-\beta_1 x - 1})}{\beta_1} - \frac{\alpha_2(e^{\beta_2 x - 1})}{\beta_2} - cx, \text{ o šios išraiškos išvestinė:}$$

$$A2) \ r' := \frac{dr}{dx} = -\alpha_1 e^{-\beta_1 x} - \alpha_2 e^{\beta_2 x} + c.$$

Tuomet 45 formulė įgys pavidalą:

$$S^*(x) = \frac{1}{N} \frac{e^r - e^{r(N+1)}}{1 - e^r}, \tag{46}$$

o išvestinė su žymėjimais atrodys kaip:

$$\begin{aligned}
(S^*(x))' &= \frac{1}{N} \frac{e^r - e^{r(N+1)}}{1 - e^r} = \frac{1}{N} \frac{(e^r - e^{r(N+1)})'(1 - e^r) - (e^r - e^{r(N+1)})(1 - e^r)'}{(1 - e^r)^2} \\
&= -\frac{1}{N} \frac{r'(-e^r + (N+1)e^{r(N+1)} - Ne^{r(N+2)})}{(1 - e^r)^2}. \tag{47}
\end{aligned}$$

Tada Siler mirtingumo galios analizinė funkcija su DU atsitiktiniu efektu, įgyją tokį pavidalą:

$$\begin{aligned}
\mu_x &= -\frac{(S^*(x))'}{S^*(x)} = \frac{r'(-e^r + (N+1)e^{r(N+1)} - Ne^{r(N+2)})}{(1-e^r)(e^r - e^{r(N+1)})} \\
&= \frac{(r'(-1 + (N+1)e^{rN} - Ne^{r(N+1)}))}{1 - e^r - e^{rN} + e^{r(N+1)}}, \tag{48}
\end{aligned}$$

kur pažymėjimai r ir r' nusakyti A1 bei A2 lygybėmis.

4 Mirtingumo modelių su atsitiktiniu efektu taikymas

4.0.1 Naudojami duomenys ir prielaidos

Norėdami palyginti empirinį teorinėje dalyje išnagrinėtų mirtingumo modelių tinkamumą, nusprendėme palyginti šiuos modelius trijose skirtingą socialinį bei ekonominį išsivystymą turinčiose Europos šalyse - Šveicarijoje, Lietuvoje bei Ukrainoje. Remiantis naujausiu 2018 metais Jungtinių Tautų sudarytu žmogaus socialinės raidos indeksu ¹ - bendras rodiklis, kuriuo matuojama visų pasaulio valstybių gyventojų vidutinė gyvenimo trukmė, raštingumo lygis, švietimo lygis ir pragyvenimo lygis, Šveicarija tarp viso pasaulio valstybių užėmė 2 vietą, Lietuva - 35-ą, o Ukraina 88-ą vietą [13].

Toliau šioje darbo dalyje naudojant Beard, Kannisto ir Siler mirtingumo modelius su atsitiktiniu efektu, išreikštu Poisson, Gamma arba Discrete-Uniform a.d., R (x64 3.6.1) skaičiuoklės pagalba apskaičiuosime nežinomų parametrų įverčius, atitinkančius naujausius pateiktus šalių mirtingumo lentelių duomenis. Šveicarijos atveju naudosime 2016 metų, Lietuvos 2017, o Ukrainos 2013 mirtingumo lentelių duomenis iš internetinės žmonių mirtingumo duomenų bazės „Human Mortality Database“ [11]. Ši bazė buvo sukurta 2000 metais bendradarbiaujant Kalifornijos Universiteto (JAV) bei Max Planck Demografijos tyrimų instituto (Vokietija) tyrėjams. Verta paminėti, kad dėl aktuarinio tikslumo mirtingumo lentelės vyrų ir moterų populiacijoms yra sudaromos atskirai ir dėl pastebimai trumpesnės lauktinės vyrų gyvenimo trukmės gana skiriasi, tačiau šiame darbe į lyčių lauktinės gyvenimo trukmės skirtumus atsižvelgiama nebus ir bus naudojamos bendra visos šalies populiacijos mirtingumo lentelė. Parametrų įverčiams rasti naudosime R paketo *MortalityLaws* funkciją, kurios pagalba mažiausių kvadratų metodu koreguojant modelio parametrų reikšmes, rasime kreivę, geriausiai atspindinčią pasirinktų šalių mirtingumo lentelių duomenis.

Mūsų tiriamos mirtingumo galios μ_x reikšmės mirtingumo lentelėse paprastai nėra pateikiamos, tačiau jas galima įvertinti naudojant aktuarinėje matematikoje plačiai taikomą pastovios mirtingumo galios (eksponentinio interpoliavimo) prielaidą. Mirtingumo lentelėse pateikiamos funkcijos l_x (asmenų skaičius iš pradinės kohortos, kurie sulaukė x -ojo amžiaus) reikšmės taškuose $x = 0, 1, 2, \dots, \omega$, kur ω – maksimalus amžius, kurio gali sulaukti indivi-

¹(*angl.* Human Development Index, HDI)

das. Jei norime įvertinti funkcijos l_{x+s} reikšmę, kur $0 < s < 1$, reikia naudoti prielaidą apie funkcijos l_{x+s} formą [9]. Šiuo atveju laikoma, kad funkcijos l_{x+s} forma intervale $[x, x+1)$ yra eksponentinė, todėl daroma prielaida, jog:

$$l_{x+s} = (l_{x+s})^s (l_s)^{1-s}.$$

Be to, yra žinoma [9], kad:

$$\mu_{x+s} = \frac{-\frac{d}{ds} l_{x+s}}{l_{x+s}} = \frac{-\frac{d}{ds} l_x(p_x)^s}{l_x(p_x)^s} = \frac{-l_x(p_x)^s \ln(p_x)}{l_x(p_x)^s} = -\ln(p_x), \quad (49)$$

kur $p_x - x$ amžiaus individo tikimybė išgyventi vienerius metus, t.y. sulaukti amžiaus $x+1$.

Iš (49) gauname, kad mirtingumo galia μ_{x+s} , kur $0 < s < 1$, nepriklauso nuo s . Todėl:

$$\mu_{x+s} = -\ln(p_x) = \mu_x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Kadangi mirtingumo galia amžiuje $x+s$, kur $0 < s < 1$ yra lygi mirtingumo galiai amžiuje x , galime teigti, kad mirtingumo galia amžiaus intervale $[x, x+1)$ yra pastovi.

Naudojant mirtingumo lentelėse pateiktą tikimybę, kad (x) mirs per artimiausius metus (q_x) , galime rasti tikimybę, kad (x) išgyvens dar bent vienerius metus (p_x) pagal žinomą šių dviejų dydžių sąsają:

$$p_x = 1 - q_x,$$

čia dydis q_x yra pateikiamas anksčiau minėtoje žmonių mirtingumo duomenų bazėje („Human Mortality Database“). Taigi, taikant šias aproksimacijas, nesunkiai galime išreikšti mirtingumo galią μ_x , kurią naudosime įvertinant nežinomus modelių parametrus:

$$\mu_x = -\ln(1 - q_x).$$

Teorinėje dalyje išvestų mirtingumo modelių parametrų radimo bei paklaidų skaičiavimo R kodą galima rasti **Priede A**, o visų trijų šalių naudotus mirtingumo lentelių duomenis - prie **Priede B**.

