

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

**Ekonomistų apklausų palūkanų normoms panaudojimas
taktiniams investavimo sprendimams**

**Remark on using interest rate forecast surveys to make
tactical investment decisions**

Juras Sokolovas

Vilnius

2019

MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas: J. Šiaulyš

Darbo konsultantas: R. Zovė, Lietuvos bankas

Darbo recenzentas: _____

Darbas apgintas 2020.12.12

Darbo įvertinimas _____

Registravimo Nr. _____

Atidavimo į katedrą data 2020.01.06

Turinys

Santrauka	2
Summary	3
Ivadas	4
1. Duomenys	7
2. Brier rodikliai	8
2.1. Apibrėžimas ir skaičiavimo būdai	8
2.2. Taikymas	9
3. Taktinės aktyvų alokacijos modelis	12
3.1. Struktūra	12
3.2. Taikymas	13
3.2.1. Vektorinė autoregresija	14
3.2.2. Palūkanų kreivės parametrizavimas	15
3.2.3. Akcijų modelis	16
3.2.4. Entropy Pooling	17
3.2.5. Kopula	18
3.2.6. Režimų pasikeitimo modelis	19
4. Rezultatai	21
4.1. Brier rodikliai	21
4.2. Taktinė aktyvų alokacija	22
Išvados	24
Literatūros sąrašas	25
Priedas Nr. 1.	27
Priedas Nr. 2.	29
Priedas Nr. 3.	40

Santrauka

Šio darbo tikslas yra ištirti ar ekonomistų apklausos JAV palūkanų normų lūkesčiams gali būti panaudotos sėkmingiems taktiniams investavimo sprendimams ir uždirbti perteklinę grąžą. Tyrime naudojami *Consensus Economics* apklausų rezultatai 3 mėnesių ir 10 metų palūkanų normoms. Apklausos tiriamos dviem būdais. Pirmasis – skirtas pamačiuoti prognozių tikslumą lyginant jas su rinkoje įskaičiuotais spėjimais, kuriuos atspindi išankstinės palūkanų normos. Tam panaudojamas Brier rodiklis (QPS) ir Brier rodiklis su Epstein pataisymu (RPS). Antrasis būdas prognozes vertina pagal taktinės aktyvų alokacijos modelio suformuoto portfelio rezultatus. Lūkesčiai modelyje keičia aktyvų klasių rizikos šaltinių skirstinius. Atsižvelgiant į tokį portfelio sudarymo būdą atliekamas istorinis taktinės alokacijos testas, o perteklinė portfelio grąža panaudojama kaip rodiklis, vertinantis kiek ekonomistų prognozės buvo geresnės nei rinkos.

Raktiniai žodžiai: Taktinė aktyvų alokacija, portfelio formavimas, Brier rodikliai, ekonomistų apklausos, palūkanų normų lūkesčiai.

Summary

The aim of this thesis is to assess if interest rate forecast surveys can be used for tactical asset allocation decisions and generate excess portfolio returns. Consensus Economics surveys are used as a source of economists' forecasts of 3-month and 10-year interest rates. The quality of these forecasts is measured in two ways. Firstly, by comparing the forecasts to historic forward rates using Brier score (QPS) and Brier score with Epstein correction (RPS). Second approach uses Consensus Forecasts to change predicted distributions of risk factors in tactical asset allocation model. Then quality of the forecasts is defined by backtesting and measuring excess return of the portfolio.

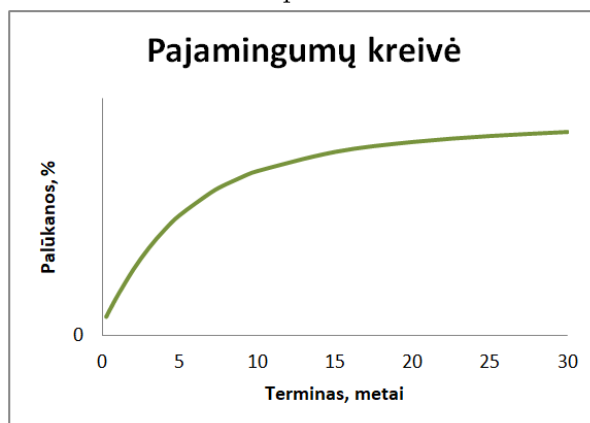
Key words: tactical asset allocation, Brier score, economic forecasts, interest rate survey, survey of economists.

Įvadas

Instituciniai investuotojai, tokie kaip Lietuvos bankas (LB), investuoja dviem arba trimis lygiais, t.y. strateginė aktyvų alokacija, taktinė aktyvų alokacija ir rinkose praktiškai realizuojamas portfelis. Toks investavimo sprendimų išskaidymas padeda skaidriai ir efektyviai įgyvendinti klientų jiems suteiktą mandatą. Lygiai vienas nuo kito dažniausiai skiriasi horizontu ir rizikos biudžeto dydžiu. Strateginiai sprendimai dažniausiai daromi didžiausiam rizikos biudžetui ir ilgiausiam horizontui, kuris įprastai yra ilgesnis nei vieni metai ir skirtas atspindėti, kiek pasirinktu horizontu ir prieinamu rizikos biudžetu rinkoje galima uždirbti. Sekantys du lygiai yra skirti aktyviam investicijų valdymui, t.y. uždirbama turint skirtingą nuomonę apie aktyvų gražas ateityje nei įkainota rinkose ir pagal tai formuojant pozicijas, kurios turėtų uždirbti perteklinę gražą prieš strateginį lyginamąjį indeksą (SLI). Taktinė aktyvų alokacija formuojama mėnesio ir ilgesniam horizontui, tačiau ne ilgesniam nei SLI. Taktinė aktyvų alokacija, kaip ir strateginė, dažnai atliekama tik teoriškai, tačiau nustato orientacinį lyginamąjį indeksą trečiajame investavimo lygyje formuojamam realiai rinkose įgyvendinam portfeliumi. Pastarąjį formuoja dileriai investavimo sprendimus priimdami dar trumpesniu horizontu, kuris paprastai neviršija vieno mėnesio. Aktyvaus valdymo tikslas yra optimaliai išnaudoti rizikos biudžetą turimų apribojimų rėmuose. Tai taktinės aktyvų alokacijos ir dilerių skyriai atlieka priimdami pozicijas tikėdamiesi, kad jų turima nuomonė yra geresnė nei tuo metu įkainoja rinkos.

Konservatyvūs investuotojai, kaip Lietuvos bankas, įprastai investuoja į dvi aktyvų klases: obligacijas ir akcijas. Lietuvos banko atveju akcijos priklauso strateginiam lyginamajam indeksui, tačiau nėra valdomos aktyviai dėl didelio jų kainų kintamumo. Tuo tarpu aktyviai investuojama į skirtingų valstybių ir korporacijų įvairaus termino obligacijas. Skirtingo termino, tačiau vieno emitento obligacijų kainose esanti informacija agreguojama pajamingumų kreivėje $P(\tau)$ (žr. pav. 1). Ši funkcija terminui τ priskiria palūkanas, ja galima paaiškinti bet kokio termino obligacijų gražą. Obligacijų portfelio valdytojo veiks-

1 pav.



mai būna sėkmingi, jei jo ateities spėjimas buvo tikslesnis nei $P(\tau)$ įskaičiuotos išanks-

tinės palūkanų normos. Išankstinės palūkanų normos (angl. *forwards*) apibūdina kokios palūkanos konkrečiam terminui bus taikomos po numatyto horizonto h . Pavyzdžiui, trijų mėnesių p.n. po trijų mėnesių yra išankstinės p.n.. Išankstinės palūkanų normos taip pat atvaizduojamos pajamingumo kreive $f_{hj}(t)$, t.y. palūkanos skaičiuojamos laiko momentu t ir nusako palūkanas terminui j po laikotarpio h . Tarkime, investiciją į nulinio kupono obligacijas t laiko momentu 2 metams galima atlikti dviem būdais: (a) pirkti 2 metų trukmės obligaciją dabar su $y_2(t)$ metinėmis p.n. arba (b) pirkti 1 metų obligaciją dabar su $y_1(t)$ p.n. ir kitą vienu metų obligaciją po metų su $f_{11}(t)$ p.n.. Tokiu atveju rinka įkainoja išankstinės p.n. $f_{11}(t)$ taip, kad (a) ir (b) investicijų vertės būtų lygios, t.y. galioja lygybė:

$$(1 + y_2(t))^2 = (1 + y_1(t))(1 + f_{11}(t)).$$

Taigi bet kokia investicija į obligacijas yra lyginama su rinkoje įskaičiuota orientacine investicija naudojant išankstinės p.n.. Jei tirtame pavyzdyje investuotojas mano, kad analogiškos nulinio kupono obligacijos kaina po metų atitiks $\bar{y}_1(t + 1) > f_{11}(t)$ palūkanų norma, tai jis rinksis investuoti (b) būdu.

Nors Lietuvos banko strateginį lyginamąjį indeksą sudaro tik 2 rūšių aktyvų klasės, o taktinis lyginamasis indeksas aktyviai gali valdyti tik vieną iš jų – obligacijas, galimų pozicijų kiekis nėra mažas, nes galima investuoti į skirtingo termino valstybių ir korporacijų obligacijas. Didelį kiekį investicijų su turimais rizikos biudžeto ir kitais techniniais apribojimais patogų suvaldyti naudojant matematinį modelį. Šiame darbe atsižvelgiama tik į JAV vyriausybės vertybinius popierius, nes siekiama sukurti principus, kuriais remiantis bus įvertintos ir kitų šalių palūkanų normų prognozės. Kuriamas modelis imituos konservatyvų investuotoją ir investuos į JAV akcijas ir obligacijas su nedideliu 0,5% metinio standartinio nuokrypio rizikos biudžetu. Strateginį lyginamąjį indeksą sudarys 95% investicijų į 1-5 metų vyriausybės vertybinių popierių indeksą GVQ0 [9] atitinkantį teorinį indeksą ir 5% į S&P 500 akcijų indeksą [8]. Didelis pasirinkimas iš skirtingo termino obligacijų ir akcijų sunkina portfelio konstravimą, nes visoms galimoms investicijoms į obligacijas reikia prognozės, kuri turėtų konkuruoti su išankstinėmis palūkanų normomis. Taktinės aktyvų alokacijos modelis prognozuoja visą pajamingumą kreivę ir akcijų grąžą, o tada išrenka optimalų portfelį, kuris turėtų uždirbti maksimalią grąžą su turimu rizikos biudžetu. Teoriškai, atspėjus pajamingumo kreivės formą po investavimo horizonto, modelis išrinktų tokį portfelį, kuris pozicijas sudarytų maksimalią grąžą generuojančiomis obligacijomis. Praktiškai taip neatsitinka, todėl norima prognozių, kurios būtų kuo arčiau realizacijų.

Prognozuoti visą palūkanų kreivę yra sudėtingas procesas, o individai, gebantys gerai prognozuoti finansų rinkas, retai tai daro pastoviu tikslumu. Norint išvengti šio šališkumo verta remtis didesniu kiekiu patikrintų prognozuotojų. Tokiu atveju padeda kompanijos kaip Consensus Economics (CE). Tai yra firma užsiimanti ekonominių ir rinkos rodiklių

prognozėmis ir analize. CE tiriamos teritorijos apima G7 šalis, Azijos ir Ramiojo vandenyno regioną, Rytų Europą ir Lotynų Ameriką. Kompanija nuo atidarymo 1989 metais sukaupe ratą ekonomistų iš skirtingų ekonomikos sektorių, tarp kurių bankai, reitingų agentūros, ekonomikos konsultantai, automobilių pramonės kompanijos. Kompanija apklausia ekonomistus dėl skirtingų 10-15 ekonomikos indikatorių, tarp kurių infliacija, BVP augimas, 3 mėnesių ir 10 metų p.n.. Nors pajamingumo kreivę galima prognozuoti įvairiais būdais, šiame darbe naudojami tik 3 mėnesių ir 10 metų p.n. indikatoriai. CE atlikti tyrimai rodo, kad apklausos vidurkis veikia geriau nei atskiri prognozuotojai ([28] ir [17]). Be to, remiantis apklausomis, o ne vienu prognozuotoju, sumažėja vienpusių prielaidų ir metodų, formuojant prognozių modelius, problema [4].

Šio darbo tikslas yra ištirti ekonomistų apklausų palūkanų normoms tikslumą. Jų suformuotas prognozės palyginamos su išansktinėmis palūkanų normomis taip apibrėžiant naudą taktinei aktyvų alokacijai. Pirma, prognozės lyginamos su išansktinėmis p.n. tiesiogiai, t.y. tiriami jų ir tų palūkanų, kurios realizavosi po spėjimo horizonto, skirtumai. Skirtumai vertinami pasitelkus dviejų tipų Brier rodiklius. Antra, formuojamas taktinės aktyvų alokacijos modelis. Modelio formuojamo portfelio istorinė analizė parodo prognozių pranašumą prieš išankstines palūkanų normas, nes uždirbama perteklinė grąža.

Šis darbas sudarytas iš 4 skyrių. Pirmame skyriuje supažindinama su apklausų pateikiamais duomenimis ir jų paruošimu tyrimams. Antrajame skyriuje apžvelgiamas Brier rodiklių metodas skirtas apklausų tikslumo vertinimui ir jo pritaikymas ekonomistų apklausoms. Trečiajame skyriuje aptariami aktyvų alokacijos modelio formavimo principai ir jų pritaikymas kuriant taktinės aktyvų alokacijos modelį, skirtą išnaudoti ekonomistų lūkesčius. Ketvirtajame – apžvelgiami tyrimų rezultatai.

1. Duomenys

CE apklausos dalis palūkanų normoms atliekama apklausus 30 ekonomistų dėl 3 mėnesių ir 10 metų palūkanų normų lygių po 3 ir 12 mėnesių nuo apklausos. Ne visada visi respondantai atsako, todėl atsakymų skaičius gali būti mažesnis nei 30. Kadangi kiekvienas prognozuotojas pateikia tik vieną skaičių, turimas empirinis skirstinys gali neatspindėti realaus ekonomistų ar jų modelių prognozių kintamumo. Dėl to, 2.2 skyrelyje skirstiniai sudaryti keliais būdais. Apklausos buvo tirtos nuo 1994-04-30 iki 2019-03-30. Šiam laikotarpiui skaičiuoti Brier rodikliai ir atliktas taktinės aktyvų alokacijos modelio testavimas. Modelis formuos pozicijas portfelyje, kuris bus sudarytas iš akcijų ir obligacijų. Akcijų alokacija bus atlikta į S&P 500 indeksą, tai – didelės kapitalizacijos JAV rinkoje prekiaujamų kompanijų akcijų indeksas [10] ir į tris JAV vyriausybės obligacijų indeksus, kurie atitiks Lietuvos banko SLI esančius JAV vyriausybės obligacijų indeksus. Pirmasis turės vienų metų modifikuotą finansinę trukmę (MFT, žr. priedą Nr. 3.) ir atitiks nerizikingą investiciją, nes taktinės aktyvų alokacijos horizontas yra vieni metai. Antrasis lygiomis dalimis suformuotas iš 1 - 5 metų trukmės obligacijų, o trečiasis – lygiomis dalimis iš 1 - 10 metų trukmės obligacijų. Indeksai formuoti remiantis nulinio kupono obligacijų grąžų skaičiavimais. Praktikoje šias investicijas būtų galima įgyvendinti biržoje prekiaujamais fondais, kurie dar pridėtų prekybos kaštus, arba tokiais išvestiniais finansiniais instrumentais, kaip ateities sandoriai. Palūkanos šiems indeksams formuoti imtos iš ICE Indeksų platformos [9].

