

VILNIAUS UNIVERSITETAS  
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Aušra Rakštytė

LAIKO EILUČIŲ IR KVANTILIŲ REGRESIJOS  
MODELIAI ELEKTROS KAINOMS

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti .....  
Darbo vadovas **Doc. Dr. Martynas Manstavičius**

---

(data)

Vilnius 2020

# Turiny

<b>1</b>	<b>Įvadas</b>	<b>2</b>
1.1	Žymėjimai . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Laiko eilučių analizės teorijos bazinės sąvokos ir reikalingi faktai</b>	<b>4</b>
2.1	Trendo ir sezoniškumo vertinimas . . . . .	6
2.2	ARIMA modelis . . . . .	8
2.3	Vektorinis autoregresijos modelis . . . . .	9
2.4	GARCH modelis . . . . .	10
2.5	Stacionarių procesų prognozavimas . . . . .	12
2.6	Modelio tinkamumo rodikliai . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Regresijos modeliai</b>	<b>15</b>
3.1	Tiesinė regresija . . . . .	15
3.2	Kvantilių regresija . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Praktinė dalis</b>	<b>21</b>
4.1	Duomenys . . . . .	21
4.2	ARMA modelis . . . . .	22
4.3	GARCH modelis . . . . .	24
4.4	VAR modelis . . . . .	26
4.5	Kvantilių regresija . . . . .	28
4.6	Išvados . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Priedai</b>	<b>39</b>
5.1	Grafikai . . . . .	39

# 1 skyrius

## Įvadas

Elektros energetikos sektoriuje skiriamos trys pagrindinės veiklos – elektros energijos gamyba, jos persiuntimas ir tiekimas. Elektros energijos gamintojai pardavinėja elektros energiją didmeninėje rinkoje. Tiekėjai perka elektros energiją iš gamintojų ir vėliau ją perduoda vartotojams. Pirkimas gali vykti per dvišalius kontaktus arba elektros biržoje. Lietuva priklauso NordPool elektros biržai. Joje sudaromi pirkimo sandoriai: gamintojai siūlo elektros energiją už mažiausią pardavimo kainą, o tiekėjai siūlo aukščiausią kainą, už kurią gali nupirkti. Susikirtus pasiūlos ir paklausos kreivėms nustatoma elektros kaina. 2018 metais Lietuva pirko elektros energijos iš Rusijos, Latvijos, Baltarusijos, Švedijos, Lenkijos ir Estijos. Taip pat 2018 metais Lietuva eksportavo gana nedidelį kiekį elektros energijos Rusijai, Estijai, Latvijai, Lenkijai ir Švedijai. Palyginimui, Lietuva 2018 metais pardavė 2,805 TWh elektros energijos, o nusipirko 12,437 TWh ([14]). Pati Lietuva pasigamino 26% suvartotos elektros energijos. Lietuvoje elektros energija gaminama šiluminėse, hidroakumuliacinėse elektrinėse bei atsinaujinančių elektros energijos šaltinių elektrinėse.

Šiame darbe Lietuvos elektros kainoms pritaikysime laiko eilučių bei kvantilių regresijos modelius. Darbe nagrinėjami tik NordPool elektros biržos duomenys, taigi, tiriama didmeninė elektros kaina ir į tyrimą neįtraukiami mainų su Estija duomenys, nes jie nepateikiami NordPool tinklapyje. Darbas sudarytas iš dviejų dalių: elektros kainų prognozavimo ir sąryšio tarp kainos ir elektros mainų kiekio nustatymo.

### Summary

In master thesis we presented basic facts of time series analysis and quantile regression. Models were applied to 2018 Lithuania's electricity prices and electricity exchange with other countries data. Time series analysis models were used to forecast electricity prices for January 1, 2019. Models included ARMA, GARCH and VAR. They were compared taking into consideration errors and information criteria. Quantile regression was used estimate how electricity exchange affects electricity price at certain quantiles.