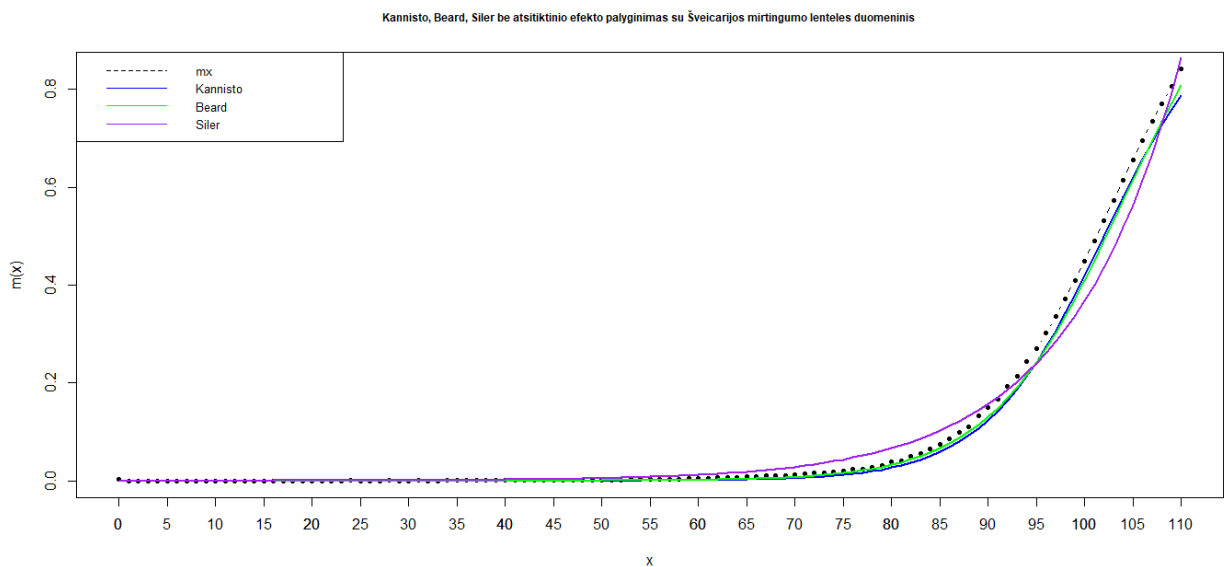
4.0.2 Modelių praktinis taikymas bei lyginimas

Teorinėje dalyje išvestų modelių tinkamumą matuosime naudodamiesi šaknies iš vidutinės kvadratinės paklaidos (MSE, *angl.* Mean Squared Error) koeficientu, kuris mūsų tiriamu atveju atrodys taip:

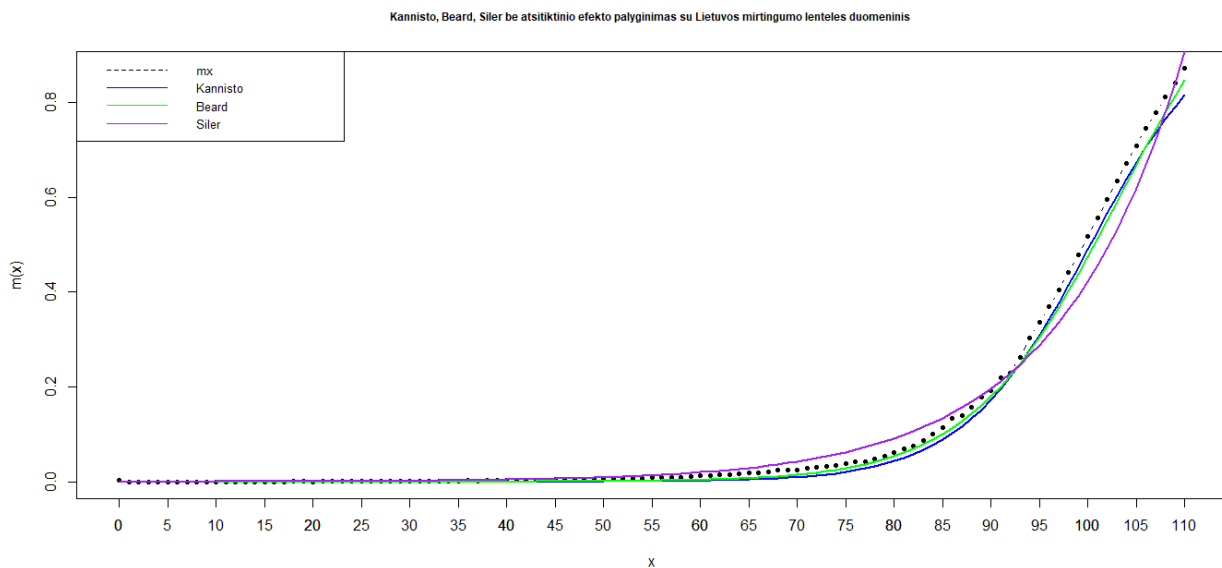
$$paklaida = \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{1}{111} \sum_{i=0}^{110} (\hat{\mu}_i - \mu_i)^2}. \quad (50)$$

Čia amžiaus imtis $[0;110]$ ir $\hat{\mu}_i$ – Beard, Kannisto bei Siler modelių prognozuojama mirtingumo galia i – tajame kohortos amžiuje, o μ_i – reali mirtingumo galia i – tajame amžiuje (iš mirtingumo lentelės). Kuo mažesnė paklaida - tuo modelis tinkamesnis tiriamai populiacijai (mūsų atveju šaliai).

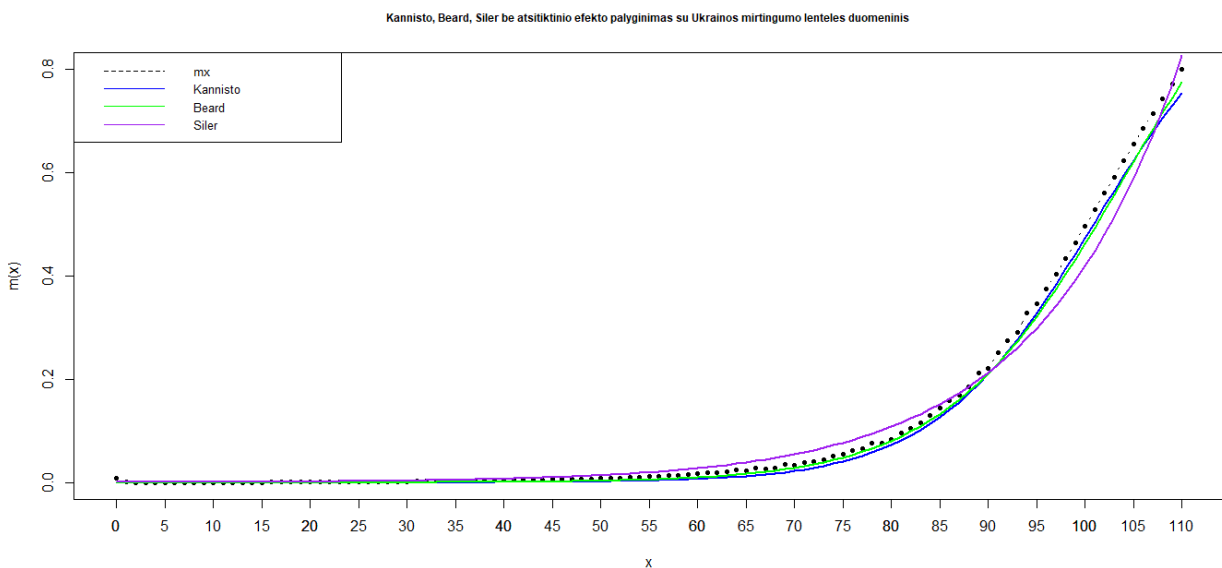
Visų pirma, apskaičiuokime ir nubrėžkime mūsų tirtų - Beard, Kannisto bei Siler - mirtingumo galių analizes išraiškas be atsitiktinio efekto, t.y. kai 5 lygybėje $Z = 1$.



1 pav.: Kannisto, Beard, Siler be atsitiktinio efekto palyginimas su mirtingumo lentelės duomenimis. Šveicarija.



2 pav.: Kannisto, Beard, Siler be atsitiktinio efekto palyginimas su mirtingumo lentelės duomenimis. Lietuva.



3 pav.: Kannisto, Beard, Siler be atsitiktinio efekto palyginimas su mirtingumo lentelės duomenimis. Ukraina.