2. Brier rodikliai

2.1. Apibrėžimas ir skaičiavimo būdai

Vienas iš būdų patikrinti apklausų tikslumą yra Brier rodikliai, kurie matuoja, kaip tiksliai prognozuojamas kategorinio atsitiktinio dydžio skirstinys. Šiame darbe naudojame dviejų tipų Brier rodiklius remdamiesi G. Boero, J. Smith ir K. F. Wallis darbu [2]. Tarkime, $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ yra atsitiktinių dydžių seka. Bet kuriuo laiko momentu t dydis X_t įgyja reikšmę vienoje iš $k \in \{1, \dots, K\}$ kategorijų su tikimybe p_{kt} . Tegul, be to, dydis d_{kt} nurodo, kurioje kategorijoje laiko momentu t a.d. realizavosi:

$$d_{kt} = \begin{cases} 1, & \text{kai a.d. realizavosi } k \text{ kategorijoje,} \\ 0, & \text{kitur.} \end{cases} \quad (1)$$

Kategorijos sudaro pilną baigčių aibę, todėl

$$\sum_{k=1}^K p_{kt} = 1. \quad (2)$$

Paprastasis Brier rodiklis (aprašytas dar 1950 metais [3]) skaičiuojamas pagal formulę:

$$QPS = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K (p_{kt} - d_{kt})^2 \quad (3)$$

Čia sumuojama pagal laiką t ir kategorijas k . Paskutinėje formulėje T yra stebėjimų skaičius, o K – kategorijų skaičius. Įprastai kategorijomis laikome galimas diskretaus atsitiktinio dydžio baigtis arba intervalus, į kuriuos išskaidomos tolydaus atsitiktinio dydžio baigtys. Pavyzdžiui [2] straipsnio autoriai, tirdami kaip Anglijos banko vykdomos ekonomistų apklausos gerai prognozuoja šalies infliaciją, suskaido atsakymus į 6 kategorijas: $< 1,5\%$, $2,0 - 2,5\%$, $2,5 - 3,0\%$, $3,0 - 3,5\%$ ir $> 3,5\%$, taigi, šiuo atveju, $K = 6$. Tuo tarpu p_{kt} nurodo laiko momentu t kategorijai k priskiriamą tikimybę, o d_{kt} – kurioje kategorijoje laiko momentu t įvykis realizavosi, t.y. laiko momentu t d_{kt} yra nuliai visoje K kategorijų išskyrus vieną, kurioje įgyja reikšmę 1. Akivaizdu, kad $QPS \in [0,2]$, o $QPS = 0$ (geriausia reikšmė), kai spėjama su tikimybe vienas ir toks įvykis išsipildo. Blogiausias spėjimas gaunamas, kai $QPS = 2$ - taip įvyksta, kai tikimybė vienas priskiriama baigčiai, kuri neįvyksta. Jei kiekvienu laiko momentu būtų spėta su tikimybe vienas, tai situaciją, kai per visą tirtą laiką atspėta pusė reikšmių, rodytų lygybę $QPS = 1$. Taigi, rodiklio reikšmės lyginimas su vienetu duoda gerą atskaitos tašką.

Antras būdas, patikrinti apklausų tikslumą, yra Brier rodiklis su Epstein korekcija [7]. Čia tikimybės konkrečiai kategorijai pakeičiamos pasiskirstymo funkcijos reikšmėmis, t.y. atsižvelgiama ne tik į pačią kategoriją, bet ir į jų eiliškumą. Šis būdas leidžia labiau „baus-

ti“ tas prognozes, kurios buvo toliau nuo atsitiktinio dydžio realizacijos ir mažiau tas, kurios buvo arčiau. Tuo tarpu QPS „baudė“ visas prognozes vienodai, taigi lyginant šiuos du rodiklius galima nuspręsti ar plačiai prognozės aplink realizaciją išsibarsto kategorijų atžvilgiu. Brier rodiklis su Epstein korekcija (RPS) apskaičiuojamas pagal formulę:

$$RPS = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K (P_{kt} - D_{kt})^2. \quad (4)$$

Čia $P_{kt} = \sum_{j=1}^k p_{jt}$, $D_{kt} = \sum_{j=1}^k d_{jt}$, visiems $k \in \{1, \dots, K\}$. Kaip ir QPS atveju funkcija RPS įgyja tik teigiamas reikšmes. Minumą ir maksimumą įgyja tomis pačiomis sąlygomis – nulį, kai prognozuojama su tikimybe 1 ir ta baigtis realizuojasi, o $K - 1$, kai prognozuojamas ir realizavęsis įvykiai yra didžiausiu įmanomu atstumu. Pavyzdžiui, paminėtame Anglijos banko tyrime $RPS = 5$, kai prognozuojama infliacija yra mažesnė nei 1,5%, o realizuojasi didesnė nei 3,5%.

2.2. Taikymas

Brier rodikliai yra sukurti kategoriniams kintamiesiems, todėl vertinant, ar palūkanų normų (p.n.) prognozė buvo tiksli, reikia apibrėžti kategorijų skaičių ir palūkanų normų lygius, ties kuriais kategorijos pereina iš vienos į kitą. Pirmą, reikia rasti prognozės P_t , daromos laiko momentu t , skirstinį, kuris nustatys, kokias tikimybes kokiems intervalams po spėjimo laikotarpio h ekonomistai priskiria. Skirstinys formuojamas trimis būdais:

- 1.1 Laiko momentu t CE pateikia ekonomistų prognozių vektorių $m_t = (m_{t1}, m_{t2}, \dots, m_{tN})$, čia N – atsakiusių ekonomistų skaičius. Laikome, kad šis empirinis prognozių skirstinys atspindi pilną spėjimų skirstinį. Gautas diskretus skirstinys pakeičiamas tolydžiu normaliuoju skirstiniu pritaikius didžiausio tikėtimumo metodą:

$$P_t \sim \mathcal{N}(\mu_{DT,t}, \sigma_{DT,t}^2).$$

Čia $\mu_{DT,t}$ ir $\sigma_{DT,t}^2$ – didžiausio tikėtimumo įverčiai skirstinio vidurkiui ir dispersijai laiko momentu t .

- 1.2 Kaip paaiškėjo, pirmame punkte formuojamas skirstinys gali atspindėti tik individualių ekonomistų skirstinių medianų empirinį pasiskirstymą, tačiau individualūs ekonomistai, spėdami ateitį, gali tikėtis didesnio palūkanų normų kintamumo, nors tai ir neatsispindi jų pateiktame atsakyme. Tai vertinant formuojamas naujas skirstinys, kurio vidurkis išliks toks pat, bet kintamumas atsižvelgs į pastarųjų 3 metų spėjimų kintamumą. Tarkime, kad $m = (m_1, m_2, \dots, m_T)$ yra rinkinys apklausų vienai palūkanų normai sukauptas per T metų, o $M = (M_1, M_2, \dots, M_T)$ yra apklausų rinkinių m medianos, t.y. $M_t = Q_{m_t}(0,5)$ yra m_t 0,5 lygio kvantilis. Tegu

$\Delta M_t = M_t - M_{t-1}$, o $\Delta M_{t36} = (\Delta M_t, \Delta M_{t-1}, \dots, \Delta M_{t-35})$. Tada galime apibrėžti antrą prognozių skirstinį:

$$P_t \sim \mathcal{N}(M_t, \sigma_{\Delta M_{t36}}^2).$$

1.3 Trečiasis būdas formuojamas dėl tos pačios priežasties kaip antrasis – praplėsti prognozių sklaidą, tačiau atsižvelgiama ne į prognozių pokyčių pasiskirstymą, bet į tikrų palūkanų normų skirtumus iki spėjimo momento t . Tarkime $y_t = (y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_T)$ yra palūkanų normų istorija iki laiko momento t . Pažymėkime $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$, o $\Delta y_{t36} = (\Delta y_t, \Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-35})$ – paskutinius 3 metų tų palūkanų mėnesinius pokyčius. Tada galime apibrėžti trečiąjį prognozių skirstinį:

$$P_t \sim \mathcal{N}(M_t, \sigma_{\Delta y_{t36}}^2).$$

Bendrai, bet kokios rinkos rodiklių prognozės tikslumas tikrinamas prieš rinkos lūkesčius. Palūkanų normų rinkos lūkesčiai yra įskaičiuoti išankstinėse palūkanų normose, todėl CE prognozių Brier rodiklius verta palyginti su išankstinių p.n. Brier rodikliais. Tarkime, $F_{ij}(t)$ yra atsitiktinis dydis laiko momentu t apibūdinantis išankstinės p.n. periodui j po laikokartio i . Skaičiuojant Brier rodiklius išankstinėms palūkanų normoms, apibrėžiame $F_{ij}(t)$ skirstinį kiekvienam laiko momentui. Tai atliekame analogiškai 1.2 ir 1.3 punktams:

2.1 Išankstinių p.n. pokyčiai pasiskirstę normaliai aplink dabartinę išankstinę p.n. su 36 mėnesių istoriniu standartiniu nuokrypiu. Tarkime $(f_{ij}(1), f_{ij}(2), \dots, f_{ij}(T))$ yra išankstinių p.n. istorija iki laiko T . Pažymėkime $\Delta f_{ij}(t) = f_{ij}(t) - f_{ij}(t-1)$, o $\Delta f_{ij36}(t) = (\Delta f_{ij}(t), \Delta f_{ij}(t-1), \dots, \Delta f_{ij}(t-35))$ – paskutinius 3 metų tų palūkanų mėnesinius pokyčius. Tada išankstinių p.n. skirstinį galima užrašyti kaip:

$$F_{ij}(t) \sim \mathcal{N}(f_{ij}(t), \sigma_{\Delta f_{ij36}(t)}^2).$$

2.2 Atitinkamai 1.3 punktui tariame, kad išankstinių p.n. skirstinys yra sudarytas iš tikrų p.n. pokyčių 36 mėnesių istorinio standartinio nuokrypio aplink dabartinę išankstinę p.n., t.y.

$$F_{ij}(t) \sim \mathcal{N}(f_{ij}(t), \sigma_{\Delta y_{t36}}^2).$$

Antra, nustatomi palūkanų normų intervalai, kurie apibūdina prognozių tikslumą. Trijų mėnesių palūkanos per visą tirtą laikotarpį svyravo nuo 0 iki 6 procentų, o nuo 2008 iki 2015 metų išsilaikė arti nulio, maksimaliai pakildamos tik 0,35%, todėl pastovūs režiai nėra tinkami. Alternatyva yra prognozės dieną suformuoto tikrų palūkanų normų skirstinio išskaidymas į lygias dalis. Tarkime, atsitiktinis dydis Y_t apibūdina laiko momentu t rinkoje nustatomas palūkanų normas, o y_t yra jo realizacija. Tada Y_t skirstinį galime

užrašyti:

$$Y_t \sim \mathcal{N}(y_t, \sigma_{\Delta y_{t36}}^2).$$

Skirstinį išskaidėme į 3 ir 5 intervalus ir tyrėme du atvejus. Intervalai buvo sudaromi skirstinį išskaidžius per kvantilių reikšmes, t.y.

1.

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\infty, Q_{Y_t}(\frac{1}{3})], \\ (Q_{Y_t}(\frac{1}{3}), Q_{Y_t}(\frac{2}{3})], \\ (Q_{Y_t}(\frac{2}{3}), \infty). \end{array} \right.$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\infty, Q_{Y_t}(0,2)], \\ (Q_{Y_t}(0,2), Q_{Y_t}(0,4)], \\ (Q_{Y_t}(0,4), Q_{Y_t}(0,6)], \\ (Q_{Y_t}(0,6), Q_{Y_t}(0,8)], \\ (Q_{Y_t}(0,8), \infty). \end{array} \right.$$

Čia $Q_X(q)$ žymi X atsitiktinio dydžio q eilės kvantilį. Trys intervalai atitinka tris scenarijus: optimistinį, bazinį ir pesimistinį, o penki leidžia geriau įvertinti prognozių tikslumą. Mažesnis intervalų skaičius didina tikimybę prognozei pakliūti į tą pačią kategoriją.

Skirtingi skirstinių sudarymo būdai leidžia suprasti, kaip išsidėstę ekonomistų atsakymai ir koks būdas yra tikslesnis. Taigi, gavome šešis skirtingus būdus, kaip apskaičiuoti Brier rodiklius ekonomistų apklausoms – trys būdai pagal skirstinį (medianų skirstinys (1.1 punktas) ir didesnę kintamumą turintys apimti skirstiniai 1.2 ir 1.3) ir kiekvienam iš pastarųjų dar du būdai pagal intervalų skaičių (3 ir 5). Aptariant rezultatus 4.1 skyriuje 1.3 ir 2.2 punktai išskiriami kaip antras būdas, nes Consensus spėjimų ir išankstinių palūkanų normų skirstiniai sudaryti naudojantis tuo pačiu tikrų palūkanų normų pokyčių pasisiskirstymu tik apie skirtingą vidurkį.

3. Taktinės aktyvų alokacijos modelis

3.1. Struktūra

Kiekvienas investuotojas, norėdamas padidinti savo kapitalą, investuoja į norimas ir prieinamas aktyvų klases pasirinktam horizontui. Aktyvų alokacijos modelis yra vienas iš būdų administruoti šias investicijas. Modelis keičia portfelio struktūrą atsižvelgdamas į aktyvų kainų lūkesčius ir visus turimus apribojimus. Šiame darbe formuojamas faktorinis modelis, kurio pagalba prognozuojami aktyvų klasių gražų skirstiniai pasirinktam horizontui τ . Tarkime kainos po investavimo horizonto yra $P_{T+\tau}$ daugiamatis atsitiktinis dydis. Taigi, modeliuoti rinką reiškia apibrėžti aktyvų klasių gražų $P_{T+\tau}$ skirstinį. Norint tai padaryti galima remtis dešimties žingsnių planu suformuluotu Attilio Meucci [19]:

1. Pirma reikia apibrėžti rizikos šaltinius kiekvienai aktyvų klasei. Įprastai obligacijoms tai pastovios trukmės investicijų palūkanų normos, o akcijoms dieninės, savaitinės ar mėnesinės gražos.
2. Identifikavus rizikos šaltinius, kurie lemia aktyvų klasių kainas, jiems pritaikomas parinktas modelis (randami modelio parametrai), iš kurio gaunami invariantai (paklaidos) – modeliu nepaiškinama rizikos šaltinių atsitiktinė komponentė.
3. Nustatomas gautų paklaidų pasiskirstymas.
4. Naudojantis gautu modeliu ir paklaidų pasiskirstymu prognozuojamos rizikos šaltinių reikšmės investavimo horizontui.
5. Gautos rizikos šaltinių prognozės paverčiamos į aktyvų klasių kainų prognozes.
Sekantys trys žingsniai skirti portfelio rizikos valdymui:
6. Suskaičiuojamos galimų portfelių vertės.
7. Apibrėžiami portfelio naudingumo vertinimo būdai ir apribojimai.
8. Išskiriami portfelio gražas ir rizikos šaltiniai, kurie nebūtinai sutampa su modelavimo pjūviais. Tikslas padaryti portfelio pasirinkimą skaidresnį ir labiau susijusį su ekonominėmis prielaidomis.
9. Išrenkamas optimalus portfelis tenkinantis apribojimus.
10. Paskutinis žingsniu lieka siūlomus investavimo sprendimus pritaikyti praktikoje, todėl reikia atsižvelgti į daug pragmatinių dalykų. Pavyzdžiui, aktyvų klasių realizacijos galimybės rinkoje skirtingais finansiniais instrumentais, prekybos kaštai ir panašiai.

3.2. Taikymas

Norėdami detaliau suprasti ekonomistų apklausų reikšmę taktinei aktyvų alokacijai sukūreime modelį, kuris sudarinės pozicijas iš investicijų į akcijas ir obligacijas, kaip aptarta 1 skyriuje. Kuriamas modelis pagrįstas konservatyvaus institucinio investuotojo pavyzdžiu – lyginamasis indeksas, prieš kurį modelis priiminėja pozicijas yra sudarytas iš 95% 1-5 metų JAV obligacijų indekso, atitinkančio ICE indeksų platformos skaičiuojamą GVQ0 indeksą, ir 5% S&P 500 akcijų indekso. Leidžiama prisiimti aktyvaus valdymo rizika neturi viršyti 0,5% standartinio nuokrypio vienu metų horizontui. Taigi, portfelis formuojamas priimant skirtingas kreivės ir MFT pozicijas arba keičiant akcijų prekybą. Norėdami detaliau panagrinėti vien tik palūkanų normų įtaką portfeliui, modelį tikrinome dviem būdais: leidžiant prekiauti akcijomis (trumpa akcijų pozicija gali būti priimta tik nesiskolinant) ir visai uždraudus prekybą akcijomis.