## 1.1 Žymėjimai

Pagrindiniai darbe naudojami žymėjimai.

1. Atsitiktinis dydis žymimas didžiosiomis raidėmis, pvz.,  $X, Y, Z$ .
2. Atsitiktinio dydžio vidurkis  $\mathbb{E}X$ , o dispersija  $\mathbb{D}X$ .
3. Stacionarios laiko eilutės vidurkis (konstanta) žymimas  $\mu$ , t.y.,  $\mathbb{E}X_t = \mu$ .
4. Postūmio (angl. „*backshift*“) operatorius žymimas  $B$ .  $BX_t = X_{t-1}$ . Postūmio operatoriaus  $j$ -tasis laipsnis  $B^j(X_t) = X_{t-j}$ .
5. Skirtuminis operatorius  $\nabla$ .  $\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t$ . Skirtuminio operatoriaus  $j$ -tasis laipsnis  $\nabla^j(X_t) = \nabla(\nabla^{j-1}X_t)$ ,  $j \geq 1$ ,  $\nabla^0(X_t) = X_t$ .
6. Transponuotas vektorius žymimas  $'$ , pvz.,  $(x, y, z)'$ .
7. Santrumpa n.v.p. žymi nepriklausomus, vienodai pasiskirsčiusius atsitiktinius dydžius.
8. Konvergavimas pagal pasiskirstymą žymimas  $\xrightarrow{d}$ .

## 2 skyrius

# Laiko eilučių analizės teorijos bazinės sąvokos ir reikalingi faktai

Šiame skyrelyje trumpai pristatysime pagrindinius laiko eilučių teorijos elementus. Skyrelis parašytas remiantis R. Leipaus konspektais „Laiko eilutės“ [1].

Laiko eilutė yra stebėjimų reikšmių aibė, išdėstyta laike. Norint turimai laiko eilutei rasti geriausią prognozavimo modelį, būtina ištirti eilutės statistines savybes. Pasirenkant modelį svarbu nustatyti, ar eilutė yra stacionari.

**2.1 apibrėžimas.** Atsitiktinio proceso  $\{X_t, t \in T\}$ , su visais  $t \in T$  tenkinančio sąlygą  $\mathbb{D}X_t < \infty$ , kovariacinė funkcija apibrėžiama lygybe

$$r(s, t) = Cov(X_s, X_t) = \mathbb{E}(X_s - \mathbb{E}X_s)(X_t - \mathbb{E}X_t), \quad s, t \in T.$$

**2.2 apibrėžimas.** Seka  $X_t, t \in \mathbb{Z}$  vadinama stacionaria, jeigu:

1.  $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}X_t^2 < \infty$ ,
2.  $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_0$ ,
3.  $r(s, t) = r(s + h, t + h)$  su visais  $s, t, h$  iš  $\mathbb{Z}$ .

Stacionarios sekos kovariacinė funkcija paprastumo dėlei traktuojama kaip vieno argumento funkcija ir rašoma  $r(s) \equiv r(s, 0)$ . Stacionarios sekos koreliacinė funkcija apibrėžiama lygybe

$$\rho(h) = r(h)/r(0),$$

čia  $h \in \mathbb{Z}$ .

**2.3 apibrėžimas.** Seka  $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$  yra vadinama baltojo triukšmo seka, jeigu

$$Cov(Z_t, Z_s) = \begin{cases} \sigma^2, & t = s, \\ 0, & t \neq s. \end{cases}$$

Žymima  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ .

**2.4 apibrėžimas.** [4] Atsitiktinio klaidžiojimo su dreifu modelis užrašomas taip:

$$X_t = a + X_{t-1} + Z_t, \quad t \geq 1, \quad X_0 = 0.$$

Čia  $Z_t$  yra baltasis triukšmas, o konstanta  $a$  vadinama dreifu. Modelį galime perrašyti:

$$X_t = at + \sum_{j=1}^t Z_j.$$

**2.5 apibrėžimas.** Apibrėšime sekos charakteristinę lygtį. Tarkime, seka  $X_t$  tenkina AR( $p$ ) modelį (žr. skyrelį "ARIMA modelis"):

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t.$$

AR( $p$ ) modelio lygtį galime perrašyti naudodami postūmio operatorių:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) X_t = Z_t.$$

Pakeitę postūmio operatorių  $B$  kintamuoju  $z$  ir prilyginę lygties dešiniąją pusę nuliui, gauname proceso charakteristinę lygtį:

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0.$$

Norint ištirti laiko eilutės stacionarumą, naudojami įvairūs testai. Šiame darbe trumpai pristatysime testus, kurie remiasi vienetinės šaknies egzistavimo tikrinimu. Tiesinis stochastinis procesas turi vienetinę šaknį, jeigu 1 yra proceso charakteristinės lygties sprendinys. Vienetinę šaknį turintys procesai yra nestacionarūs.

Matematikai Dickey ir Fuller 1996 metais [5] pristatė išplėstinį Dickey-Fullerio testą (angl. "augmented Dickey-Fuller test", ADF). Apibrėžkime nulinę hipotezę  $H : \phi = 1$  pirmos eilės AR modeliui:

$$X_t = \mu + \phi X_{t-1} + Z_t,$$

čia  $\mu$  žymi laiko eilutės vidurkį. Tarkime,  $\mu = 0$ . Koeficiento  $\phi$  įvertį  $\hat{\phi}$  galima apskaičiuoti naudojant mažiausių kvadratų metodą (OLS):

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}$$

Užrašoma testo statistika:

$$n(\hat{\phi} - 1) = \frac{(1/n) \sum_{t=1}^n X_{t-1} Z_t}{(1/n)^2 \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}.$$

Matematikai Fuller ir Tanaka apskaičiavo testo statistikos reikšmes skirtingiems pasikliautiniams intervalams ir skirtingiems imties dydžiams

[5]. Konkrečiu atveju gauta statistikos reikšmė yra palyginama su apskaičiuotomis reikšmėmis. Jeigu proceso  $X_t$  vidurkis yra nelygus nuliui [3], įvedamas dydis  $\delta = (1 - \phi)\mu$ , o nulinė hipotezė apibrėžiama  $H : \delta = 0, \phi - 1 = 0$ . Atlikus ADF testą nustatoma  $p$ -reikšmė, reiškianti mažiausią pasikliovimo lygmenį, su kuriuo nulinė hipotezė atmetama. Jei gaunama ypač maža, artima nuliui  $p$ -reikšmė, tai galime atmesti nulinę hipotezę. Vadinas, su tikimybe  $1 - p$  nesuklysimė laikydami teisinga alternatyviąją hipotezę, kad procesas yra stacionarus.

Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS) [3] testas apibrėžia hipotezes priešingai nei ADF. KPSS teste nulinė hipotezė teigia, kad procesas yra stacionarus. O jai alternatyvi hipotezė teigia, kad egzistuoja vienetinė šaknis. KPSS testas remiasi laiko eilutės išskaidymu į trendo, atsitiktinio klaidžiojimo ir liekamojo nario komponentes. Testo nulinė hipotezė teigia, kad atsitiktinio klaidžiojimo komponentės dispersija yra lygi nuliui. Visų pirma, procesui  $X_t$  yra pritaikomas paprastasis regresijos modelis (žr. skyrelį „Kvantilių regresija“), gaunamos liekanos  $e_t$  ir apskaičiuojamos dalinės sumos  $S_t = \sum_{s=1}^t e_s$  kiekvienam  $t$ . Randama testo statistika

$$KPSS = \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T S_t^2 / \hat{\sigma}^2,$$

čia  $\hat{\sigma}^2$  yra liekanų dispersijos įvertis. Atliekant KPSS testą taip pat randama  $p$ -reikšmė, tik šiuo atveju mums naudinga kuo labiau artima vienetui  $p$ -reikšmė. Siekiant gauti tvirtą stacionarumo įrodymą, rekomenduojama taikyti abu testus.