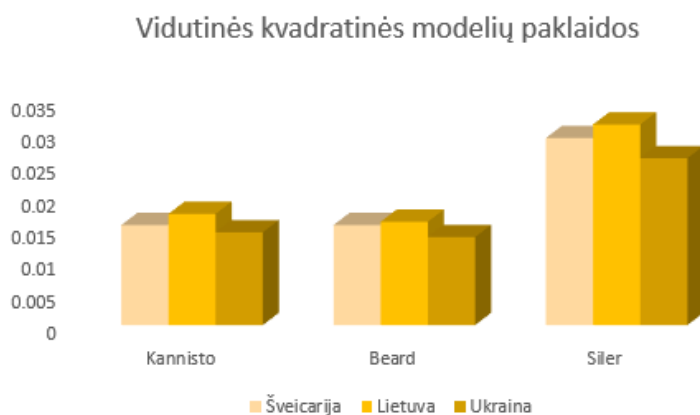
Šių analizinių funkcijų parametrai pateikiami 1 lentelėje, o paklaidos, apskaičiuotos pagal 50 formulę, pateikiamos 2 lentelėje:

Šalis	Modelis	α	β	c	d	f	λ	k
Šveicarija	Kannisto	5.922790e-08	0.1631636	-	-	-	-	-
	Beard	2.665544e-07	0.1469123	-	2.342844e-07	-	-	-
	Siler	1.006220e-04	0.00348912	5.289037e-09	7.198936e-05	0.08538915	-	-
Lietuva	Kannisto	2.313084e-07	0.1523782	-	-	-	-	-
	Beard	1.484934e-06	0.1318754	-	1.255086e-06	-	-	-
	Siler	5.038595e-08	13.69802	6.440859e-08	2.045577e-04	0.07633244	-	-
Ukraina	Kannisto	4.509947e-06	0.1220523	-	-	-	-	-
	Beard	1.473640e-05	0.1085180	-	1.246432e-05	-	-	-
	Siler	1.080167e-06	0.9587644	2.508555e-09	4.778641e-04	0.06777693	-	-

1 lentelė: Analizinių mirtingumo galių be atsitiktinės mirtingumo galios parametrai tiriamų šalių duomenims.

Modelis	Šveicarija	Lietuva	Ukraina
Kannisto	0.0155443	0.01728677	0.01441622
Beard	0.01556208	0.01606858	0.01367742
Siler	0.02908126	0.03118762	0.02593324

2 lentelė: Modelių prognozių tikslumo paklaidos. Paryškintos mažiausios paklaidos kiekvieni šaliai pagal modelį.

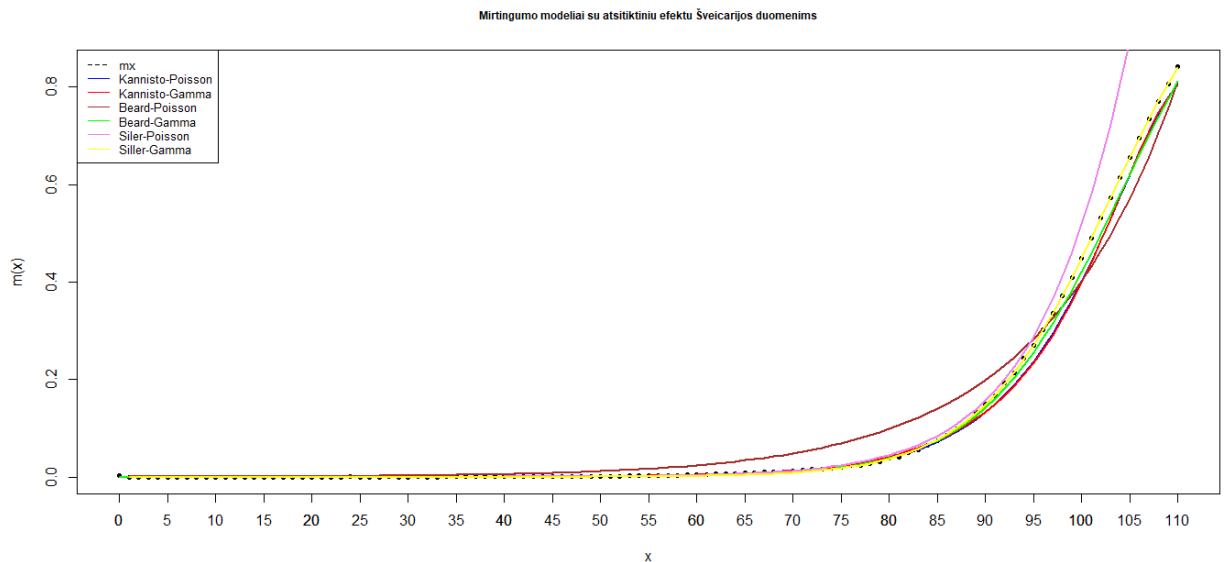


4 pav.: Pasirinktų modelių be atsitiktinio efekto tikslumo stulpelinė diagrama visoms tirtoms šalims

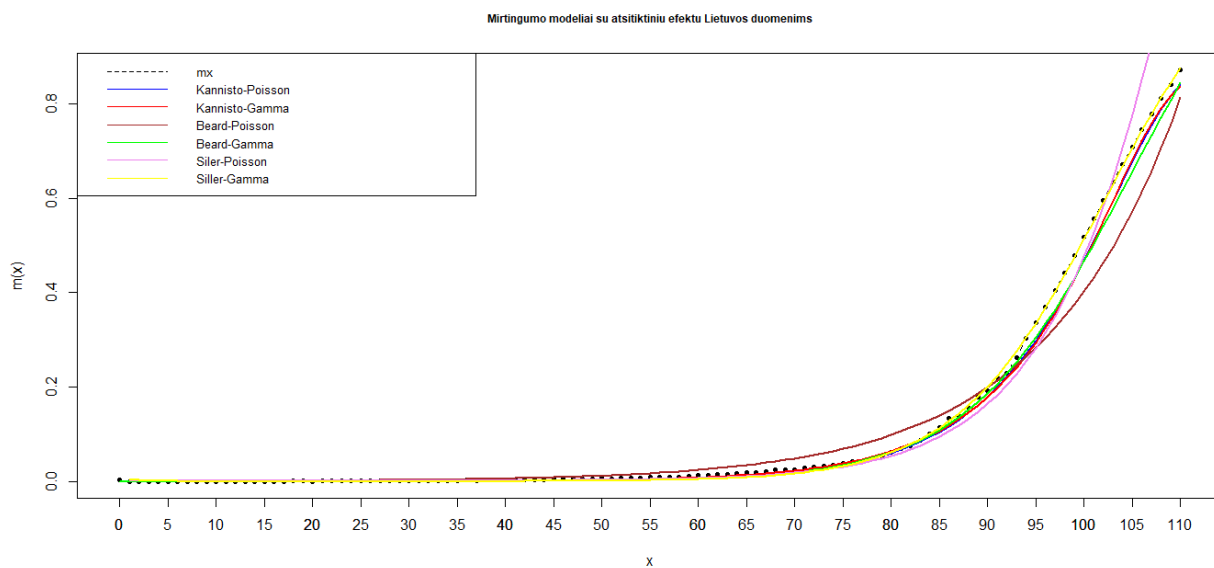
Kaip galima pamatyti tiek iš grafikų, tiek iš aukščiau pateiktos paklaidų lentelės bei grafiko, visi pasirinkti modeliai gana neblogai padengia empirinius Šveicarijos, Lietuvos bei Ukrainos šalių mirtingumo lentelių duomenis. Prasčiausiai empirinius duomenis atvaizduoja Siler mirtingumo galia, kuri visose šalyje nuo maždaug 60 iki 90 metų pervertina populiacijos mirtingumą, o amžiaus intervale nuo ~ 100 metų kaip tik nepakankamai įvertina mirtingumo

vyresniuose amžiuose augimą. Tuo tarpu mažiausia paklaida susidaro realizuojant Kannisto bei Beard analizes mirtingumo galias be atsitiktinio efekto.