Turint galimybes prekiauti JAV vyriausybės obligacijomis su skirtingais terminais iki išpirkimo (tokias investicijas mūsų atveju atitinka skirtingos MFT indeksai), galime modeliuoti visą pajamingumą kreivę kartu. Iš tiesų, galime parinkti tris faktorius, kurie apibūdins kreivės formą ir tiks Meucci pateikto plano pirmajam punktui. Tokių kreivės išskaidymo būdą į faktorius aprašė Nelson ir Siegel [21], o patobulino ir pritaikė platesniam naudojimui Diebold ir Li [5]. Pastarasis modelis kreivę išskaido į lygio L , statumo S ir kreivumo C komponentes (žr. skyrelį 3.2.2). Tuo tarpu akcijų daliai modeliuoti parinkome Ang straipsnyje [1] aprašytą modelį. Čia autorius išskaido akcijų grąžą į dvi komponentes – grąžą iš dividendų ir grąžą iš kainos pokyčio. Tuo pačiu tiriamas jų sąryšis per dividendų santykinį augimą akcijos (ar indekso) kainos atžvilgiu (žr. 3.2.3). Toks modelis bus paremtas 3 faktoriais – dividendų pajamingumu dy_t , dividendų augimu dg_t ir grąža iš kainos pokyčio r_t . Taigi turime 6 faktorius, kurie lemia prieinamų aktyvų klasių grąžas.

Antru žingsniu norime surasti tiriamų aktyvų klasių invariantus (modelio paklaidas). Kaip palūkanų normų ir akcijų modelių ([21] ir [1]) autoriai faktorius prognozuosime pasitelkdami vektorinę autoregresiją (žr. 3.2.1), tik šiuo atveju obligacijų ir akcijų faktoriai bus viename modelyje. Taigi modelį sudarys 6 kintamieji. Remiantis minėtų autorių praktika formuosime pirmos eilės VAR modelį be apribojimų koreliacijoms tarp tos pačios aktyvų klasės faktorių, tačiau apribosime sąryšius tarp akcijų ir obligacijų faktorių. Tai padės išlaikyti modelį stabilų bėgant laikui ir išvengti didelio kiekio parametrų. Periodu nuo 1994 balandžio iki 2018 balandžio koreliacijos tarp akcijų ir obligacijų parametrų nėra didelės išskyrus lygio ir dividendų augimo (žr. grafiką nr. 8). Šių sąryšių tarp faktorių visai neatmetame, o perkeliame į sąryšius tarp invariantų (paklaidų), detaliau apie tai

trečiame ir ketvirtame žingsniuose. Taigi modelis įgaus tokį pavidalą:

$$\begin{cases} L_t = \Phi_L + \Phi_{1L}L_{t-1} + \Phi_{2L}S_{t-1} + \Phi_{3L}C_{t-1} + \epsilon_{tL}, \\ S_t = \Phi_S + \Phi_{1S}L_{t-1} + \Phi_{2S}S_{t-1} + \Phi_{3S}C_{t-1} + \epsilon_{tS}, \\ C_t = \Phi_C + \Phi_{1C}L_{t-1} + \Phi_{2C}S_{t-1} + \Phi_{3C}C_{t-1} + \epsilon_{tC}, \\ dy_t = \Phi_{dy} + \Phi_{4dy}dy_{t-1} + \Phi_{5dy}dg_{t-1} + \Phi_{6dy}r_{t-1} + \epsilon_{tdy}, \\ dg_t = \Phi_{dg} + \Phi_{4dg}dy_{t-1} + \Phi_{5dg}dg_{t-1} + \Phi_{6dg}r_{t-1} + \epsilon_{tdg}, \\ r_t = \Phi_r + \Phi_{4r}dy_{t-1} + \Phi_{5r}dg_{t-1} + \Phi_{6r}r_{t-1} + \epsilon_{tr}. \end{cases} \quad (5)$$

Trečia, pritaikę šį modelį turimiems duomenims gauname paklaidas

$\epsilon = (\epsilon_L, \epsilon_S, \epsilon_C, \epsilon_{dy}, \epsilon_{dg}, \epsilon_r)$. Paklaidoms pritaikius branduolio švelninimo (angl. *kernel smoothing*) funkciją išlaikome mažai pakeistus empirinius invariantų

$E = (E_L, E_S, E_C, E_{dy}, E_{dg}, E_r)$ skirstinius.

Kvirtu žingsniu tiriamam horizontui prognozuojamos invariantų E reikšmės. Formuojant modelį buvo apriboti sąryšiai tarp kintamųjų, tačiau invariantų priklausomybes išlaikome panaudojant kopulas (detaliau žr. 3.2.5). Pritaikius kopulą invariantų skirstiniams prognozuojame daugiamačių skirstinį E , išlaikant marginalinių skirstinių E_i , $i \in \{L, S, C, dy, dg, r\}$, savybes. Gauti šokai (invariantų prognozės) statomi į modelio lygtis ir remiantis paskutinėmis žinomomis kintamųjų reikšmėmis suskaičiuojami faktoriai L, S, C, dy, dg, r , o iš jų rizikos šaltinių skirstiniai – akcijų gražos ir obligacijų pajamingumai. Iki šio momento gauti skirstiniai niekaip neatspindi ekonomistų lūkesčių dėl palūkanų normų. Šiuos lūkesčius minimaliai keisdami gautus skirstinius į modelį įvedame vadinamu „Entropy Pooling“ metodu (detaliau žr. 3.2.4 skyrių).

Šeštu žingsniu suskaičiuojamos indeksų kainos, septintu apibrėžiami apribojimai portfelio sudarymui. Kaip minėta anksčiau, skaičiavimai atlikti su apribojimu prekiauti akcijomis (svoris portfelyje nesikeičia) ir be (svoris portfelyje gali kisti nuo -5% iki tiek, kiek leidžia 0,5% metinio standartinio nuokrypio rizikos apribojimas); leidžiama naudoti svertą skolinantis už nerizikingos investicijos gražą.

Devinta, turint visas aktyvų klasių kainas ir gražas galime sudaryti optimalų portfelį, t.y. portfelį, kuris uždirba daugiausiai turėdamas 0,5% metinį standartinį nuokrypį. Tada grįžus prie aštunto punkto suskaičiuojamos visos portfelio charakteristikos. Optimalūs portfeliai suskaičiuojami kiekvienam tirtu laikotarpiu mėnesiui. Taigi, nepaisant investavimo horizonto, portfelis perbalansuojamas kas mėnesį taip investicijų valdymą papildant vis naujesne informacija. Gauti rezultatai pateikti 4.2 skyriuje.

3.2.1. Vektorinė autoregresija

Dažnai finansuose tiriama rodikliai nėra vienmačiai arba vienmačių atsitiktinių dydžių skirstiniai duoda permažai informacijos gauti tinkamą rezultatą. Tokiu atveju daugiamačių skirstinių modeliavimas labai padeda. Dažnai tokių tipo skirstiniams modeliuoti naudo-

jama vektorinė autoregresija, žymima $VAR(p)$, kur p yra modelio eilė, pasakanti kokios didžiausios eilės vėliniai rekursiškai nusako kintamųjų reikšmes. Šis modelis, tai vienmačio autoregresinio modelio $AR(p)$ generalizacija. Pažymėkime $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ k -matį atsitiktinį vektorių, $X_t = (X_{t1}, \dots, X_{tk})'$.

Vektorinė autoregresija, $VAR(p)$. Procesas $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinamas p eilės vektorinės autoregresijos procesu, žymimu $VAR(p)$, jei jis yra stacionarus ir gali būti užrašytas formule:

$$X_t = \nu + \Phi_1 X_{t-1} + \dots + \Phi_p X_{t-p} + Z_t, \quad (6)$$

čia $Z_t \sim BT(0, \Sigma)$, $\Phi_i, i = 1, \dots, p$ yra $k \times k$ dydžio koeficientų matricos, o $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)'$ konstantų vektorius [27].

Visi $VAR(p)$ proceso $X_t = (X_{t1}, \dots, X_{tk})'$ tiriama atsitiktiniai vektoriai $X_{ti}, i = 1, \dots, k$ turi būti integruoti ta pačia eile.

Integruotas procesas. Atsitiktinė seka $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ vadinama (p, d, q) eilės autoregresijos slenkamojo vidurkio integruotu procesu (čia $d = 1, 2, \dots$), jeigu skirtumai $(1 - B)^d X_t$ tenkina $ARMA(p, q)$ lygtį, t.y.

$$\Phi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)Z_t.$$

Čia $Z_t \sim BT(0, \Sigma)$. Tokį modelį žymėsime $ARIMA(p, q)$.

Stacionarus procesas. Daugiamatė k eilės atsitiktinė seka $X_t = (X_{t1}, \dots, X_{tk})'$ vadinama stacionaria, jei:

1. $\mu_t = \mu \forall t$, t.y. vidurkis nepriklauso nuo laiko
2. $\Gamma(t + h, t) = \Gamma(h, 0) := \Gamma(h) \forall t, h$, t.y. kovariacija tarp atsitiktinių dydžių nepriklauso nuo laiko, tik nuo tarpo dydžių tarp jų,

čia, $\mu := EX_t$ – k -matis atsitiktinių dydžių vidurkių vektorius,

$\Gamma(h) := E(X_{t+h} - \mu_{t+h})(X_t - \mu_t)'$ – $k \times k$ dydžio kovariacijų matrica.

3.2.2. Palūkanų kreivės parametrizavimas

Palūkanų kreivės prognozavimas yra dažnas uždavinys tarp institucinių investuotojų. Kreivę atspindi daug skirtingo termino palūkanų normų, tačiau, prognozuojant visą kreivę, galima išvengti pavienių taškų analizės ir pritaikyti 3 faktorių modelį [5]. Šis modelis leidžia išgauti skirtingas kreives formas ir yra aprašomas lygtimi:

$$y(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} + \beta_{3t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right), \quad (7)$$

čia $\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}$ – koeficientai, $\lambda_t = 0,0609$. Parametrai $\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}$ gali būti interpretuojami kaip kreivės lygio (L), statumo (S) ir kreivumo (C) parametrai arba kaip ilgo, vidutinio ir trumpo termino komponentės. Pastarieji pavadinimai geriau paaiškinami panagrinėjus funkcijas esančias šalia jų (žr. grafiką nr. 9). Funkcija esanti šalia β_{1t} koeficiento yra lygi vienam, todėl nesikeičia visoje apibrėžimoje srityje ir gali būti interpretuojama kaip lygio arba ilgo termino komponentė, nes įprastai, esant normaliai ekonominei situacijai, ilgo termino palūkanos yra didžiausios. Funkcija dauginama iš β_{2t} koeficiento yra mažėjanti, taigi, daugiausiai svorio turi trumpo termino palūkanoms, o ilgo – mažiausiai. Tokia funkcija gerai apibūdina kreivės statumą. Trečioji funkcija prasideda nulyje, yra iškyla į viršų ties vidutiniu terminu ir konverguoja į nulį ilgu laikotarpiu, taigi, geriausiai apibūdina vidutinio termino palūkanas ir kreivės išlenktumą. Likęs λ_t parametras nusako, kaip greitai funkcija šalia β_{2t} mažėja ir kada funkcija šalia β_{3t} pasiekia savo maksimumą. Pagal autorių rekomendacijas parametras nustatomas konstanta lygia 0,0609 ir laikui bėgant nekinta.

3.2.3. Akcijų modelis

Akcijų gražą galima išskaidyti į 2 komponentes: gražą, gautą iš dividendų, ir gražą, uždirbtą iš kainos pokyčio rinkoje. Pažymėkime $\bar{D}_{t+1/12}$ mėnesinius dividendus, uždirbtus per mėnesį $t + 1/12$, o metinius dividendus išmokėtus per t metus pažymėkime D_t . Tada galima užrašyti:

$$D_t = \sum_{i=0}^{11} \bar{D}_{t-i/12}.$$

Logaritmines mėnesines akcijų indekso gražas dėl kainos pokyčio pažymėkime:

$$\bar{r}_{t+1/12} = \ln \left(\frac{P_{t+1/12} + \bar{D}_{t+1/12}}{P_t} \right).$$

Andrew Ang savo straipsnyje [1] pateikia $VAR(1)$ modelį, kuris atsižvelgia į šias dvi komponentes. Jo sudarytame modelyje yra trys metiniai rodikliai: logaritminis dividendų pajamingumas:

$$dy_t = \ln \left(\frac{D_t}{P_t} \right), \quad (8)$$

logaritminis dividendų augimas

$$dg_t = \ln \left(\frac{D_t}{D_{t-1}} \right), \quad (9)$$

ir logaritminė akcijų indekso graža dėl kainos pokyčio

$$r_t = \sum_{i=0}^{11} \bar{r}_{t-i/12}. \quad (10)$$

Straipsnyje bandoma dividendų pajamingumu paaiškinti dividendų augimą, pabrėžiama, kad logaritminis dividendų pajamingumas geriau prognozuoja dividendų augimą, nei tiesiog dividendų lygis. Taip pat randama, kad logaritminis dividendų pajamingumas geriau prognozuoja būsimą logaritminį dividendų augimą nei viso indekso grąžą. Išnaudojant šį faktą, siekiantį tiksliau paaiškinti akcijų grąžą, sudaromas VAR(1) modelis trimis faktoriais:

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \epsilon_t. \quad (11)$$

Čia, $X_t = (dy_t, dg_t, r_t)^T$, β_0 – 3×1 dydžio konstantų vektorius, β_1 – 3×3 dydžio koeficientų matrica, o ϵ_t – modelio paklaidos.

3.2.4. Entropy Pooling

„Entropy Pooling“ – metodas, skirtas persverti simuliuotų skirstinių rinkinį taip, kad gautas rinkinys atspindėtų įvedamus rinkos lūkesčius ir kuo mažiau pakeistų pradinę prognozę (skirstinių simuliacijų rinkinį). Šis būdas detalai yra aprašytas A. Meucci straipsnyje [18]. Tarkime, turime J kartų simuliuotų N dydžio atsitiktinių vektorių, kur kiekviena koordinatė atspindi skirtingos obligacijos palūkanų normą. Taigi turime $J \times N$ dydžio matricą V , kur kiekvienai eilutei priskirtas svoris yra lygus $\frac{1}{J}$. Šio metodo esmė, kad lūkesčius į tam tikro kintamojo, ar viso vektoriaus vidurkį (taip pat įmanoma ir dispersijai, kitiems momentams ar visam detalai nusakytam skirstiniui) galima įvesti neperkainuojant aktyvų, o pakeičiant simuliacijų svorius. Mūsų atveju iš pseudo investicijų palūkanų normų išrinksime 3 mėnesių ir 10 metų p.n., nes tik joms turime ekonomistų lūkesčius ir pagal tai persversime dvimatį jų skirstinį. Gautas tikimybes panaudosime visų pseudo investicijų skirstiniams persverti. Tarkime, $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ yra lūkesčiai palūkanų normų vidurkiams, tada nauji svoriai \tilde{p} turi tenkinti lygybę:

$$V^T \tilde{p} = a.$$

Kaip rašo straipsnio autorius, norint įvesti bet kokius naujus apribojimus skirstiniams ir juos kuo mažiau pakeisti, reikia minimizuoti skirtumus tarp skirstinių apibūdinanti dydį – entropiją.

Entropija. Tarkime X ir Y yra tolydūs atstiktiniai vektoriai su daugiamačiais tankiais f_X ir f_Y , tada

$$\varepsilon(f_X, f_Y) = \int f_X(x) [\ln f_X(x) - \ln f_Y(x)] dx, \quad (12)$$

vadinama šių atsitiktinių vektorių entropija.

Mūsų tiriami dydžiai yra diskretūs, todėl entropija skaičiuojama kaip suma, o tankio

funkcijas keičia J dydžio tikimybių vektoriai, t.y.:

$$\varepsilon(\tilde{p}, p) = \sum_{j=1}^J \tilde{p}_j [\ln(\tilde{p}_j) - \ln(p_j)]. \quad (13)$$

Taigi norint gauti naujas simuliacijų tikimybes lieka išspręsti minimizavimo uždavinį:

$$\tilde{p} = \arg \min_{V^T x = a} \{\varepsilon(x, p)\}. \quad (14)$$

3.2.5. Kopula

Dažnai modeliuose daroma prielaida, kad paklaidos yra nepriklausomi vienodai pagal normalųjį dėsnį su nuliniu vidurkiu pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, tačiau praktikoje tai dažnai nepasitvirtina. Ypač tai tampa svarbu, kai modeliai yra daugiamačiai ir skirtingų kintamųjų invariantai turi nenulines koreliacijas. Šias koreliacijas svarbu išlaikyti, o tai padaro kopulos. Kopula yra matematinė sąvoka, aprašanti priklausomybes tarp dviejų ar daugiau atsitiktinių dydžių. Žodį *Copula* pirmą kartą savo darbe [25] paminėjo Sklar, šis žodis yra išvestas iš lotyniško žodžio *copulare*, reiškiančio sujungti.