## 2.1 Trendo ir sezoniškumo vertinimas

Kalbant apie laiko eilutes, būtina pristatyti trendo ir sezoniškumo sąvokas [2].

Sakoma, kad duomenyse pastebimas trendas, kai laiko eilutė pasižymi ilgalaikiu kilimu arba mažėjimu. Tačiau trendo funkcija nebūtinai turi būti tiesinė. Taip pat gali būti pastebimas kryptį keičiantis trendas, kai duomenyse pastebimas kilimas ir po to sekantis smukimas.

Duomenyse pastebimas sezoniškumas, kai duomenis veikia sezoniniai faktoriai, tokie kaip metų ar paros laikas. Sezoniškumas visada yra fiksuotas ir turi žinomą pasikartojimų dažnį.

Sakoma, kad duomenyse pastebimas cikliškumas, kai stebėjimų reikšmės didėja ir mažėja ne pagal fiksuotą dažnį. Tokius laiko eilučių bangavimus dažniausiai nulemia ekonominės situacijos. Pagal vadovėlį [2],

sezoniškumas ir cikliškumas yra skirtingos sąvokos, kurių esminis skirtumas – dažnis. Sezoniškumo dažnis yra fiksuotas, o cikliškumo – ne. Dažniausiai vidutinis ciklo ilgis yra didesnis negu sezoniškumo pasikartojimų laikas. Įprastai ciklo ilgis trunka mažiausiai 2 metus.

Stebėjimą laiko momentu  $t$  galima nusakyti kaip funkciją, priklausomą nuo trendo, sezoniškumo ir atsitiktinių reikšmių komponentių (paprastumo dėlei neįtraukiame cikliškumo):

$$X_t = f(m_t, s_t, Z_t),$$

čia  $X_t$  – stebėjimas laiko momentu  $t$ ,  $m_t$  – trendo reikšmė laiko momentu  $t$ ,  $s_t$  – sezoniškumo reikšmė laiko momentu  $t$ ,  $Z_t$  – baltasis triukšmas laiko momentu  $t$ . Funkcija gali būti adityvi arba multiplikatyvi.

1.  $X_t = m_t + s_t + Z_t$  – adityvi funkcija;
2.  $X_t = m_t s_t Z_t$  – multiplikatyvi funkcija.

Jeigu visos komponentės yra teigiamos, logaritmuodami galime iš multiplikatyvios funkcijos gauti adityviają:

$$\ln X_t = \ln m_t + \ln s_t + \ln Z_t.$$

Trendo funkcijai nustatyti galime naudoti  $k$ -tos eilės slenkančio vidurkio modelį (žr. 2.2 skyrelį). Pasirinkime parametrą  $q$  ir gaukime trendo funkciją  $y$  suglodindami pradinę stebėjimų funkciją, t.y., trendo funkcijos  $y$  reikšmės laiko momentu  $t$  užrašomos lygtimi:

$$y_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q X_{t+j}, \quad q < t \leq n - q, \quad k = 2q + 1.$$

Priklausomai nuo to, ar stebėjimų funkcija adityvi ar multiplikatyvi, trendas eliminuojamas atimant arba dalinant.

Kitas būdas trendui eliminuoti – nagrinėti duomenų skirtumus [7]. Metodas dar vadinamas „diferencijavimu“, nuo angliško žodžio „differencing“. Tarkime, tiesinei trendo funkcijai  $m_t = at + b$  pritaikome skirtuminių operatorių  $\nabla$  ir gauname konstantą  $\nabla m_t = a$ . Tokiu būdu trendo funkciją, užrašytą bet kokio laipsnio  $k$  polinomu, galima paversti konstanta taikant operatorių  $\nabla^k$ . Diferencijavimas naudingas, kai nereikia žinoti, kokia yra trendo funkcija, o norime tik ją pašalinti.