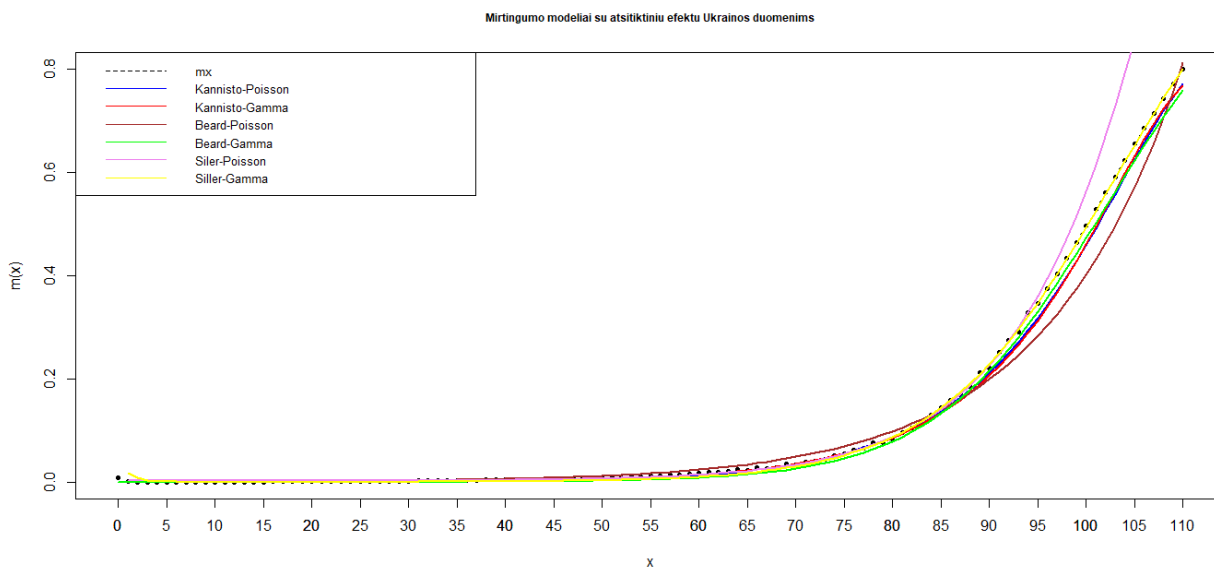
Toliau šiame darbe tokiu pat principu kaip ir modeliams be atsitiktinio efekto, taip ir su, rasime analizes kiekvienos funkcijos išraiškas, jų parametrus, išbrėšime grafikus kiekvienai šaliai atskirai, bei palyginsime, kuris modelis atvaizduoja mirtingumo lentelės duomenis tiksliausiai pasinaudojus vidutine kvadratine paklaida.



5 pav.: Kannisto, Beard, Siler mirtingumo modelių su atsitiktiniu efektu palyginimas su mirtingumo lentelės duomenimis. Šveicarija.



6 pav.: Kannisto, Beard, Siler mirtingumo modelių su atsitiktiniu efektu palyginimas su mirtingumo lentelės duomenimis. Lietuva.



7 pav.: Kannisto, Beard, Siler mirtingumo modelių su atsitiktiniu efektu palyginimas su mirtingumo lentelės duomenimis. Ukraina.

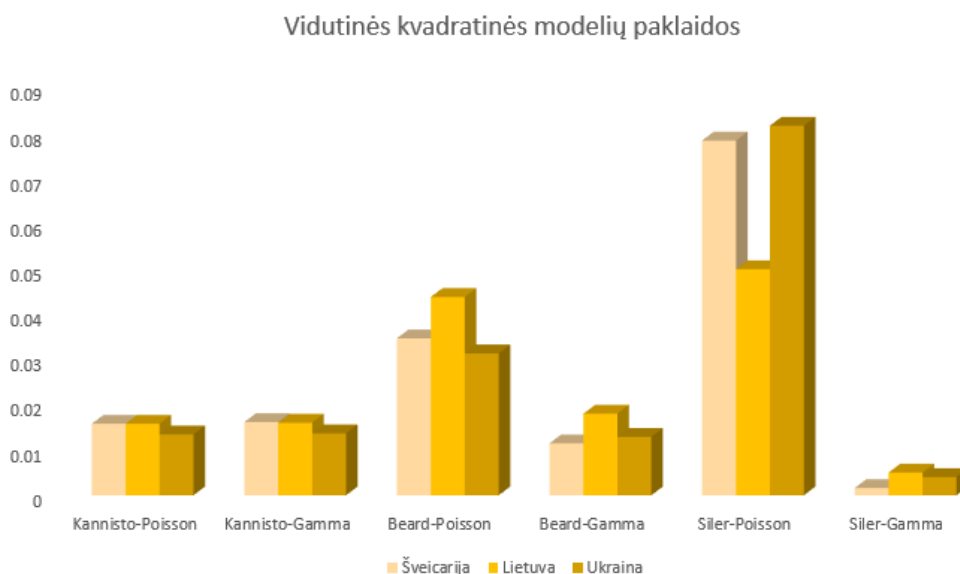
Šių analizinių funkcijų parametrai pateikiami 3 lentelėje, o paklaidos, apskaičiuotos pagal 50 formulę, pateikiamos 4 lentelėje:

Šalis	Modelis	α	β	c	d	f	λ	k
Šveicarija	Kannisto-Poisson	7.903190e-08	0.1273798	-	-	-	18.88420	-
	Kannisto-Gamma	5.904403e-07	0.1158751	-	-	-	0.4626617	3.113756
	Beard-Poisson	3.637590e-06	0.07030941	-	1.262824e-07	-	97.74864	-
	Beard-Gamma	4.105860e-06	0.1398855	-	8.483367e-10	-	61.78741	8.330361
	Siler-Poisson	3.611047e-01	6.413563	3.739184e-04	6.776616e-08	0.1307959	18.73968	-
	Siler-Gamma	6.854784e-03	0.1739655	4.349336e-05	3.870882e-06	0.1469658	97.42247	7.736830
Lietuva	Kannisto-Poisson	3.003087e-07	0.1146256	-	-	-	21.58975	-
	Kannisto-Gamma	1.462709e-06	0.1038989	-	-	-	0.2253297	2.419851
	Beard-Poisson	3.637590e-06	0.07030941	-	1.262824e-07	-	97.74864	-
	Beard-Gamma	1.152778e-05	0.1206452	-	1.366462e-09	-	29.37546	10.69899
	Siler-Poisson	6.244372e-04	4.005294	7.820908e-05	3.585985e-07	0.1144094	20.50379	-
	Siler-Gamma	2.882144e-02	0.464976	6.279777e-05	6.372679e-06	0.1321826	34.46682	8.927892
Ukraina	Kannisto-Poisson	1.899274e-06	0.09467437	-	-	-	24.77680	-
	Kannisto-Gamma	8.676173e-06	0.08883866	-	-	-	0.3942224	3.213940
	Beard-Poisson	3.637590e-06	0.07030941	-	1.262824e-07	-	97.74864	-
	Beard-Gamma	2.014016e-05	0.1153179	-	8.504575e-10	-	21.83180	9.123173
	Siler-Poisson	3.080208e-05	15.81606	1.089373e-04	1.530784e-06	0.09901767	22.16131	-
	Siler-Gamma	4.058282e-02	0.7612819	9.090697e-05	1.503071e-05	0.1103852	11.35700	10.49786

3 lentelė: Analizinių mirtingumo galių be atsitiktinės mirtingumo galios parametrai tiriamų šalių duomenims.

Modelis	Šveicarija	Lietuva	Ukraina
Kannisto-Poisson	0.015792915	0.015820950	0.013445998
Kannisto-Gamma	0.016163667	0.016033265	0.013682863
Beard-Poisson	0.034678354	0.043807365	0.031345398
Beard-Gamma	0.011488259	0.018026103	0.012916609
Siler-Poisson	0.07835095	0.04994421	0.081643238
Siler-Gamma	0.001616745	0.005034256	0.004051926

4 lentelė: Modelių prognozių tikslumo paklaidos. Paryškintos mažiausios paklaidos kiekvienai šaliai pagal modelį.



8 pav.: Išvestų modelių tikslumo paklaidų stulpelinė diagrama visoms tirtoms šalims.