Kopula. Funkcija $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ vadinam kopula, jei ji tenkina šias savybes:

1. $C(u_1, \dots, u_d)$ yra didėjanti kiekvienam kintamajam $u_i, i \in 1, \dots, d$;
2. $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ visiems $1 \leq i \leq d$;
3. C visiems $a_i \leq b_i, 1 \leq i \leq d$ tenkina keturkampio nelygybę:

$$\sum_{i_1}^2 \dots \sum_{i_d}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} C(u_{1, i_1}, \dots, u_{d, i_d}) \geq 0, \quad (15)$$

Čia $u_{j,1} = a_j, u_{j,2} = b_j$.

Antra vertus, funkcija turi reikšmingą ir mums labai svarbią sąsają su daugiamačiais skirstiniais. Sklar suformulavo ir įrodė tokią teoremą [20].

Sklaro teorema. Tarkime, F yra d -matė pasiskirstymo funkcija su F_1, \dots, F_d marginaliniais skirstiniais. Egzistuoja kopula C tokia, kad:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (16)$$

visiems $x_i \in [-\infty, \infty], i = 1, \dots, d$. Jei F_i yra tolydi $\forall i = 1, \dots, d$, tai C yra vienintelė, kitu atveju C yra apibrėžta tik vektoriaus (F_1, F_2, \dots, F_d) srityje. Kita vertus, jei F_1, \dots, F_d yra tolygiųjų atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijos, o C yra kopula, tai F apibrėžta (16) lygtimi yra d -matė pasiskirstymo funkcija su marginaliais skirstiniais F_1, \dots, F_d .

Būtent ši teorema leidžia išlaikyti marginalinių invariantų skirstinių savybes prognozuojant. Kadangi invariantai nėra tolygiai pasiskirstę, ko reikalauja teorema, tai duomenis modifikuojame pasinaudoję jau turimomis empirinėmis pasiskirstymo funkcijomis:

$$u_1, \dots, u_N \rightarrow F_1(u_1), \dots, F_N(u_N) \sim U[0, 1] \quad (17)$$

Pasiskirstymo funkcijos reikšmės panaudojamos mažiausio tikėtino metodo gauti kopulą, o gavus, Monte Carlo būdu simuliuojamos kopulos reikšmės. Kernelio funkcija panaudojama grįžti prie invariantų. Taigi gavome N invariantų vektoriaus simuliacijų, kurios išlaikė marginalinių skirstinių savybes. Gautos prognozės toliau naudojamos TAA modelio sudarymui aprašamame pagrindinėje 3.2 skyrius dalyje.

3.2.6. Režimų pasikeitimo modelis

Palūkanų normos, kaip ir kiti rinkų rodikliai, priklauso nuo daug išorinių faktorių, todėl jų prognozavimas yra toks sudėtingas. Numatyti visus rinkas veikiančius faktorius neįmanoma, nes tai gali būti įtakingų žmonių pasisakymai ar *force majeure* įvykiai, tačiau galima identifikuoti rinkos būsenas. Nielsen Goldman Sachs išleistame tyrime [22] aprašo tris galimus rinkos režimus:

1. Stabilus, kai akcijos ir obligacijos generuoja teigiamas grąžas su mažiausiu kintamumu.
2. Krizinis, kai akcijų kainos krenta, o kintamumas išauga.
3. Atsigavimo, kai akcijų ir obligacijų grąžos būna didžiausios.

Rinkos visada yra viename iš šių režimų, todėl svarbu identifikuoti šiuo metu esantį ir prognozuoti galimą perėjimą investavimo horizonte. Režimai keičiasi dviejų tipų ciklais:

1. Mini ciklu tarp atsigavimo ir stabilaus režimų.
2. Pilnu ciklu tarp visų trijų režimų.

Atlikus kelis modelio bandymus paaiškėjo, kad atsigavimo režimas trunka labai trumpai, todėl jį sunku išnaudoti sudarinėjant TAA modelį. Tolimesniame darbe tarsime, kad rinkos režimai keičiasi tarp krizinio ir stabilaus. Modelis sudarytas remiantis Perlin sukurtu Matlab programos kodu [24] su Ding patobulinimu [6]. Režimų pasikeitimų modelio užduotis – vertinti režimų tikimybes. Taigi modelis yra paremtas vektorine autoregresija su dviem parametru rinkiniais (stabiliam ir kriziniam režimams) ir laike kintančia perėjimų matrica. Regresija sudaroma S&P 500 indekso ir ilgesnių nei vieneri metai trukmės JAV vyriausybės obligacijų indeso G0Q0 grąžoms [9]. Tarkime $X_t = (X_{1t}, X_{2t})$ yra mėnesinių grąžų matrica laiko momentui t , kur X_{1t} yra akcijų indekso grąža, o X_{2t} obligacijų

idekso grąža. Tada režimų pasikeitimo modelis užrašomas kaip VAR(1):

$$X_t = \beta_{0,S_t} + \beta_{1,S_t} X_{t-1} + \varepsilon_{S_t}, \quad (18)$$

čia S_t nusako režimą laiko momentu t :

$$S_t = \begin{cases} 1, & \text{stabilus,} \\ 2, & \text{krizinis.} \end{cases} \quad (19)$$

Tuo tarpu paiklaidos skirtingais režimais pasižymi skirtingu išsibarstymu:

$$\begin{cases} \epsilon_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2), \\ \epsilon_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2). \end{cases} \quad (20)$$

Režimą S_t nusakančios tikimybės aprašomos Markovo grandinės su laike kintančia perėjimo matrica.

$$\begin{aligned} p_t &= P(S_t = 1 | S_{t-1} = 1, y_{t-1}) = p(y_{t-1}), \\ 1 - p_t &= P(S_t = 2 | S_{t-1} = 1, y_{t-1}) = p(y_{t-1}), \\ q_t &= P(S_t = 1 | S_{t-1} = 2, y_{t-1}) = q(y_{t-1}), \\ 1 - p_t &= P(S_t = 1 | S_{t-1} = 2, y_{t-1}) = 1 - q(y_{t-1}). \end{aligned}$$

Čia y_{t-1} rinkos kintamųjų, kuriais nusakomi režimai, istorija iki laiko momento $t - 1$. Detaliau dvimatis atvejis aprašytas Perez ir Timmermann [23].

4. Rezultatai

Pirmas ir paprasčiausias ekonomistų lūkesčių tikslumo įvertinimas yra jų palyginimas su palūkanų normomis prognozavimo dieną ir prognozės horizonto pabaigoje. Grafikuose 10, 11, 12 ir 13 (žr. priedą Nr. 2.) pateikiami prognozių ir palūkanų normų prognozavimo dieną skirtumai. Ekonomistai abiem horizontais linkę būti šališki ekonominės situacijos gerėjimui ir tikisi p.n. didėjimo. Pesimizmas obligacijų kainoms ryškesnis ilgesniam horizontui. Prognozuojamų palūkanų lygis yra net aukštesnis lyginant ir su tomis p.n., kurios realizavosi po numatyto horizonto (žr. grafikus nr. 14, 16, 15 ir 17), kur didžiausi skirtumai fiksuoti po 2000 ir 2007 metų krizių. Detaliau šie skirtumai 3 mėnesių palūkanų normoms 3 mėnesių horizontui pateikti 24 grafike, kuris režimo pasikeitimo modelio pagalba patvirtina, kad ekonomistų spėjimų kokybė priklausė nuo istorino laikotarpio. Minėti pokriziniai laikotarpiai išsiskyrė tuo, kad Fedaralinių rezervų banko komiteto nutarimu buvo mažinamos palūkanų normos ir aiškiai komunikuojama ilgo laikotarpio pinigų politika. Didžiausi trumpo termino palūkanų normų skirtumai per trijų mėnesių horizontą tirtu laikotarpiu fiksuoti šiais pokriziniais periodais (žr. grafiką. 25). Pastarieji grafikai rodo, kad ekonomistai yra metodiškai linkę prognozuoti palūkanų normų kilimą, o tai duoda didžiausius išsiskyrimus palūkanų mažinimo laikotarpiais prasidėjus ekonominėms krizėms.

4.1. Brier rodikliai

Brier rodikliai skaičiuoti 6 skirtingais būdais (3 pagal skirstinio sudarymo būdą ir 2 pagal kategorijų skaičių). Rezultatai pateikti 2 ir 3 paveikslėliuose priede Nr. 1.. Lentelėse naudojami stulpelių pavadinimai: $3Mv3M$ – 3 mėnesių palūkanų normos po 3 mėnesių, $3Mv12M$ – 3 mėnesių palūkanų normos po metų, $10Yv3M$ – 10 metų palūkanų normos po 3 mėnesių, $10Yv12M$ – 10 metų palūkanų normos po metų, I ir II būdai nurodo skirtingą skirstinių konstravimą – I būdas apima 1.1, 1.2 ir 2.1 punktus, o II – 1.3 ir 2.2; eilučių pavadinimuose *CF* žymi „Consensus Forecasts“, t.y. ekonomistų prognozes. Brier rodikliai ekonomistų lūkesčiams suskaičiuoti skirtingais režimais, kai atitinkamas režimas buvo prognozavimo metu – pažymėta *CF_0 rež. 1* ir *CF_0 rež. 2* ir kai atitinkamas režimas buvo po tiriamo laikotarpio *CF rež. 1* ir *CF rež. 2*. Lentelės atskelidžias kelis rezultatus:

- QPS reikšmės nesiekė 1, o RPS reikšmės – 1 ir 2 atitinkamai 3 ir 5 rėžių atveju. Tai reiškia, jei palūkanų normų prognozės būtų buvę darytos konkrečiai kategorijai su tikimybe vienas, tai daugiau nei pusė spėjimų būtų buvę teisingų.
- Trumpo termino palūkanų prognozės buvo tikslesnės.
- Trijų intervalų modelis davė geresnius rodiklius, o skirtumas tarp QPS ir RPS rodė, kad didesnė dalis prognozių realizavosi baziniame scenarijuje.

- Penkių intervalų modelyje daugiau reikšmių iškrito iš centrinio intervalo į kraštinius, tačiau prognozės turėjo išlikti didžiąja dalimi išsiskirsčiusios netoli vidurkio, nes rodikliai išliko nedideli.
- Geriausiai ekonomistai prognozavo trumpo termino palūkanas trijų mėnesių horizontu, visais atvejais tai buvo geresnė prognozė nei įskaičiuota rinkoje. Ilgesniu horizontu trijų mėnesių p.n. lūkesčiai buvo geresnės prognozės nei išankstinės palūkanų normos, tačiau ne tokiais dideliais skirtumais kaip trumpu horizontu. I ir II būdas atspindėjo tą pačią tendenciją, tačiau II būdas rodė didesnius skirtumus tarp rinkos ir ekonomistų prognozių rodiklių.
- Jei prognozės buvo darytos normalios ekonominės situacijos metu, jos buvo tikslesnės (CF_0). Jei prognozės išsipildymo laikotarpiu nebuvo krizės, tai prognozės irgi buvo geresnės (CF).
- Žemo kintamumo laikotarpiu nuo 2008 metų, kai Federalinių rezervų bankas sumažino p.n. dėl prasidėjusios krizės ir aiškiai komunikavo būsimą ilgo laikotarpio pinigų politiką, trijų mėnesių p.n. prognozės buvo tikslesnės, nei iki 2008 (žr. 4 ir 5). Tuo tarpu dešimties metų p.n. prognozių skirtumai periodais iki ir po 2008 metų tiek daug nesiskyrė, nes, kaip įprasta, pinigų politika labiau lemia trumpo termino palūkanų normų lygius, o ilgo termino palūkanų normos labiau priklauso nuo paklausos ir pasiūlos.

4.2. Taktinė aktyvų alokacija

Aktyvų alokaciją lemia daug skirtingų apribojimų. Norint pilnai suprasti, kaip modelis elgiasi, reikia iširti skirtingų apribojimų atvejus. Pirmiausia, tai du skirtingi investavimo horizontai – 3 ir 12 mėnesių. Antra – apribojimas akcijų prekybai. Tiriama ekonomistų lūkesčiai surinkti tik palūkanų normoms, todėl patikrinome, kaip modelis priima sprendimus, kai nėra kitų aktyvų klasių – kokios MFT pozicijos JAV VVP kreivėje priimanos, ar sudaromos kreivės formos pozicijos. Portfelio gebėjimas parinkti ne pozicijos dydį, bet laiką kada investuoti, patikrintas lyginant jį su kontroliniu portfeliu, kuris sudaromas žinant visas tiriamo laikotarpio portfelio priimtas pozicijas, t.y. portfelis, sudarytas iš vidutinių pozicijų skirtinguose indeksuose.

Pirmu atveju tirtos investicijos 3 mėnesių horizontui. Gautos investavimo charakteristikos pateiktos paveikslėlyje nr. 6 (lentelėje pateikti 95% VaR ir CVaR rodikliai). Apribojus akcijų prekybą sukurtas portfelis vidutiniškai per metus uždirbo 11 bazinių punktų (bazinis punktas – šimtoji procento dalis) daugiau nei lyginamasis indeksas sukurdamas papildomą 29 bazinių punktų kintamumą, o vidutinis portfelis per metus vidutiniškai prarado 2 bazinius punktus. Taigi modelis sugebėjo pelningai parinkti momentus, kuriais reikia prisiimti pozicijas. Modeliui leidus prekiauti akcijomis – rizikinga aktyvų klase,

kuri per ilgą laikotarpį yra linkusi turėti didelę teigiamą grąžą, grąžos turėjo didėti, tačiau grąža sumažėjo iki 7 bazinių punktų, o vidutiniai nuostoliai galintys atsirasti su 5% (CVaR) tikimybe išaugo daugiau nei dvigubai – nuo 35 bazinių punktų iki 80. Ilgesnio horizonto investicijas apribojimai veikė analogiškai (žr. 7 lentelę), tačiau vidutinė metinė grąža buvo daugiau nei du kartus mažesnė, o su 5% galimi vidutiniai nuostoliai išaugo apie tris kartus. Taigi, lyginant skirtingų horizontų investicijas su tuo pačiu mėnesiniu perbalansavimu, trumpesnio horizonto portfelis buvo pelningesnis, o tai sutampa su Brier rodiklių atsakymais, kad ekonomistų lūkesčiai trumpesniu terminu yra tikslesni.

Dėmesį visais tirtais atvejais atkreipia ne itin aukšta nors ir teigiama vidutinė metinė grąža. Kaip pateikta priede Nr. 2. esančiuose 10 ir 11 grafikuose, per tirtą 25 metų laikotarpį ekonomistai beveik visada laukė p.n. didėjimo, o tai galėtų būti interpretuota kaip proga priimti trumpą poziciją JAV vyriausybės vertybiniais popieriais, tačiau pažiūrėjus į grafikus 18 ir 19 matyti, kad priimtos MFT pozicijos nebuvo tokios vienpusės. Pastaruosiuose grafikuose pridėtos portfelio investicinio vieneto reikšmės nerodo sėkmingo portfelio gebėjimo priimti MFT pozicijas – portfelio vertė smarkiai svyruoja nepriklausomai nuo pozicijos. Nepriklausomai ar leidžiama prekiauti akcijomis išskirtinai gerai atrodo laikotarpis nuo 2009 metų, kai rinka perėjo į mažo kintamumo aplinką (žr. grafiką nr. 22, 3 mėnesių p.n.). Panašios tendencijos pastebimos tikrinant modelį vienu metų horizontui (žr. 20 ir 21 grafikus). Pastarieji grafikai atskleidžia, kad nepriklausomai nuo horizonto ar apribotos akcijų prekybos laikotarpis po 2009 yra išskirtinai geras. Grafikas 28, atspindintis trumpo horizonto be akcijų portfelį, parodo, kad išskirtinai šiuo laikotarpiu modelis priiminėjo kreivės išgaubtumo pozicijas. Tokia pozicija atspindi požiūrį, kad vidutinio laikotarpio palūkanų normos kils greičiau, nei trumpo ar ilgo laikotarpio.