Tiriant adityvųjį modelį sezoniškumo funkcija yra apibrežiama kaip  $d$ -periodinė funkcija:

$$s_t = s_{t+d}, \quad \sum_{t=1}^d s_t = 0.$$



## 2.2 ARIMA modelis

Skyrelyje pateiksime autoregresinių modelių apibrėžimus. Teoriniai autoregresinių modelių pritaikymai laiko eilutėms buvo aprašyti gana anksti – apie 1920 m. ir 1930 m. matematikų G. U Yule ir J. Walker darbuose. Tačiau praktinis modelių pritaikymas prasidėjo tik apie 1970 metus, atsiradus kompiuteriams, galintiems atlikti daug resursų reikalaujančius skaičiavimus.

**2.6 apibrėžimas.** ([7]) Stacionari seka  $X_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  yra vadinama  $(p, q)$  eilės autoregresine slenkančio vidurkio seka jeigu  $X_t$  tenkina lygtį

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

čia  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ . Tokią seką  $X_t, t \in \mathbb{Z}$  žymime ARMA( $p, q$ ). Sakome, kad  $X_t$  yra ARMA( $p, q$ ) procesas su vidurkiu  $\mu$ , jeigu  $X_t - \mu$  yra ARMA( $p, q$ ) procesas.

Pažymėkime

$$\begin{aligned} \phi(z) &= 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p, \\ \theta(z) &= 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q. \end{aligned}$$

Polinomiali  $\phi(\cdot)$  ir  $\theta(\cdot)$  atitinkamai vadinami autoregresijos bei slenkamojo vidurkio polinomais.

**2.7 apibrėžimas.** ([7]) Tarkime,  $\phi(z) \equiv 1$ . Tada

$$X_t = \theta(B)Z_t$$

ir toks procesas vadinamas eilės  $q$  slenkančio vidurkio procesu, žymimas MA( $q$ ).

**2.8 apibrėžimas.** ([7]) Tarkime,  $\theta(z) \equiv 1$ , tada

$$\phi(B)X_t = Z_t$$

ir toks procesas vadinamas eilės  $p$  autoregresiniu procesu, žymimas AR( $p$ ).

**2.9 apibrėžimas.** ([1]) Atsitiktinė seka  $X_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  vadinama  $(p, d, q)$  eilės autoregresijos slenkamojo vidurkio integruotu procesu (čia  $d = 1, 2, \dots$ ), jeigu skirtumai  $(1 - B)^d X_t$  tenkina ARMA( $p, q$ ) lygtį, t.y.,

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)Z_t,$$

čia  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ . Tokį modelį žymime ARIMA( $p, d, q$ ).

## 2.3 Vektorinis autoregresijos modelis

Praktikoje dažnai susiduriama su daugiamačių laiko eilučių duomenų stebėjimu. Tokiems atvejams galima pritaikyti vektorinį autoregresijos modelį. Pirmiausia apibrėšime pagrindines sąvokas daugiamačiu atveju.

**2.10 apibrėžimas.** Tegul  $k \geq 1$ . Tuomet  $k$ -matė stacionari seka

$$\{Z_t, \quad t \in \mathbb{Z}\}$$

vadinama baltojo triukšmo seka su parametrais  $0$  ir  $\Sigma$ , jeigu  $EZ_t = 0$  ir

$$\Gamma(h) = \begin{cases} \Sigma, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0. \end{cases}$$

Žymima  $Z_t \sim WN(0, \Sigma)$ .