Akivaizdu, kad iš pateiktų grafikų bei paklaidų galime pastebėti keletą bendrų tendencijų, tokių kaip:

1. Pradėjus praktiškai taikyti teorinėje dalyje išvestus devynis modelius paaiškėjo, kad mirtingumo modeliai, kuriuose atsitiktinis efektas buvo išreikštas per Diskretųjį - Tolydųjį a.d. turi ne tik labai nepraktiškas ir sunkiai praktikoje taikomas išraiškas, tačiau ir Kannisto, Beard bei Siler mirtingumo modeliai su šiuo atsitiktiniu dydžiu praranda standartinę mirtingumo galios kreivės formą. Dėl šios priežasties praktinėje dalyje šie modeliai nebuvo aptariami. Žinant šią informaciją galime formuluoti vieną pirmųjų šio tyrimo išvadų, kad ne visi atsitiktiniai dydžiai tinka išreikšti atsitiktinį efektą.
2. Kaip galima matyti iš pateiktų tyrimo rezultatų, kiti du pasirinkti atsitiktiniai dydžiai - Poisson bei Gamma - yra tinkami išreikšti atsitiktinį efektą ir kartu su Kannisto, Beard bei Siler mirtingumo galių funkcijomis gana tiksliai padengia pasirinktų šalių mirtingumo lentelių duomenis, ypač amžiaus intervale nuo gimimo iki 50 metų.
3. Tiriant gautus vidutinių kvadratinių paklaidų rezultatus galima pastebėti, kad nors ir visų šešių tirtų mirtingumo modelių analizinės išraiškos gerai padengia pasirinktų šalių mirtingumo duomenis, tačiau modeliai, kuriuose atsitiktinis efektas išreiškiamas per Gamma skirstinį, yra tikslesni, t.y. paklaidos nuo empirinių duomenų yra mažesnės, nei modelių su Poisson a.d.
4. Prasčiausiai visose pasirinktose šalyse mirtingumo lentelės duomenis padengia Siler - Poisson mirtingumo galia: vyresniuose amžiuose (nuo ~ 90 - 95 metų) šis modelis gana smarkiai pervertina populiacijos mirtingumą. Taip pat gana netiksliai prognozuoja ir Beard - Poisson mirtingumo modelis, kuris visose šalyse amžiaus intervale (nuo ~ 60 - 90 metų) pervertina populiacijos mirtingumą, o pačiuose vyriausiuose amžiuose (virš ~ 100 metų) nepakankamai atspindi staigų mirtingumo galios kreivės augimą.
5. Geriausiai mūsų pasirinktų šalių mirtingumo lentelės duomenis atvaizduoja Siler - Gamma mirtingumo modelis. Šio modelio paklaida kiekvienoje šalyje nuo penkių iki dešimties kartų mažesnė nei kitų modelių.

6. Daryti bendros išvados, kad mirtingumo modeliai su atsitikiniu efektu tiksliau nusako pasirinktų populiacijų mirtingumo kreives nei be atsitiktinio efekto negalime, tačiau iš mūsų tirtu atveju akivaizdu, kad Kannisto - Gamma bei Beard - Gamma modeliai niekuo nenusileidžia Kannisto ir Beard modeliams, kai $Z = 1$, o Gamma atsitiktinis efektas smarkiai patikslino Siler mirtingumo modelį.
7. Nors ir buvo pasirinktos skirtingos ekonominio išsivystymo šalys, tyrimo pradžioje daryta prielaida, kad skirtingą mirtingumo kreivę turinčioms šalims gali labiau tikti kuris nors specifinis modelis, turime atmesti.

5 Išvados ir rekomendacijos

Pastaraisiais metais publikuojama vis daugiau specialistų darbų apie tai, kaip klasikiniai analiziniai mirtingumo modeliai neatsižvelgia į populiacijos individų heterogeniškumą ir apie šios problemos svarbą skaičiuojant finansinių institucijų ateities įsipareigojimų, susijusių su jų klientų ilgaamžiškumu, jautrumą. Dėl šios priežasties šiame darbe buvo pasirinkti trys klasikiniai skirtingi mirtingumo modeliai (Kannisto, Beard ir Siler) ir jiems pritaikytas atsitiktinis efektas, išreikštas kaip Poisson, Gamma bei Discrete/Uniform atsitiktiniai dydžiai.

Teorinėje dalyje išvedus devynis (Kannisto - Poisson, Kannisto - Gamma, Kannisto - Discrete/Uniform, Beard - Poisson, Beard - Gamma, Beard - Discrete/Uniform, Siler - Poisson, Siler - Beard bei Siler - Discrete/Uniform) naujus populiacijos mirtingumo modelius su atsitiktiniu efektu, šie modeliai buvo pritaikyti pasirinktų šalių mirtingumo lentelių duomenims. Gauti praktiniai rezultatai parodė, kad priešingai nei Poisson ir Gamma, Diskretusis/Tolydusis atsitiktinis dydis nėra tinkamas atsitiktiniam efektui išreikšti. Taip pat buvo pastebėta, kad vieni analiziniai modeliai padengia empirinius pasirinktų šalių mirtingumo lentelių duomenis geriau nei kiti - tarp tokių galima išskirti Siler - Gamma modelį, kurio vidutinė kvadratinė paklaida žymiai mažesnė nei kitų modelių su atsitiktiniu efektu, bei standartinio Siler mirtingumo modelio be atsitiktinio efekto.

Tolimesni darbai bei analizės panašia tematika galėtų nagrinėti kitų klasikinių modelių tinkamumą su mūsų pasirinktais skirstiniais arba bandyti pritaikyti ir kitus atsitiktinius dydžius atsitiktiniam efektui išreikšti. Kadangi dauguma mūsų tirtų modelių vienodai gerai atvaizdavo populiaciją iki 50 metų, būtų galima analizuoti tik konkretų vyresniojo amžiaus atvejį. Taip pat būtų galimybė modeliuoti anuitetų bendrovės prisiimtų įsipareigojimų rezervų pokyčius, keičiant taikomą išvestą mirtingumo funkciją.

Literatūra

- [1] Bongaarts, J, Long-range trends in adult mortality: Models and projection methods. *Demography*, 42(1), 2005, p. 23-49.
- [2] Butt Z., Haberman S., Application of frailty-based mortality models using generalized linear models, *ASTIN Bulletin*, 2004, 34(1): p. 175–197.
- [3] Doray L. G. Inference for Logistic-type Models for the Force of Mortality. *Society of Actuaries*, 1979, p. 4–10.
- [4] Olivieri, A. (2006). Heterogeneity in survival models. applications to pension and life annuities. *Belgian Actuarial Bulletin*, 2006 p. 6:23–39.
- [5] Pascariu D. Marius, Parametric Mortality Models, Life Tables and HMD, <https://cran.r-project.org/web/packages/MortalityLaws/MortalityLaws.pdf>.
- [6] Pascariu M. Modeling and Forecasting Mortality. Ph.D. Thesis, University of Southern Denmark. 2018, p. 4.
- [7] Pitacco E., Denuit M., Haberman S., and Olivieri A. *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. Oxford University Press, 2009, p. 80-87.
- [8] Pitacco E. High age mortality and frailty. Some remarks and hints for actuarial modeling. *Actuaries.org*, 2016, p. 15-17.
- [9] Skučaitė A. Paskaitų konspektas: Išgyvenamumo – demografiniai modeliai, 2017, p. 4, 24-25.
- [10] Stankaitytė L., Girdvainytė G. Bakalauro baigiamasis darbas: Overview of population mortality models, 2018, p. 27.
- [11] The Human Mortality Database (HMD). www.mortality.org
- [12] Vaupel J.W., Manton K.G., Stallard E., The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality, *Demography*, 1979, 16(3): p. 439–454.

[13] "Human Development Report 2018 – (Human Development Report Office) United Nations Development Programme. pp. 22–25. Retrieved 14 September 2018."

Priedai A

Mirtingumo modelių parametrų radimo R kodas

Žemiau pateiksime R kodo dalį, kurio pagalba įvertiname išvestų analizinių mirtingumo galių su atsitiktiniu efektu parametrus kiekvienam modeliui atskirai, skaičiuojame vidutines kvadratinės paklaidas bei nubrėžiame visus modelius. Šis kodas skaičiuos Šveicarijos populiacijos atvejį, Lietuvos ir Ukrainos mirtingumo modelių parametrai randami analogiškai pakeitus porą kintamųjų, todėl jų nekartosime. Taip pat parametrų radimui naudojamą *MortalityLaws* funkcijos dokumentaciją galime rasti [5].