Pateiktame grafike nr. 24 matyti lūkesčių ir p.n. po numatyto horizonto skirtumas skirtingais režimais. Akivaizdu, kad didžiausi nuokrypiai nuo prognozės įvyko tada, kai apklausos buvo darytos antro režimo metu. Ir ne tik tai – spėdami antro režimo metu ekonomistai, išskirtinai nei ramiau laikotarpiu, buvo linkę manyti, kad palūkanos turi būti gerokai didesnės, nei ekonominė situacija diktuoja. Tai leidžia manyti, kad apklausti ekonomistai negali lanksčiai reaguoti į didelius ekonominius ir rinkų sukrėtimus. Matant ekonomistų apklausų optimizmą, nutarėme patikrinti pesimistinę apklausų duodamą rezultatą, t.y. prognozei naudosisime ne vidurkį, bet 16,5 procentilį (jei skirstinį išskaidytume į 3 intervalus-scenarijus, tai 16,5 procentilis rodytų pesimistinio scenarijaus medianą). Šio bandymo rezultatai buvo beveik identiški vidurkio (bazinio scenarijaus) tyrimui ap- tarto anksčiau. Tai patvirtina, kad ekonomistų apklausos gali būti sudarytos iš medianų skirstinio, o skirtingi skirstinių sudarymo būdai nepadėjo atskleisti pilno pasiskirstymo.

Išvados

Šio magistro darbo tikslas buvo ištirti ekonomistų lūkesčių JAV palūkanų normoms tikslumą ir įvertinti jų panaudojimo poveikį taktinės aktyvų alokacijos modeliui. Pirminiai tyrimai parodė, kad ekonomistai linkę būti šališki ekonomikos augimui ir pervertinti palūkanų normų kilimą – dažnai tokios aukštos palūkanos, kaip rodė apklausos, nesirealizavo. Didžiausi lūkesčių ir tikrų palūkanų normų skirtumai atsirado iškart po 2000 ir 2007 metų krizių. Nepaisant blogos ekonominės situacijos apklausos rodė palūkanų normų kilimą, o Federalinių rezervų bankui pradėjus smarkiai mažinti palūkanas šie skirtumai išaugo. Todėl atrodo, kad ekonomistai nesugebėjo lanksčiai reaguoti į besikeičiančią investavimo aplinką ir lūkesčiai pokriziniu laikotarpiu neveikė taip gerai, kaip geroje ekonominėje situacijoje. Suskaičiavus Brier rodiklius paaiškėjo, kad ekonomistai geriau prognozuoja trumpu horizontu ir geriau tą daro trumpo termino palūkanoms. Ekonomistai pastarąsias p.n. prognozavo geriau nei rinka, tačiau dešimties metų p.n. lūkesčiai nebuvo geresnės prognozės nei išankstinės palūkanų normos. Horizontalo vertinimas Brier rodikliais sutapo su istoriniu taktinės aktyvų alokacijos modelio testu – portfelio, optimizuoto trijų mėnesių horizontui, perteklinė grąža buvo didesnė nei portfelio su vienu metų horizontu. Abiem atvejais ekonomistų prognozės buvo geresnės nei rinkos, nes portfelio perteklinės grąžos buvo teigiamos. Atlikus TAA modelio istorinį testą su lūkesčių mediana ir 16,5% procentiliu pasitvirtino pirminė prielaida, kad apklausos pateikia tik ekonomistų medianų skirstinį ir neatspindi kraštinių atvejų. Taigi, pastebėjus, kad ekonomistų lūkesčiai net ir prastais bandymų atvejais įveikia rinką (uždirba teigiamą perteklinę grąžą) ir yra tikslesni normalioje ekonominėje situacijoje TAA modelį būtų galima patobulinti panaudojant šias savybes. Tokiu atveju, lūkesčiais galima remtis, kai identifikuojamas normalus rinkos režimas, o pasikeitus režimui naudoti kitokias prognozes arba priimti neutralią poziciją lyginamojo indekso atžvilgiu. Akcijų dalį modelyje taip pat būtų galima valdyti atsižvelgiant į rinkoje identifikuojamą režimą. Tyrimas bus tęsiamas su tikrais, o ne teoriniais obligacijų indeksais, naudojama Lietuvos banko SLI. Šiame darbe sukurti principai leis ištirti taktinės aktyvų alokacijos modelį papildytą kitų šalių palūkanų normų prognozėmis. Taip bus galima išnaudoti daugiau informacijos iš Consensus Economics apklausų ir ištirti jų realią naudą Lietuvos banko valdomam taktiniam portfeliui.

Literatūros sąrašas

- [1] Andrew Ang. Predicting dividends in log-linear present value models. *Pacific-Basin Finance Journal*, 20(1):151–171, 2012.
- [2] Gianna Boero, Jeremy Smith, and Kenneth F. Wallis. Scoring rules and survey density forecasts. *International Journal of Forecasting*, 27(2):379–393, 2011.
- [3] Glenn W. Brier. Verification of forecasts expressed in terms of probability. *Monthly weather review*, 78(1):1–3, 1950.
- [4] Consensus Economics. <https://www.consensuseconomics.com/consensus-forecasts-in-business-planning/>.
- [5] Francis X. Diebold and Canlin Li. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of econometrics*, 130(2):337–364, 2006.
- [6] Zhuanxin Ding. An implementation of markov regime switching model with time varying transition probabilities in matlab. *Available at SSRN 2083332*, 2012.
- [7] Edward S. Epstein. A scoring system for probability forecasts of ranked categories. *Journal of Applied Meteorology*, 8(6):985–987, 1969.
- [8] Federal Reserve Bank of St. Louis. <https://fred.stlouisfed.org/series/SP500>.
- [9] ICE Index Platform. <https://indices.theice.com/home>.
- [10] Investopedia. <https://www.investopedia.com/terms/s/sp500.asp>.
- [11] Investopedia. <https://www.investopedia.com/terms/e/etf.asp>.
- [12] Investopedia. <https://www.investopedia.com/terms/i/issuer.asp>.
- [13] Investopedia. <https://www.investopedia.com/terms/t/treasurybond.asp>.
- [14] Investopedia. <https://www.investopedia.com/terms/t/treasurybill.asp>.
- [15] Investopedia. <https://www.investopedia.com/terms/i/institutionalinvestor.asp>.
- [16] Investopedia. <https://www.investopedia.com/terms/c/capitalization.asp>.
- [17] Stephen K. McNees. The uses and abuses of ‘consensus’ forecasts. *Journal of Forecasting*, 11(8):703–710, 1992.
- [18] Attilio Meucci. Fully flexible views: Theory and practice. *Fully Flexible Views: Theory and Practice, Risk*, 21(10):97–102, 2008.

- [19] Attilio Meucci. ‘the prayer’ ten-step checklist for advanced risk and portfolio management. *Ten-Step Checklist for Advanced Risk and Portfolio Management (February 2, 2011)*, 2011.
- [20] Roger B. Nelsen. *An introduction to copulas*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [21] Charles R. Nelson and Andrew F. Siegel. Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of business*, pages 473–489, 1987.
- [22] Anders Nielsen. Hide and seek: Profiting by finding hidden states of financial markets in real time. *GOAL – Global Strategy Paper No. 14*, 2014.
- [23] Gabriel Perez-Quiros and Allan Timmermann. Firm size and cyclical variations in stock returns. *The Journal of Finance*, 55(3):1229–1262, 2000.
- [24] Marcelo Perlin. The matlab package for markov regime switching models. *SSRN*.–2012.–<http://ssrn.com/abstract>, 1714016, 2010.
- [25] Abe Sklar. Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publ. inst. statist. univ. Paris*, 8:229–231, 1959.
- [26] Aldona Skučaitė. Finansinių skaičiavimų konspektas. 2016.
- [27] Ruey S. Tsay. *Analysis of financial time series*, volume 543. John wiley & sons, 2005.
- [28] Victor Zarnowitz and Louis A. Lambros. Consensus and uncertainty in economic prediction. *Journal of Political economy*, 95(3):591–621, 1987.

Priedas Nr. 1.

Lentelės

2 pav. JAV 3 mėnesių ir 10 metų palūkanų normų prognozių QPS rodikliai

QPS	3 percentiliai								5 percentiliai							
	I būdas				II būdas				I būdas				II būdas			
	3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M	3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M	3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M	3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M
CF (1.1)/(1.2)	0,55	0,68	0,79	0,86	0,58	0,62	0,68	0,71	0,74	0,82	0,97	1,03	0,77	0,74	0,85	0,87
CF (1.3)	0,59	0,72	0,80	0,98					0,79	0,92	0,97	1,27				
Išankstinės p.n.	0,75	0,75	0,67	0,71	0,79	0,82	0,67	0,70	0,90	0,84	0,85	0,87	0,93	0,91	0,85	0,87
CF rež. 1 (1.1)	0,52	0,58	0,75	0,84					0,72	0,73	0,97	1,03				
CF rež. 2 (1.1)	0,64	0,95	0,90	0,89					0,81	1,07	0,97	1,04				
CF_0 rež. 1 (1.1)	0,50	0,57	0,78	0,84					0,70	0,71	0,96	1,01				
CF_0 rež. 2 (1.1)	0,72	1,01	0,81	0,91					0,87	1,13	0,98	1,08				

3 pav. JAV 3 mėnesių ir 10 metų palūkanų normų prognozių RPS rodikliai

RPS	3 percentiliai								5 percentiliai							
	I būdas				II būdas				I būdas				II būdas			
	3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M	3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M	3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M	3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M
CF (1.1)/(1.2)	0,31	0,43	0,47	0,52	0,32	0,39	0,42	0,45	0,72	1,00	1,06	1,17	0,73	0,87	0,91	0,96
CF (1.3)	0,33	0,41	0,47	0,57					0,76	1,00	1,07	1,33				
Išankstinės p.n.	0,43	0,47	0,42	0,45	0,47	0,55	0,42	0,45	0,91	1,01	0,91	0,98	0,99	1,21	0,91	0,98
CF rež. 1 (1.1)	0,29	0,37	0,44	0,49					0,68	0,86	1,01	1,14				
CF rež. 2 (1.1)	0,38	0,60	0,56	0,58					0,85	1,43	1,19	1,28				
CF_0 rež. 1 (1.1)	0,27	0,36	0,46	0,48					0,65	0,82	1,03	1,09				
CF_0 rež. 2 (1.1)	0,43	0,65	0,50	0,61					0,94	1,53	1,14	1,41				

4 pav. JAV 3 mėnesių ir 10 metų palūkanų normų prognozių QPS rodikliai

JAV	QPS	3 intervalai								5 intervalai							
		I būdas				II būdas				I būdas				II būdas			
		3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M	3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M	3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M	3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M
Iki 2008	CF (1.)	0,58	0,83	0,83	0,88	0,56	0,71	0,69	0,70	0,76	0,89	0,98	1,02	0,73	0,78	0,83	0,85
	CF (3.)	0,55	0,92	0,84	1,02					0,74	1,06	0,98	1,27				
	Forwards	0,72	0,78	0,70	0,71	0,76	0,90	0,70	0,71	0,85	0,85	0,85	0,87	0,88	0,96	0,85	0,86
Nuo 2008	CF (1.)	0,51	0,42	0,73	0,81	0,62	0,45	0,67	0,74	0,72	0,68	0,95	1,05	0,84	0,67	0,87	0,91
	CF (3.)	0,77	0,40	0,76	0,94					0,94	0,58	0,97	1,20				
	Forwards	0,80	0,69	0,64	0,70	0,84	0,67	0,63	0,69	0,98	0,81	0,84	0,88	1,02	0,83	0,84	0,87

5 pav. JAV 3 mėnesių ir 10 metų palūkanų normų prognozių RPS rodikliai

JAV	RPS	3 intervalai								5 intervalai							
		I būdas				II būdas				I būdas				II būdas			
		3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M	3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M	3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M	3Mv3M	3Mv12M	10Yv3M	10Yv12M
Iki 2008	CF (1.)	0,34	0,55	0,48	0,50	0,33	0,48	0,43	0,44	0,78	1,19	1,07	1,11	0,74	1,04	0,91	0,92
	CF (3.)	0,32	0,54	0,49	0,54					0,76	1,24	1,08	1,25				
	Forwards	0,44	0,57	0,45	0,46	0,48	0,67	0,45	0,46	0,92	1,20	0,96	1,00	1,01	1,42	0,95	0,99
Nuo 2008	CF (1.)	0,27	0,23	0,44	0,54	0,31	0,22	0,41	0,47	0,63	0,67	1,05	1,29	0,71	0,58	0,90	1,03
	CF (3.)	0,41	0,18	0,47	0,62					0,88	0,49	1,11	1,40				
	Forwards	0,42	0,30	0,38	0,44	0,46	0,34	0,38	0,44	0,90	0,69	0,84	0,95	0,97	0,84	0,84	0,96

6 pav. Portfelio su akcijomis charakteristikos. Horizontas – 3 mėnesiai

Horizontas = 3/ metiniai rodikliai	LI	Be akcijų		Su akcijom	
		P	KP	P	KP
		Vidutinė perteklinė grąža		0,11	-0,02
Vidutinė grąža	3,95	4,07	3,93	4,02	4,01
Vidutinis perteklinis st. n.		0,29	0,13	0,28	0,18
Vidutinis st. n.	2,41	2,39	2,33	2,37	2,35
Perteklinis VaR (procentilis)		-0,25	-0,25	-0,50	-0,50
VaR (procentilis)	-0,06	-0,03	0,02	0,17	0,19
Parametrinis VaR perteklinei grąžai		-0,36	-0,23	-0,40	-0,24
Parametrinis VaR	-0,07	0,07	0,04	0,07	0,09
Perteklinis CVaR (procentilis)		-0,35	-0,31	-0,80	-0,62
CVaR (procentilis)	-0,45	-0,47	-0,38	-0,23	-0,24
Parametrinis CVaR perteklinei grąžai		-0,48	-0,28	-0,51	-0,31
Parametrinis CVaR	-1,03	-0,89	-0,90	-0,88	-0,85

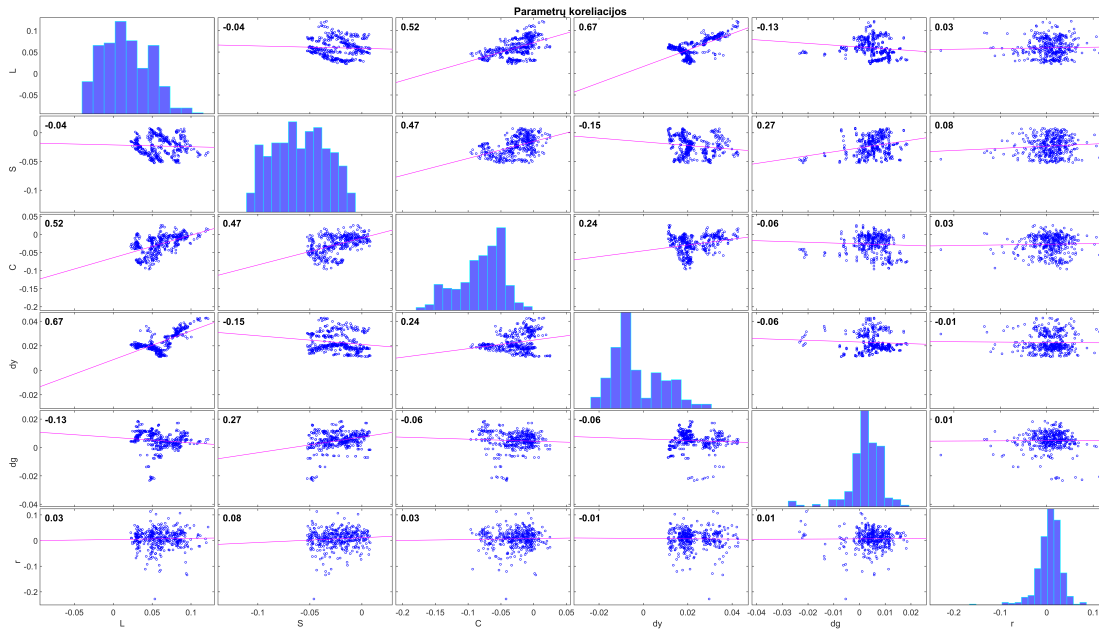
7 pav. Portfelio su akcijomis charakteristikos. Horizontas – 12 mėnesių

Horizontas = 12/ metiniai rodikliai	LI	Be akcijų		Su akcijom	
		P	KP	P	KP
		Vidutinė perteklinė grąža		0,05	-0,06
Vidutinė grąža	3,95	4,00	3,89	3,99	3,98
Vidutinis perteklinis st. n.		0,58	0,22	0,58	0,27
Vidutinis st. n.	2,41	2,30	2,23	2,29	2,26
Perteklinis VaR (procentilis)		-0,79	-0,47	-1,14	-0,73
VaR (procentilis)	-0,06	-0,20	0,08	0,16	0,27
Parametrinis VaR perteklinei grąžai		-0,90	-0,42	-0,91	-0,41
Parametrinis VaR	-0,07	0,16	0,16	0,16	0,20
Perteklinis CVaR (procentilis)		-0,94	-0,54	-1,51	-0,88
CVaR (procentilis)	-0,45	-0,67	-0,29	-0,22	-0,14
Parametrinis CVaR perteklinei grąžai		-1,13	-0,51	-1,14	-0,52
Parametrinis CVaR	-1,03	-0,76	-0,73	-0,75	-0,71

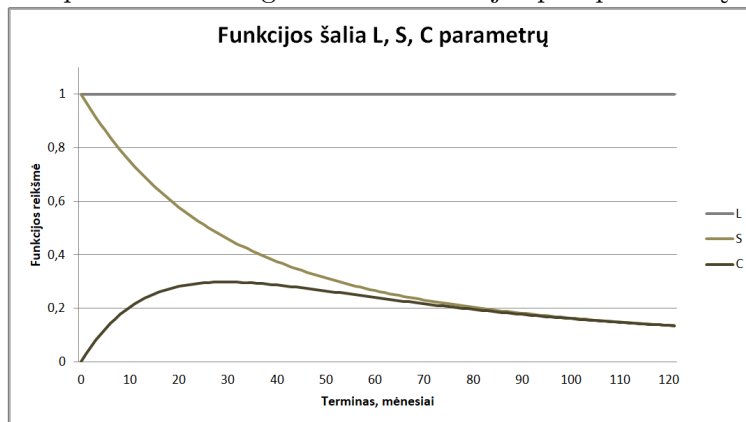
Priedas Nr. 2.