Užkrauname reikalingas bibliotekas;

```
install.packages("MortalityLaws")
install.packages("readxl")
library(MortalityLaws)
library("readxl")
```

Nusiskaitome duomenis iš mortality.org duombazės;

```
data<- read.table(file.choose(),header=T,sep=";")
x<-data[,1]
mx_ch<-data[,2] #Sveicarija
data2<- read.table(file.choose(),header=T,sep=";")
x2<-data2[,1]
mx_ch1<-data2[,2]
```

Nubrėžiame empirinius mirtingumo lentelės duomenis Šveicarijos populiacijai

```
plot(mx_ch,ylab="m(x)", pch=20, cex=1, type="b", col="black", x=x,
main="Mirtingumo modeliai su atsitiktiniu efektu Šveicarijos duomenims",
cex.main=0.75)
ticks <- seq(from=0, to=110, by=5)
axis(1, las=1, at=ticks, labels=ticks)
```

Kiekvienam iš teorinėje darbo dalyje išvestų modelių skaičiuojame parametrus, geriausiai padengiančius mirtingumo lentelių duomenis, nubrėžiame gautas analizines funkcijas bei skaičiuojame susidariusias modelio paklaidas;

```
#Kannisto-Puasono:
my_kannisto_puas<- function(x, par = c(a=0.000000005,b = 0.105, l=0.00001)){
hx <- with(as.list(par), (1*a*exp(b*x)*((a+1)^(1/b)))/((a*exp(b*x)+1)^((1+b)/b)))
return(as.list(environment()))}
my_model<- MortalityLaw(x = x, mx=mx_ch, custom.law=my_kannisto_puas,
opt.method="LF4")
a2<-coef(my_model)[1]
b2<-coef(my_model)[2]
l2<-coef(my_model)[3]
rezultatai_KP<-c(a2, b2,l2)
mx_ch_KP=(l2*a2*exp(b2*x)*((a2+1)^(1/b2)))/((a2*exp(b2*x)+1)^((1+b2)/b2))
lines(mx_ch_KP, col="blue", lwd=2, lty=1, x=x)
KP =(mx_ch-mx_ch_KP)^2
paklaida_KP =sqrt(sum(KP)/(length(x)-1))

#Kannisto-Gamma
my_kannisto_gam<- function(x, par = c(a=0.000004,b = 0.1007, l=0.10, k=3)){
hx <- with(as.list(par), (a*k*b*exp(b*x))/((a*exp(b*x))*log((a*exp(b*x)+1)/
(a+1))+b*l))
return(as.list(environment()))}
my_model2<- MortalityLaw(x = x, mx=mx_ch, custom.law=my_kannisto_gam,
opt.method="LF4")
a2<-coef(my_model2)[1]
b2<-coef(my_model2)[2]
l2<-coef(my_model2)[3]
k2<-coef(my_model2)[4]
rezultatai_KG<-c(a2, b2, l2, k2)
mx_ch_KG=(a2*k2*b2*exp(b2*x))/((a2*exp(b2*x))*log((a2*exp(b2*x)+1)/(a2+1))+b2*l2)
lines(mx_ch_KG, pch=10, col="red", lwd=2, lty=1, x=x)
```

```

KG =(mx_ch-mx_ch_KG)^2
paklaida_KG =sqrt(sum(KG)/(length(x)-1))

#Beard-Puasono:
my_beard_puas<- function(x, par = c(a=0.000003, b = 0.51033, d=0.00000002229,
l=90)){
hx <- with(as.list(par), (1*a*exp(b*x)*((d+1)^(a/b*d)))/((d*exp(b*x)+1)^
((a+b*d)/b*d)))
return(as.list(environment()))}
my_model3<- MortalityLaw(x = x, mx=mx_ch, custom.law=my_beard_puas,
opt.method="LF4")
a2<-coef(my_model3)[1]
b2<-coef(my_model3)[2]
d2<-coef(my_model3)[3]
l2<-coef(my_model3)[4]
rezultatai_BP<-c(a2, b2, d2, l2)
mx_ch_BP=(l2*a2*exp(b2*x)*((d2+1)^(a2/b2*d2)))/((d2*exp(b2*x)+1)^((a2+b2*d2)/b2*d2))
lines(mx_ch_BP, pch=10, col="brown", lwd=2, lty=1, x=x)
BP =(mx_ch-mx_ch_BP)^2
paklaida_BP =sqrt(sum(BP)/(length(x)-1))

#Beard-Gamma:
my_beard_gam<- function(x, par = c(a=0.0009, b = 0.115, d=0.000000001,
l=0.0002, k=300)){
hx <- with(as.list(par), (a*b*d*k*exp(b*x))/(a*log((d*exp(b*x)+1)/(d+1))+l*b*d))
return(as.list(environment()))}
my_model4<- MortalityLaw(x = x, mx=mx_ch, custom.law=my_beard_gam,
opt.method="LF4")
a2<-coef(my_model4)[1]
b2<-coef(my_model4)[2]
d2<-coef(my_model4)[3]
l2<-coef(my_model4)[4]

```

```

k2<-coef(my_model4)[5]
rezultatai_BG<-c(a2, b2, d2, l2,k2)
mx_ch_BG= (a2*b2*d2*k2*exp(b2*x))/(a2*log((d2*exp(b2*x)+1)/(d2+1))+l2*b2*d2)
lines(mx_ch_BG, pch=10, col="green", lwd=2, lty=1, x=x)
BG =(mx_ch-mx_ch_BG)^2
paklaida_BG =sqrt(sum(BG)/(length(x)-1))

#Siler_Poisson
my_siler_pois<- function(x2, par = c( a=0.00003305, b=0.15, c=0.00001, d=0.00011,
f=0.1, l=10)){
hx <- with(as.list(par), l*(a*exp((-1)*b*x2)+d*exp(f*x2)+c)*
exp(((a*(exp(-b*x2)-1))/(b))-(d*(exp(f*x2)-1)/(f))-c*x2))
return(as.list(environment()))}
my_model5<- MortalityLaw(x = x2, mx=mx_ch1, custom.law=my_siler_pois,
opt.method="LF4")
a2<-coef(my_model5)[1]
b2<-coef(my_model5)[2]
c2<-coef(my_model5)[3]
d2<-coef(my_model5)[4]
f2<-coef(my_model5)[5]
l2<-coef(my_model5)[6]
rezultatai_SP<-c(a2, b2, c2, d2, f2, l2)
mx_ch_SP<- (l2*(a2*exp(-b2*x2)+d2*exp(f2*x2)+c2))*
exp((a2*exp(-b2*x2)-1)/(b2) - d2*exp(f2*x2 -1)/(f2) -c2*x2)
lines(mx_ch_SP, pch=10, col="violet", lwd=2, lty=1, x=x2)
SP =(mx_ch1-mx_ch_SP)^2
paklaida_SP =sqrt(sum(SP)/(length(x2)-1))

#Siler-Gamma
my_siler_gam<- function(x2, par = c( a=0.03305,b=0.15, c=0.0001, d=0.000011,
f=0.1, l=100, k=0.1)){
hx <- with(as.list(par), (k*b*f*(a*exp(-b*x2)+d*exp(f*x2)+c))/

```



```

(-a*f*(exp(-b*x2)-1)+d*b*(exp(f*x2)-1)+b*f*(c*x2+1))
return(as.list(environment()))}
my_model6<- MortalityLaw(x = x2, mx=mx_ch1, custom.law=my_siler_gam,
opt.method="LF4")
a2<-coef(my_model6)[1]
b2<-coef(my_model6)[2]
c2<-coef(my_model6)[3]
d2<-coef(my_model6)[4]
f2<-coef(my_model6)[5]
l2<-coef(my_model6)[6]
k2<-coef(my_model6)[7]
rezultatai_SG<-c(a2, b2, c2, d2, f2, l2, k2)
mx_ch_SG<-(k2*b2*f2*(a2*exp(-b2*x2)+d2*exp(f2*x2)+c2))/
(-a2*f2*(exp(-b2*x2)-1)+d2*b2*(exp(f2*x2)-1)+b2*f2*(c2*x2+12))
lines(mx_ch_SG, pch=10, col="yellow", lwd=2, lty=1, x=x2)
SG =(mx_ch1-mx_ch_SG)^2
paklaida_SG =sqrt(sum(SG)/(length(x2)-1))

legend("topleft",, legend=c("mx", "Kannisto-Poisson", "Kannisto-Gamma",
"Beard-Poisson", "Beard-Gamma", "Siler-Poisson" , "Siller-Gamma"),
col=c("black", "blue", "red", "brown", "green", "violet", "yellow"),
lty=c(2,1,1,1,1,1,1), cex=0.8)

```

Pasidarome visų paklaidų bei analizinių funkcijų koeficientų vektorius;

```

paklaidos<-c(paklaida_KP, paklaida_KG, paklaida_BP,
paklaida_BG, paklaida_SP,paklaida_SG)
paklaidos
koef<-c(rezultatai_KP, rezultatai_KG, rezultatai_BP, rezultatai_BG,
rezultatai_SP, rezultatai_SG)
koef

```

Priedai B

Šveicarijos mirtingumo lentelė

<i>Metai</i>	x	l_x	q_x	μ_x	x	l_x	q_x	μ_x	x	l_x	q_x	μ_x
2016	0	100000	0.00356	0.0035664	37	98856	0.00049	0.0004901	74	82849	0.01768	0.0178382
2016	1	99644	0.00009	0.0000900	38	98807	0.00056	0.0005602	75	81385	0.01999	0.0201925
2016	2	99635	0.00012	0.0001200	39	98752	0.00052	0.0005201	76	79758	0.0227	0.0229616
2016	3	99623	0.00006	0.0000600	40	98700	0.0007	0.0007002	77	77948	0.02431	0.0246104
2016	4	99617	0.00009	0.0000900	41	98631	0.00076	0.0007603	78	76053	0.02683	0.0271965
2016	5	99608	0.00004	0.0000400	42	98557	0.00087	0.0008704	79	74012	0.03122	0.0317177
2016	6	99604	0.00006	0.0000600	43	98470	0.00078	0.0007803	80	71701	0.03794	0.0386785
2016	7	99598	0.00004	0.0000400	44	98394	0.00097	0.0009705	81	68981	0.04076	0.0416140
2016	8	99595	0.00006	0.0000600	45	98298	0.00104	0.0010405	82	66170	0.04808	0.0492743
2016	9	99589	0.00006	0.0000600	46	98196	0.00106	0.0010606	83	62988	0.0543	0.0558299
2016	10	99583	0.00006	0.0000600	47	98093	0.00152	0.0015212	84	59568	0.06332	0.0654136
2016	11	99577	0.00006	0.0000600	48	97944	0.0013	0.0013008	85	55796	0.07144	0.0741203
2016	12	99570	0.00008	0.0000800	49	97817	0.00152	0.0015212	86	51810	0.08194	0.0854925
2016	13	99563	0.00007	0.0000700	50	97668	0.00192	0.0019218	87	47565	0.09505	0.0998756
2016	14	99555	0.00017	0.0001700	51	97480	0.00179	0.0017916	88	43044	0.10478	0.1106858
2016	15	99538	0.00013	0.0001300	52	97305	0.00211	0.0021122	89	38534	0.12442	0.1328688
2016	16	99525	0.00008	0.0000800	53	97100	0.00262	0.0026234	90	33740	0.13905	0.1497188
2016	17	99517	0.00018	0.0001800	54	96846	0.00275	0.0027538	91	29048	0.15368	0.1668577
2016	18	99499	0.00023	0.0002300	55	96580	0.003	0.0030045	92	24584	0.17599	0.1935726
2016	19	99476	0.00023	0.0002300	56	96290	0.0033	0.0033055	93	20257	0.1924	0.2136884
2016	20	99454	0.00023	0.0002300	57	95973	0.00386	0.0038675	94	16360	0.21573	0.2430019
2016	21	99430	0.00025	0.0002500	58	95602	0.00363	0.0036366	95	12831	0.23638	0.2696850
2016	22	99405	0.00032	0.0003201	59	95256	0.00441	0.0044198	96	9798	0.26022	0.3014024
2016	23	99374	0.00023	0.0002300	60	94836	0.0048	0.0048116	97	7248	0.28495	0.3354028
2016	24	99350	0.00046	0.0004601	61	94380	0.00529	0.0053040	98	5183	0.31031	0.3715131
2016	25	99305	0.00037	0.0003701	62	93881	0.00608	0.0060986	99	3574	0.33603	0.4095183
2016	26	99269	0.00031	0.0003100	63	93311	0.00615	0.0061690	100	2373	0.36179	0.4490879
2016	27	99237	0.00033	0.0003301	64	92737	0.00753	0.0075585	101	1515	0.38728	0.4898472
2016	28	99204	0.00039	0.0003901	65	92038	0.00822	0.0082540	102	928	0.41221	0.5313855
2016	29	99165	0.00031	0.0003100	66	91282	0.00883	0.0088692	103	546	0.43629	0.5732153
2016	30	99134	0.00027	0.0002700	67	90475	0.00981	0.0098584	104	308	0.4593	0.6148907
2016	31	99107	0.00046	0.0004601	68	89588	0.00976	0.0098079	105	166	0.48104	0.6559285
2016	32	99062	0.00033	0.0003301	69	88714	0.01092	0.0109801	106	86	0.50136	0.6958709
2016	33	99029	0.00036	0.0003601	70	87745	0.01174	0.0118095	107	43	0.52017	0.7343234
2016	34	98993	0.00045	0.0004501	71	86715	0.01386	0.0139569	108	21	0.53742	0.7709358
2016	35	98949	0.00048	0.0004801	72	85513	0.01539	0.0155097	109	10	0.55311	0.8054428
2016	36	98901	0.00046	0.0004601	73	84197	0.01601	0.0161395	110	4	1	0.8414944

5 lentelė: 2016 metais sudaryta Šveicarijos vyrų ir moterų bendra mirtingumo lentelė iš [11].