Grafikai

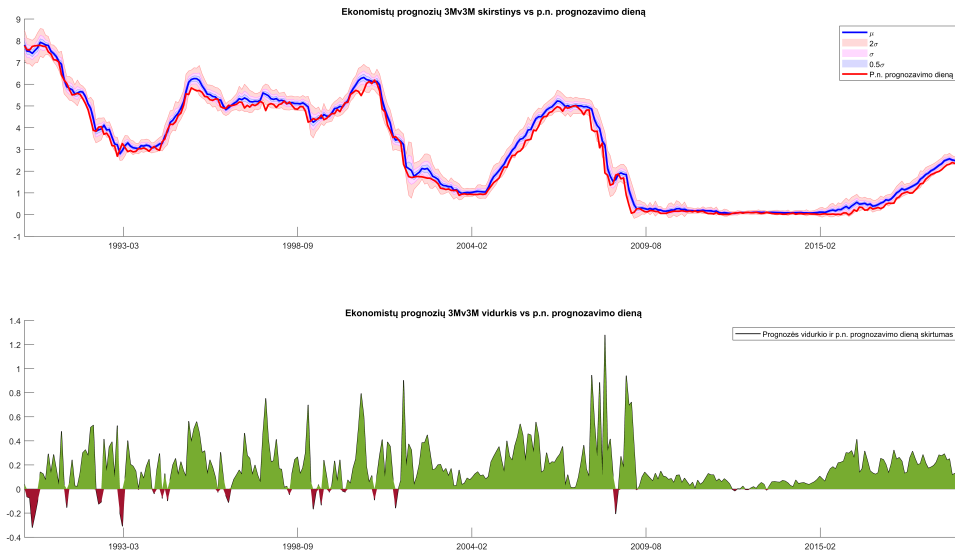
8 pav. Modelio parametru koreliacijos



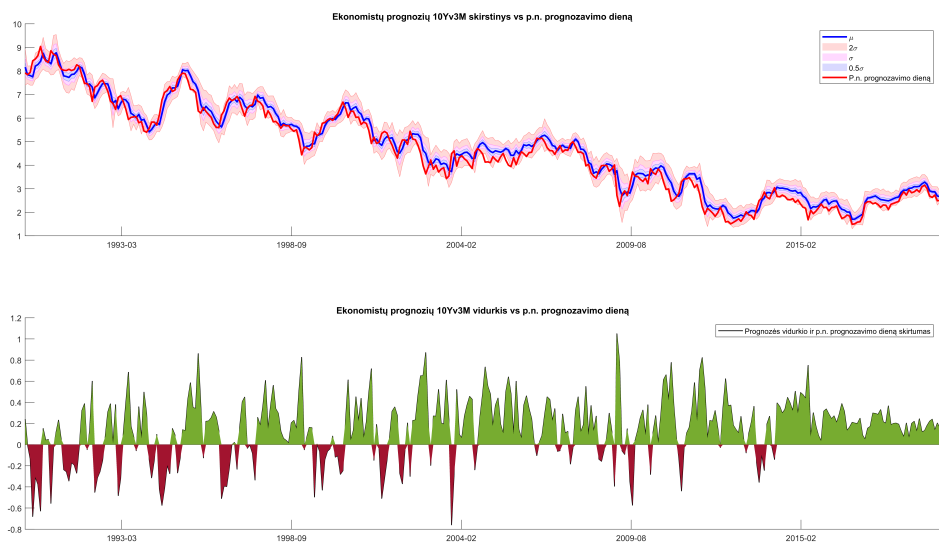
9 pav. Nelson Siegel modelio funkcijos prie parametru



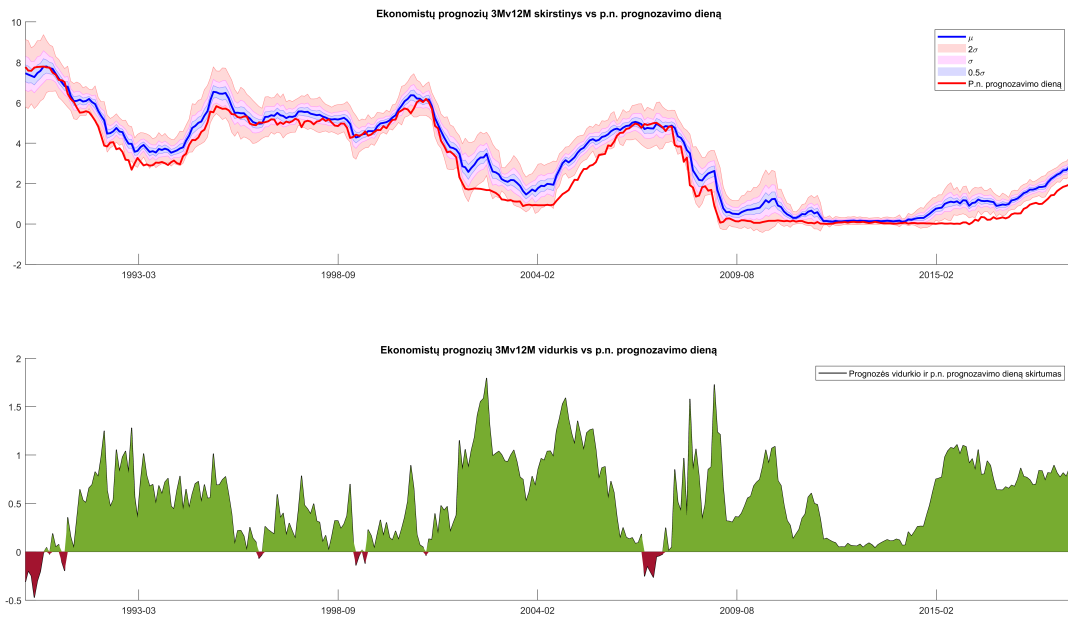
10 pav. Ekonomistų lūkesčiai 3 mėnesių p.n.. Horizontas – 3 mėnesiai



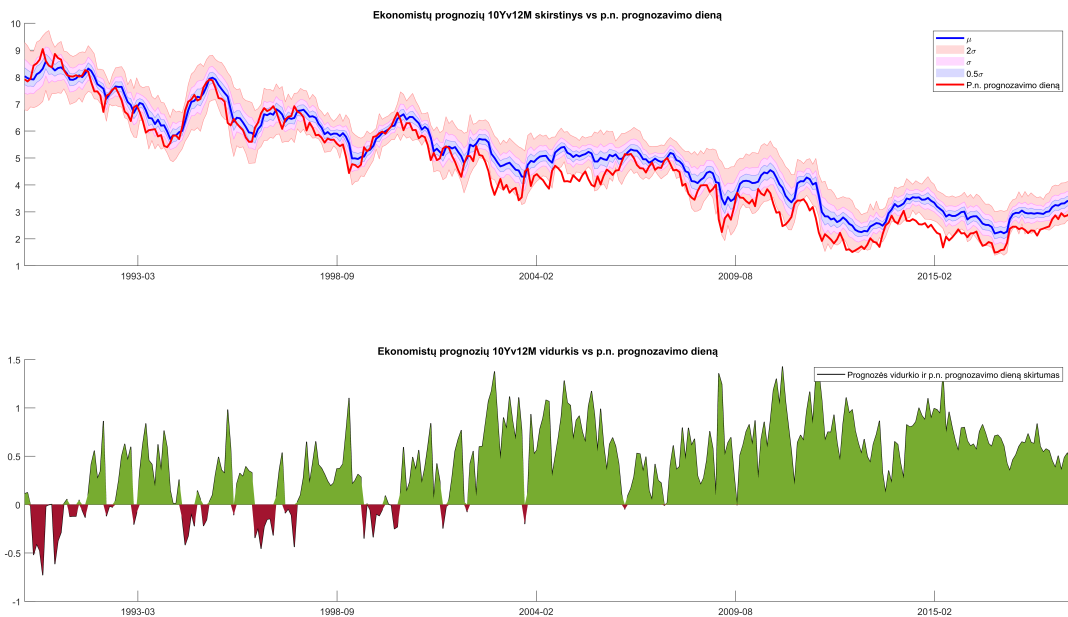
11 pav. Ekonomistų lūkesčiai 10 metų p.n.. Horizontas – 3 mėnesiai



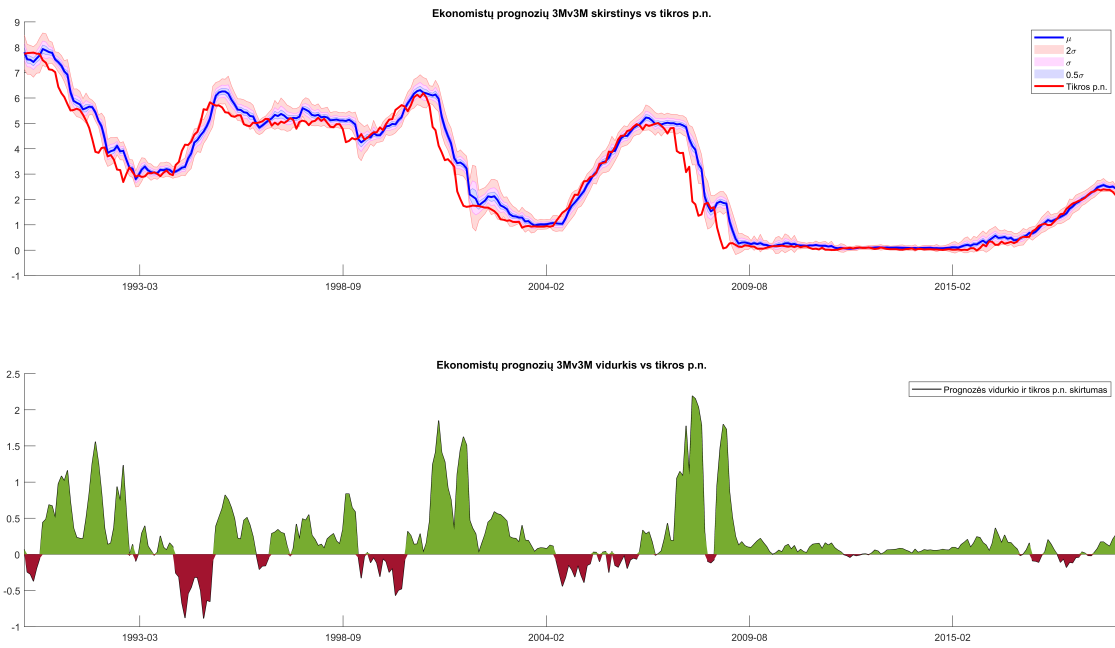
12 pav. Ekonomistų lūkesčiai 3 mėnesių p.n.. Horizontas – 12 mėnesių



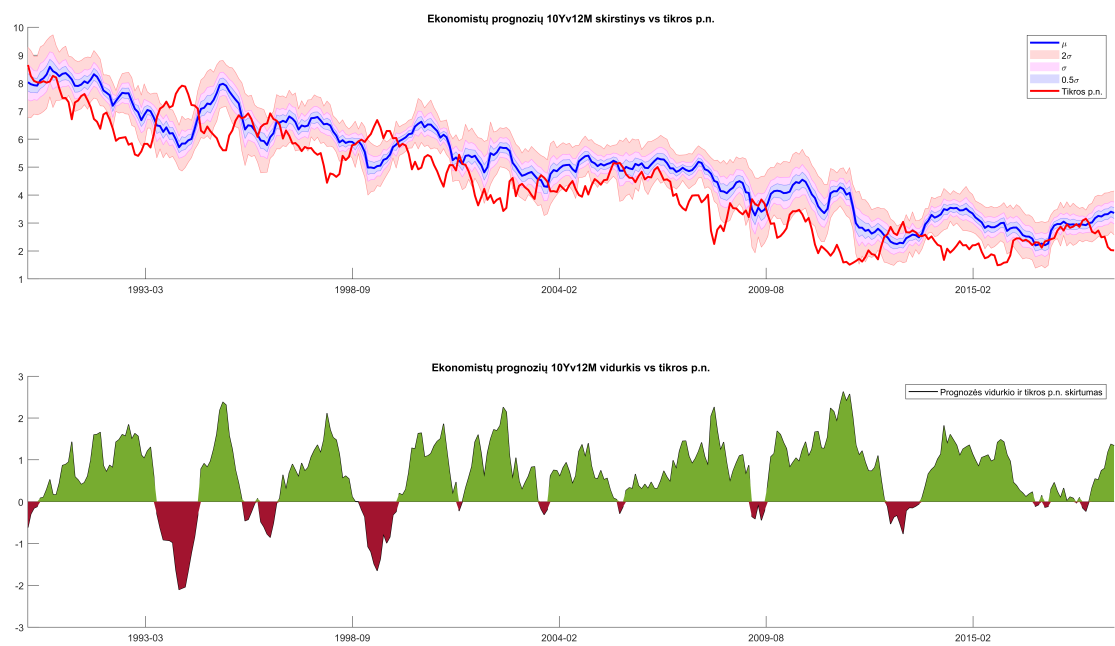
13 pav. Ekonomistų lūkesčiai 10 metų p.n.. Horizontas – 12 mėnesių



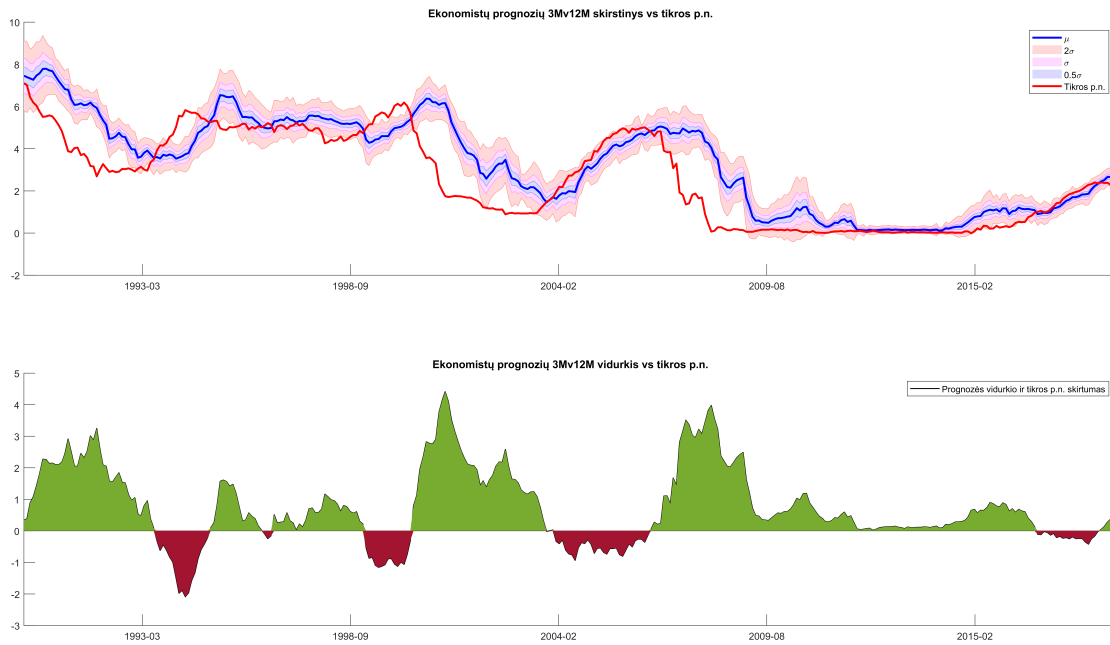
14 pav. Ekonomistų lūkesčiai 3 mėnesių p.n.. Prognozės tikslumas. Horizontas – 3 mėnesiai



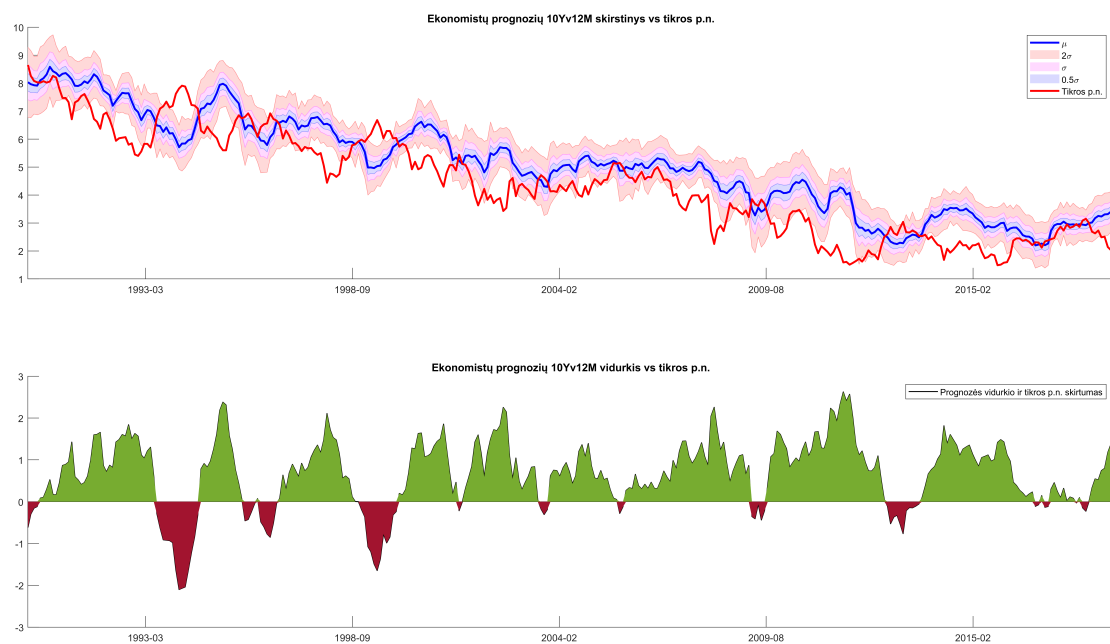
15 pav. Ekonomistų lūkesčiai 10 metų p.n.. Prognozės tikslumas. Horizontas – 3 mėnesiai



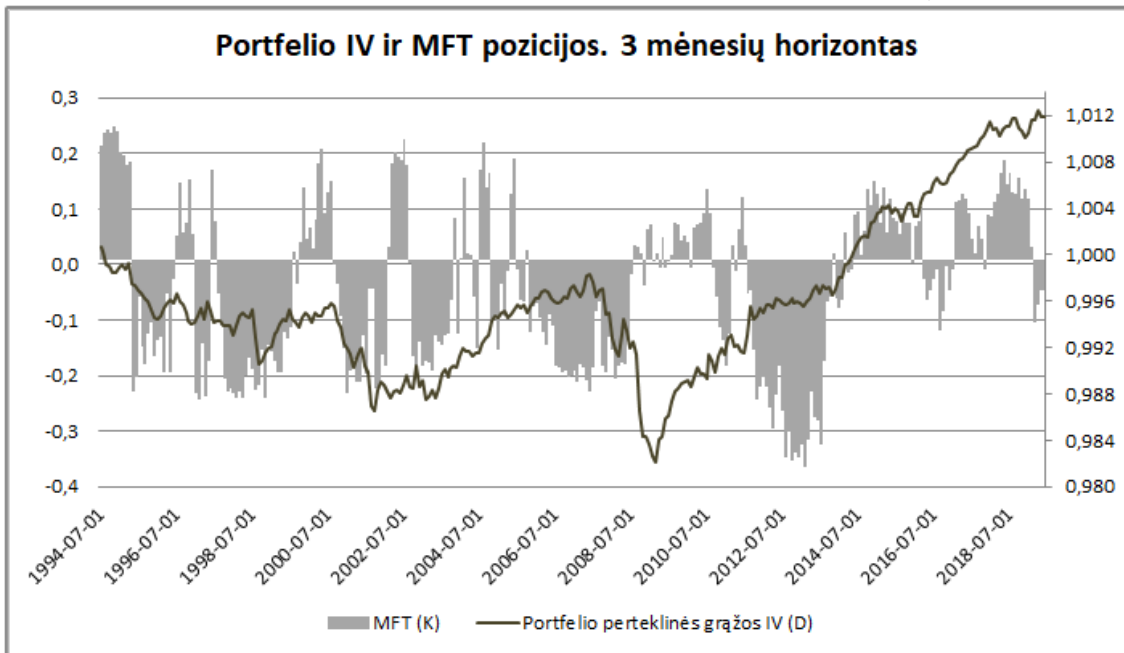
16 pav. Ekonomistų lūkesčiai 3 mėnesių p.n.. Prognozės tikslumas. Horizontas – 12 mėnesių



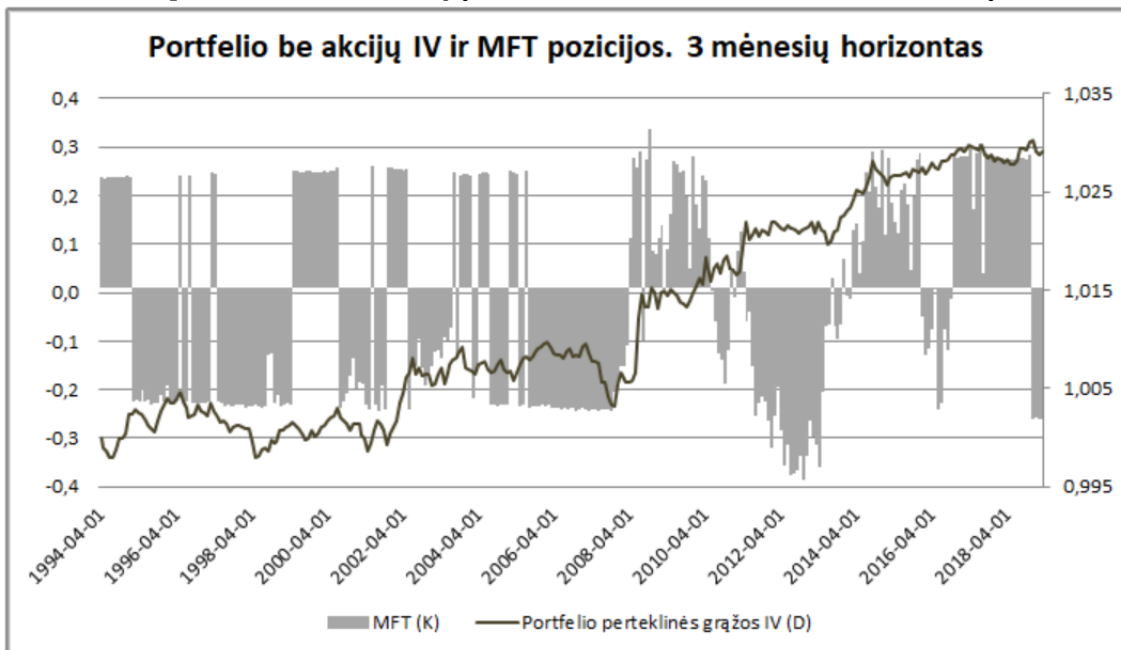
17 pav. Ekonomistų lūkesčiai 10 metų p.n.. Prognozės tikslumas. Horizontas – 12 mėnesių



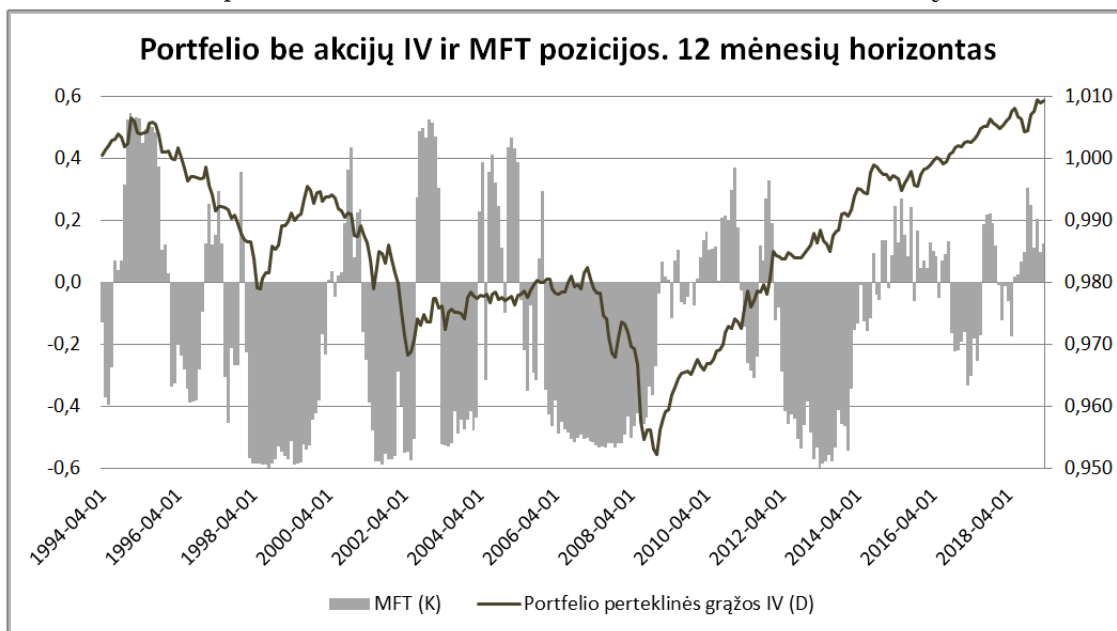
18 pav. Portfelio charakteristikos. Horizontas – 3 mėnesių



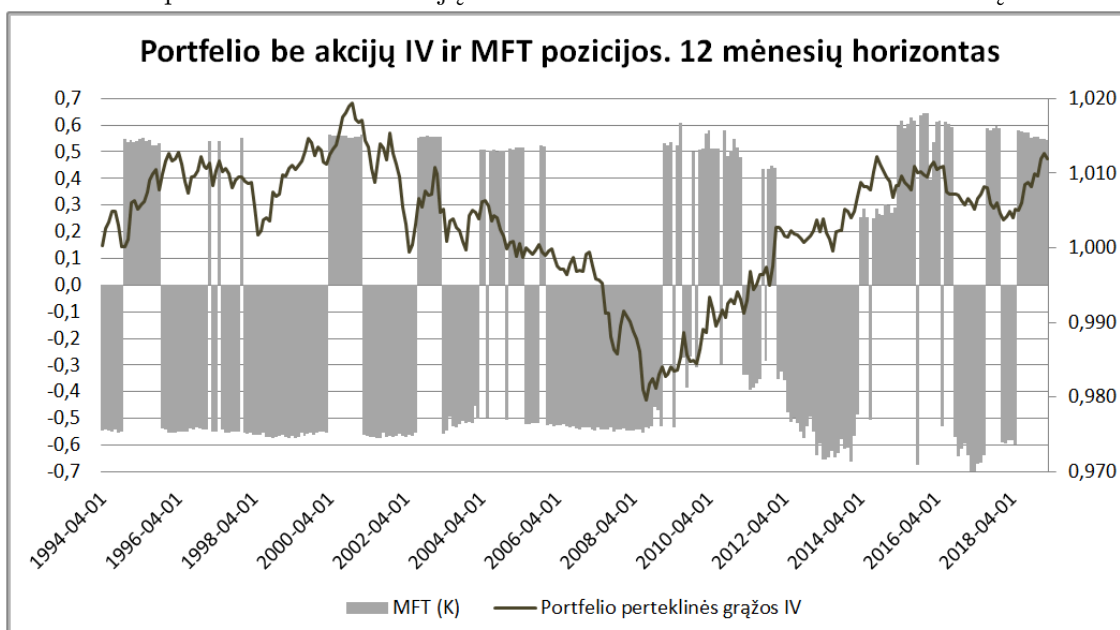
19 pav. Portfelio be akcijų charakteristikos. Horizontas – 3 mėnesių



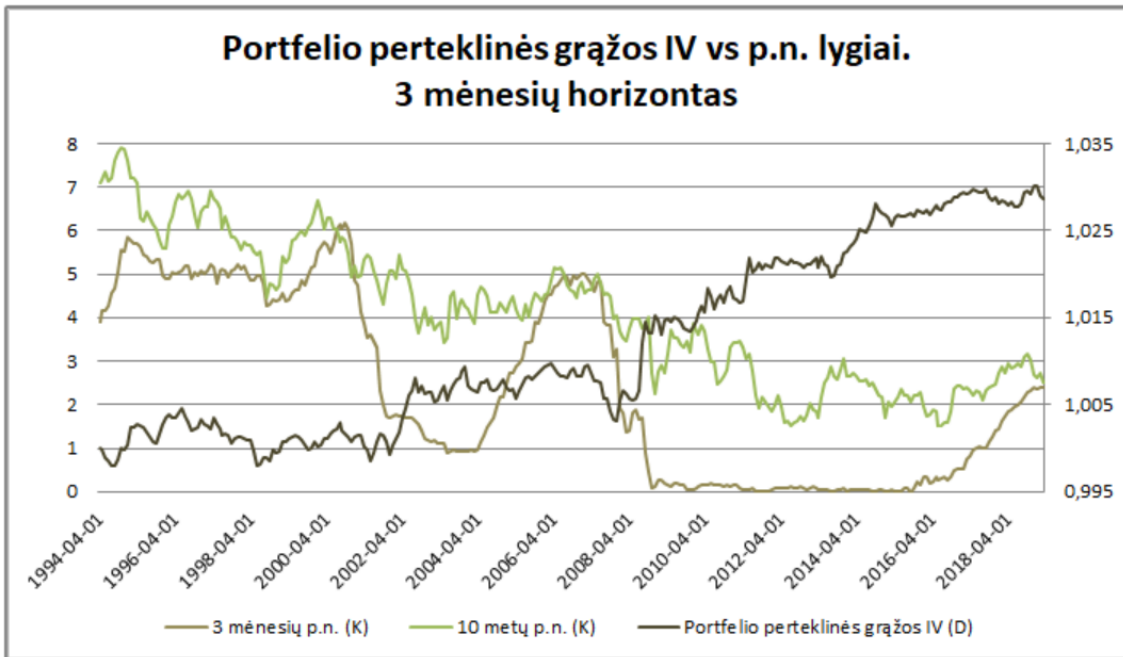
20 pav. Portfelio charakteristikos. Horizontas – 12 mėnesių



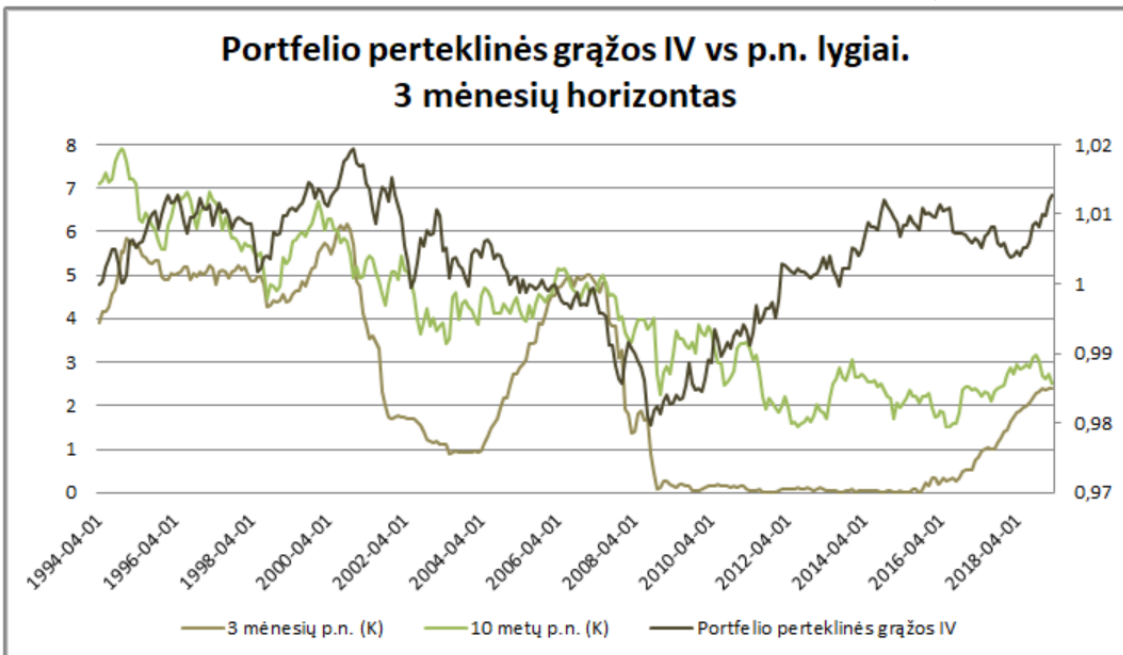
21 pav. Portfelio be akcijų charakteristikos. Horizontas – 12 mėnesių