Lietuvos mirtingumo lentelė

Metai	x	l_x	q_x	μ_x	x	l_x	q_x	μ_x	x	l_x	q_x	μ_x
2017	0	100000	0.00287	0.002874126	37	97177	0.00219	0.002192402	74	63049	0.0347	0.035316345
2017	1	99713	0.00019	0.000190018	38	96964	0.00272	0.002723706	75	60861	0.03778	0.038512164
2017	2	99694	0.0001	0.000100005	39	96700	0.00263	0.002633465	76	58561	0.04073	0.0415827
2017	3	99684	0.00031	0.000310048	40	96446	0.00284	0.00284404	77	56176	0.04188	0.042782248
2017	4	99654	0.00014	0.00014001	41	96171	0.00359	0.00359646	78	53824	0.04753	0.048696669
2017	5	99640	0.00024	0.000240029	42	95826	0.00356	0.003566352	79	51266	0.05258	0.054012778
2017	6	99616	0.0001	0.000100005	43	95485	0.00376	0.003767087	80	48570	0.05943	0.061269205
2017	7	99606	0.0002	0.00020002	44	95126	0.00412	0.004128511	81	45684	0.06666	0.068985729
2017	8	99585	0.00017	0.000170014	45	94734	0.00476	0.004771365	82	42639	0.0721	0.074831311
2017	9	99568	0.00011	0.000110006	46	94283	0.00503	0.005042693	83	39564	0.08277	0.08639702
2017	10	99557	0.00008	8.00032E-05	47	93809	0.00462	0.004630705	84	36289	0.09533	0.100185043
2017	11	99549	0.00024	0.000240029	48	93375	0.00521	0.005223619	85	32830	0.1084	0.114737677
2017	12	99526	0.00016	0.000160013	49	92888	0.00503	0.005042693	86	29271	0.12498	0.133508536
2017	13	99510	0.00008	8.00032E-05	50	92421	0.00656	0.006581611	87	25613	0.13095	0.140354618
2017	14	99503	0.00027	0.000270036	51	91815	0.00586	0.005877237	88	22259	0.14602	0.157847505
2017	15	99475	0.00015	0.000150011	52	91277	0.00683	0.006853431	89	19009	0.16296	0.17788342
2017	16	99460	0.00036	0.000360065	53	90654	0.00716	0.007185756	90	15911	0.17462	0.191911393
2017	17	99425	0.00033	0.000330054	54	90004	0.00765	0.007679411	91	13133	0.19629	0.218516771
2017	18	99392	0.0006	0.00060018	55	89316	0.00845	0.008485904	92	10555	0.20498	0.229388007
2017	19	99333	0.00069	0.000690238	56	88561	0.00937	0.009414175	93	8391	0.23042	0.261910367
2017	20	99264	0.0004	0.00040008	57	87732	0.00994	0.009989732	94	6458	0.26201	0.303825005
2017	21	99224	0.0006	0.00060018	58	86860	0.0099	0.009949331	95	4766	0.2849	0.335332886
2017	22	99164	0.00071	0.000710252	59	86000	0.01136	0.011425018	96	3408	0.30839	0.368733066
2017	23	99094	0.00057	0.000570163	60	85023	0.01252	0.012599036	97	2357	0.33225	0.403841427
2017	24	99038	0.00087	0.000870379	61	83958	0.01344	0.013531134	98	1574	0.35624	0.440429293
2017	25	98952	0.00071	0.000710252	62	82830	0.01516	0.015276088	99	1013	0.38009	0.478180973
2017	26	98881	0.00099	0.00099049	63	81575	0.01555	0.015672169	100	628	0.40356	0.516776629
2017	27	98783	0.00117	0.001170685	64	80306	0.01726	0.01741069	101	375	0.4264	0.55582299
2017	28	98668	0.00102	0.001020521	65	78920	0.01895	0.019131852	102	215	0.4484	0.594932133
2017	29	98568	0.00141	0.001410995	66	77424	0.01969	0.019886431	103	119	0.46939	0.633727991
2017	30	98429	0.00152	0.001521156	67	75899	0.02071	0.02092746	104	63	0.48921	0.671796732
2017	31	98280	0.00123	0.001230757	68	74328	0.02376	0.024046821	105	32	0.50776	0.708788877
2017	32	98159	0.00143	0.001431023	69	72561	0.02354	0.023821492	106	16	0.52497	0.744377319
2017	33	98018	0.00207	0.002072145	70	70853	0.02528	0.025605029	107	8	0.54081	0.778291211
2017	34	97816	0.00186	0.001861732	71	69062	0.02804	0.028440628	108	3	0.55529	0.810332895
2017	35	97633	0.00214	0.002142293	72	67125	0.02972	0.030170589	109	2	0.56842	0.840302386
2017	36	97424	0.00254	0.002543231	73	65130	0.03196	0.03248187	110	1	1	0.871380274

6 lentelė: 2017 metais sudaryta Lietuvos vyrų ir moterų bendra mirtingumo lentelė iš [11].

Ukrainos mirtingumo lentelė

<i>Metai</i>	x	l_x	q_x	μ_x	x	l_x	q_x	μ_x	x	l_x	q_x	μ_x
2013	0	100000	0.00789	0.007921291	37	95263	0.00385	0.00385743	74	52968	0.0495	0.050767117
2013	1	99211	0.00058	0.000580168	38	94897	0.00406	0.004068264	75	50346	0.05341	0.054889226
2013	2	99153	0.00039	0.000390076	39	94512	0.00437	0.004379576	76	47657	0.06029	0.062183962
2013	3	99114	0.00024	0.000240029	40	94099	0.00446	0.004469975	77	44784	0.06435	0.066513804
2013	4	99090	0.0002	0.00020002	41	93679	0.00477	0.004781413	78	41902	0.07396	0.076837849
2013	5	99070	0.00021	0.000210022	42	93232	0.00478	0.004791461	79	38802	0.07291	0.075704631
2013	6	99049	0.00017	0.000170014	43	92787	0.00532	0.005334202	80	35974	0.08093	0.08439299
2013	7	99032	0.00022	0.000220024	44	92293	0.00546	0.00547496	81	33062	0.0922	0.096731189
2013	8	99009	0.00016	0.000160013	45	91789	0.00603	0.006048254	82	30014	0.09992	0.105271631
2013	9	98994	0.00017	0.000170014	46	91236	0.00644	0.006460826	83	27015	0.10979	0.116297889
2013	10	98977	0.00021	0.000210022	47	90648	0.0066	0.006621876	84	24049	0.12162	0.129675977
2013	11	98956	0.00018	0.000180016	48	90050	0.00711	0.007135397	85	21124	0.13369	0.143512467
2013	12	98938	0.00023	0.000230026	49	89409	0.00758	0.007608874	86	18300	0.14657	0.158491755
2013	13	98916	0.00027	0.000270036	50	88732	0.00826	0.008294303	87	15618	0.15583	0.169401383
2013	14	98889	0.00032	0.000320051	51	87998	0.00883	0.008869215	88	13184	0.16911	0.185257864
2013	15	98858	0.00039	0.000390076	52	87221	0.0093	0.009343515	89	10954	0.19179	0.212933353
2013	16	98819	0.0005	0.000500125	53	86409	0.01007	0.010121045	90	8853	0.19855	0.221332692
2013	17	98770	0.00054	0.000540146	54	85539	0.01076	0.010818307	91	7096	0.22282	0.252083295
2013	18	98717	0.00067	0.000670225	55	84618	0.0122	0.012275031	92	5514	0.24029	0.274818497
2013	19	98650	0.00078	0.000780304	56	83586	0.01229	0.012366147	93	4189	0.25302	0.291716868
2013	20	98574	0.00082	0.000820336	57	82559	0.01326	0.013348699	94	3129	0.27941	0.327684958
2013	21	98493	0.00091	0.000910414	58	81464	0.01444	0.014545271	95	2255	0.29322	0.347035835
2013	22	98403	0.00098	0.000980481	59	80288	0.01538	0.015499499	96	1594	0.31274	0.375042601
2013	23	98307	0.00102	0.001020521	60	79052	0.01726	0.01741069	97	1095	0.33245	0.404140985
2013	24	98206	0.00119	0.001190709	61	77688	0.01902	0.019203207	98	731	0.3522	0.434173272
2013	25	98089	0.0014	0.001400981	62	76211	0.01983	0.020029253	99	474	0.37186	0.464992207
2013	26	97952	0.00144	0.001441038	63	74700	0.02113	0.021356434	100	298	0.39128	0.496396887
2013	27	97811	0.0016	0.001601281	64	73122	0.02437	0.024671863	101	181	0.41033	0.528192221
2013	28	97655	0.00172	0.001721481	65	71340	0.02223	0.02248081	102	107	0.42889	0.560173443
2013	29	97487	0.00197	0.001971943	66	69754	0.0278	0.028193734	103	61	0.44684	0.592107988
2013	30	97295	0.00219	0.002192402	67	67815	0.02571	0.026046278	104	34	0.46409	0.623789042
2013	31	97082	0.00241	0.002412909	68	66071	0.02852	0.028934597	105	18	0.48056	0.655003971
2013	32	96848	0.00271	0.002713679	69	64187	0.03391	0.034498281	106	9	0.4962	0.685575915
2013	33	96586	0.00303	0.0030346	70	62010	0.03297	0.03352576	107	5	0.51095	0.715290545
2013	34	96293	0.00327	0.003275358	71	59966	0.03872	0.039489549	108	2	0.52479	0.743998467
2013	35	95978	0.00364	0.003646641	72	57644	0.03904	0.039822494	109	1	0.53772	0.771584511
2013	36	95629	0.00382	0.003827315	73	55393	0.04379	0.044777725	110	1	1	0.800193392

7 lentelė: 2013 metais sudaryta Ukrainos vyrų ir moterų bendra mirtingumo lentelė iš [11].