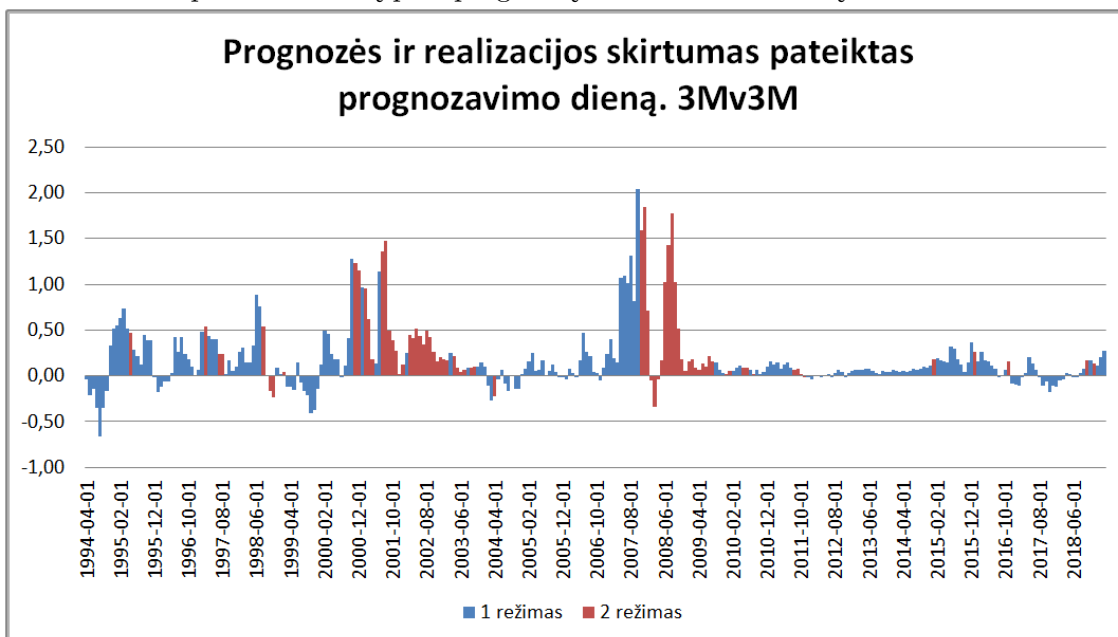
22 pav. Portfelio charakteristikos. Horizontas – 3 mėnesių



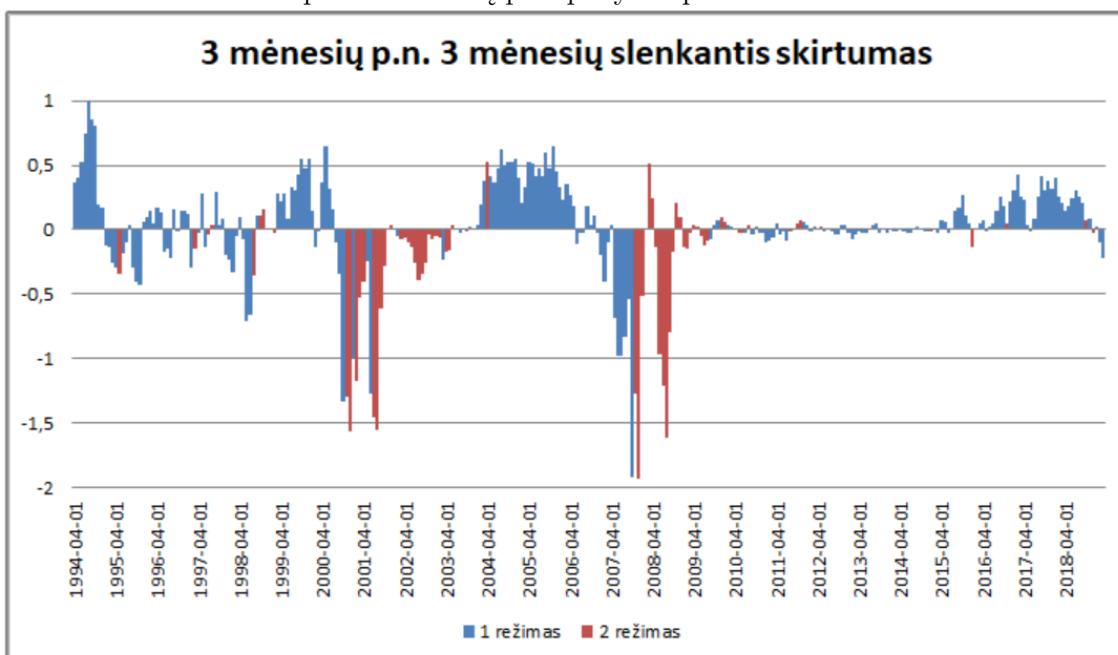
23 pav. Portfelio charakteristikos. Horizontas – 12 mėnesių



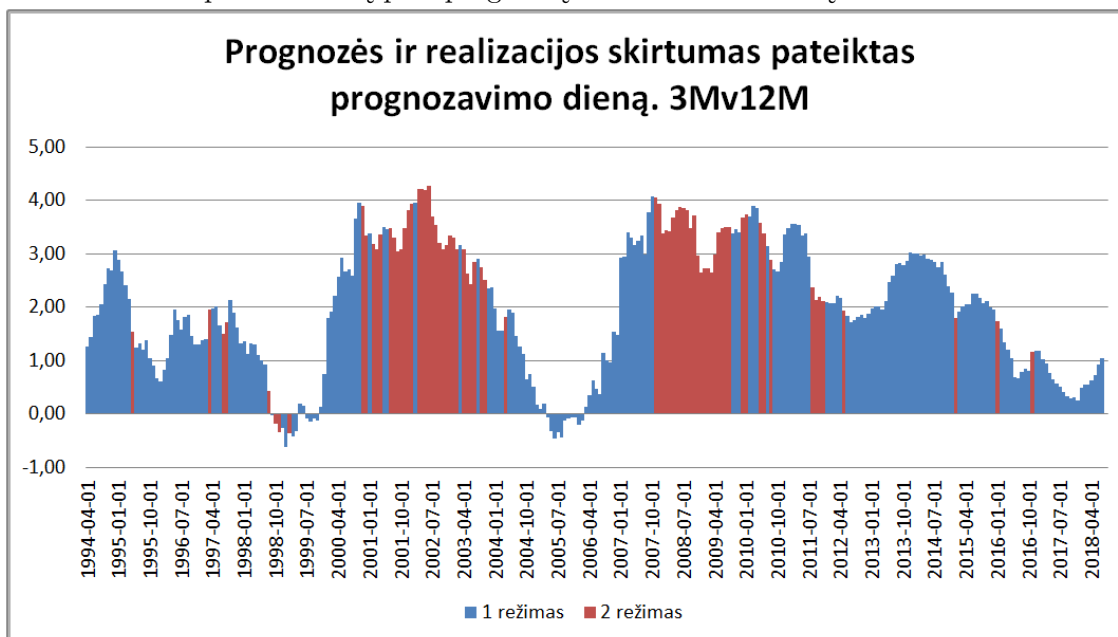
24 pav. 3 mėnesių p.n. prognozių tikslumas 3 mėnesių horizontui



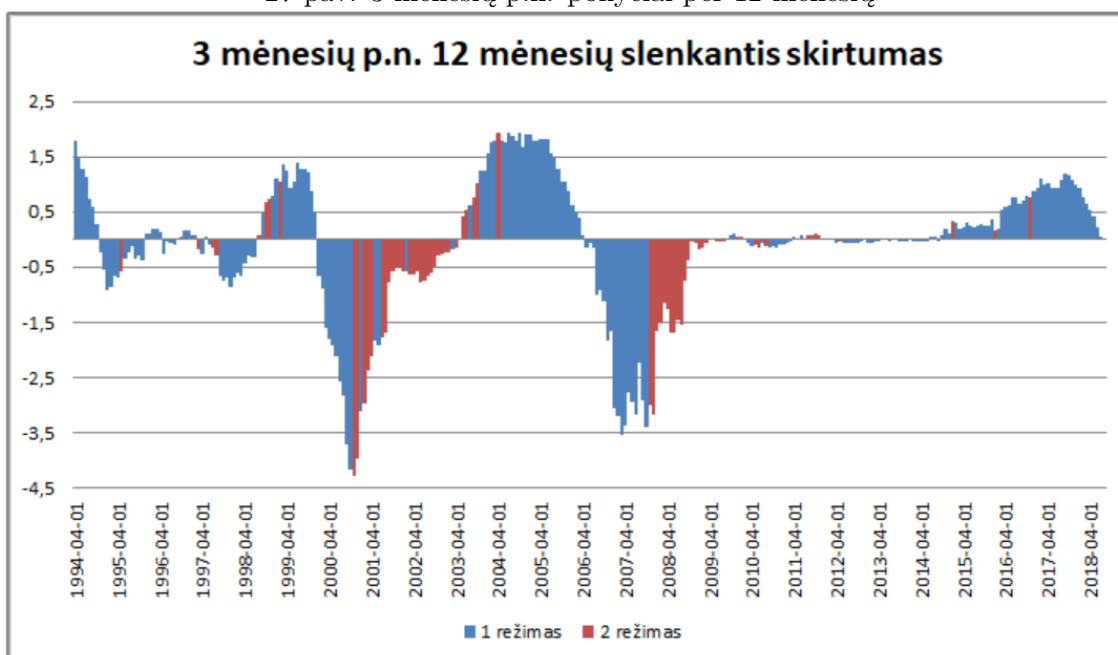
25 pav. 3 mėnesių p.n. pokyčiai per 3 mėnesius



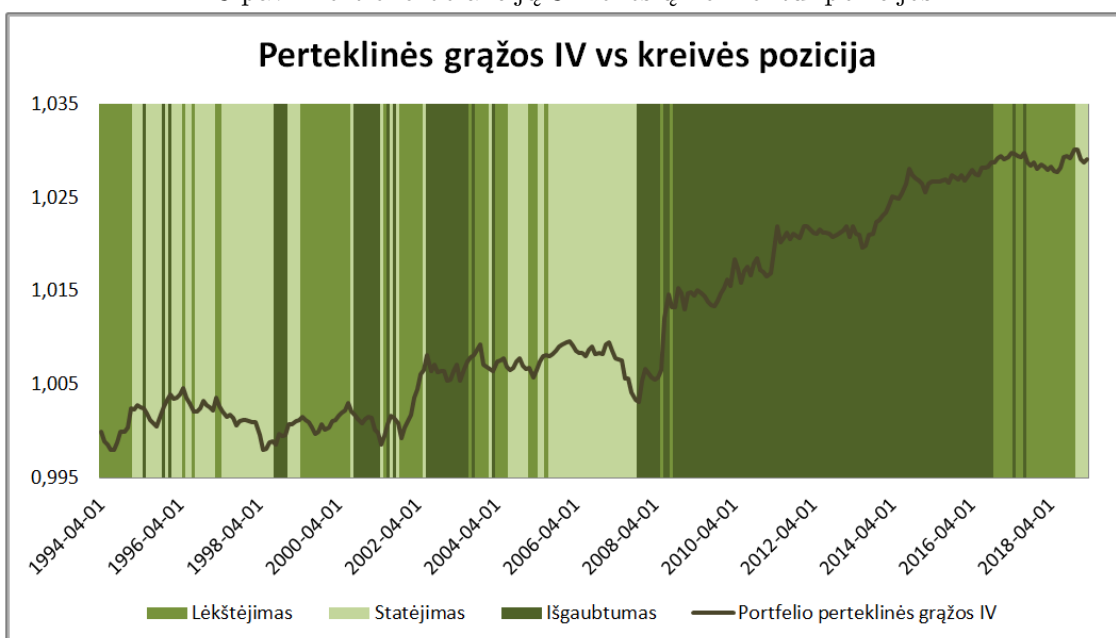
26 pav. 10 metų p.n. prognozių tikslumas 3 mėnesių horizontui



27 pav. 3 mėnesių p.n. pokyčiai per 12 mėnesių



28 pav. Portfelio be akcijų 3 mėnesių horizontui pozicijos



Priedas Nr. 3.

Žodynėlis

- ETF fondai – biržoje prekiaujami investiciniai fondai (angl. *exchange traded funds*). Tokie fondai, kurių vienetų galima įsigyti biržoje, suteikia galimybę investuoti į visą rinką – geografinį regioną, verslo sektorių, žaliavų krepšelį ar atskirą žaliavą, obligacijas, indeksus ar net valiutas [11].
- Emitentas – privati įmonė ar valstybės institucija (finansų ministerija, centrinis bankas), leidžianti pinigus ar vertybinius popierius [12].
- Finansinė trukmė arba Macaulay trukmė (D) – obligacijos vidutinė svertinė visų pinigų srautų trukmė. Kiekvieno pinigų srauto svoris apskaičiuojamas dalinant jo dabartinę vertę iš obligacijos kainos. Macaulay trukmė apskaičiuojama pagal formulę:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{tC}{(1+y)^t} + \frac{nN}{(1+y)^n}}{P}.$$

Čia C – kuponas, y – pajamingumas, n – periodų skaičius, N – nominalas, P – obligacijos kaina.

- Išdo obligacija – valstybės leidžiamas fiksuotųjų palūkanų ilgalaikis skolos vertybinis popierius. Išdo obligacijomis siekiama finansuoti ilgalaikius biudžeto deficitus. Išdo obligacija būna ilgesnės kaip vienerių metų trukmės [13].
- Išdo vekselis – valstybės leidžiamas trumpalaikis (mažesnės kaip metų trukmės) skolos vertybinis popierius. Leisdama išdo vekselius valstybė siekia gauti lėšų trumpalaikiams pinigų srautams subalansuoti ir trumpalaikiam biudžeto deficitui padengti. Išdo vekselis paprastai išleidžiamas palūkanų normos dydžiu diskontuota suma, o išperkamas už nominaliąją kainą [14].
- Institucinis investuotojas – įmonė, kurios pagrindinė veikla susijusi su nuosavų ar kitų asmenų patikėtų lėšų investavimu į vertybinius popierius. Pensijų fondai, investicinės, draudimo bendrovės [15].
- Kuponas – fiksuoto dydžio periodinės išmokos obligacijos savininkui.
- Modifikuota finansinė trukmė (MFT) – rodiklis apibūdinantis obligacijos ar viso portfelio vertės pokyčio jautrumą į palūkanų normų pokyčius. MFT skaičiuojama pagal formulę:

$$MFT = \frac{D}{1 + \frac{y}{n}}.$$

Čia D – Macaulay trukmė, y – palūkanos iki išpirkimo, n – kuponų išmokėjimų skaičius per metus.

- Nulinių kuponų obligacijos – obligacijos, kurioms nemokamos periodinės išmokos. Tokiu atveju dažniausiai kuponai įtraukiami į išpirkimo kainą ir obligacijos vadinamos kaupiamosiomis [26].
- Obligacijos gražos norma – palūkanų norma, kurią realiai uždirbo investuotojas [26].
- Vertybinių popierių prekybos kaštai – išlaidos patiriamos norint atlikti vertybinių popierių sandorius, pavyzdžiui, komisiniai mokesčiai brokeriui.
- Įmonės kapitalizacija (rinkos vertė) – parodo įmonės nuosavo kapitalo rinkos vertę, jeigu už visas įmonės akcijas būtų mokama rinkos kaina konkrečiu laiko momentu [16].