Tarkime, nagrinėjame atsitiktinę seką  $X_t = (X_{t1}, \dots, X_{tk})'$ , kuriai egzistuoja baigtiniai antrieji momentai. Sekos vidurkių vektoriumi laiko momentu  $t \in \mathbb{Z}$  vadinamas

$$\mu_t = EX_t = (EX_{t1}, \dots, EX_{tk})'.$$

Bet kuriems  $t, h \in \mathbb{Z}$  apibrėžiama kovariacinė matrica

$$\Gamma(t+h, t) = E(X_{t+h} - \mu_{t+h})(X_t - \mu_t)' = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(t+h, t) & \dots & \gamma_{1k}(t+h, t) \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{k1}(t+h, t) & \dots & \gamma_{kk}(t+h, t) \end{pmatrix};$$

čia  $\gamma_{ij}(t+h, t) = Cov(X_{t+h,i}, X_{t,j})$ .

**2.11 apibrėžimas.** Atsitiktinė  $k$ -matė seka  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  yra (silpnai) stacionari, jei vidurkių vektoriai  $\mu_t$  ir kovariacinės matricos  $\Gamma(t+h, t)$  nepriklauso nuo  $t$ . Tokiu atveju žymima

$$\mu_t := EX_t, \quad \Gamma(h) := E(X_{t+h} - \mu_{t+h})(X_t - \mu_t)'.$$

**2.12 apibrėžimas.**  $k$ -matis procesas  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  vadinamas vektoriniu autoregresijos procesu, jeigu  $X_t$  yra stacionarus ir su visais  $t$

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t;$$

čia  $Z_t \sim WN(0, \Sigma)$ . Tokia seka žymima VAR(p).

## 2.4 GARCH modelis

GARCH modeliai dažniausiai naudojami laiko eilutėms, pasižyminčioms dideliu kintamumu (angl. "volatility") bei liekanų heteroskedastiškumu. Tai reiškia, kad modelio liekanos yra poromis nekoreliuotos, bet liekanų dispersija yra priklausoma nuo laiko [3]. Sakoma, kad laiko eilutės pasižymi dideliu kintamumu kai palyginti ramius laiko periodus seka didelių svyravimų periodai. Nepastovumo tyrimas užima svarbią vietą nustatant investavimo riziką. Nobelio premijos laureatas Robert F. Engle 1982 m. pristatė autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo (ARCH) modelį tiriant finansines grąžas [8].

ARCH( $p$ ) modelis aprašomas lygtimis:

$$\begin{cases} r_t = \sigma_t \epsilon_t, & \epsilon_t \sim \text{n.v.p. } N(0, 1) \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p r_{t-p}^2, \end{cases}$$

čia  $r_t$  yra finansinė grąža,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0$  yra svoriai, o  $\sigma_t^2$  yra kintamumas laiko momentu  $t \in \mathbb{Z}$ .

Tegul  $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(r_{t-1}, r_{t-2}, \dots)$  yra  $\sigma$ -algebra, generuota atsitiktinių dydžių  $r_{t-1}, r_{t-2}, \dots$ . Jeigu laikysime, kad su visais  $t$  yra tenkinama  $E(\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$  ir  $E(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = 1$ , tai grąžos  $r_t$  sąlyginis vidurkis ir sąlyginė dispersija atžvilgiu  $\mathcal{F}_{t-1}$  yra atitinkamai

$$E(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E(\sigma_t \epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t E(\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$$

ir

$$E(r_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = E(\sigma_t^2 \epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 E(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2.$$

Pastaroji dispersijos savybė reiškia, kad sąlyginė grąžos  $r_t$  dispersija atžvilgiu informacijos iki momento  $t - 1$ , panašiai kaip AR( $p$ ) modelyje, yra praėjusių grąžų kvadratų tiesinė kombinacija. Vadinasi, sąlyginė dispersija yra atsitiktinė bei priklausanti nuo laiko.

ARCH modelio pritaikymas susideda iš trijų žingsnių:

1. Parenkame tinkamiausią AR( $p$ ) modelį

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i y_{t-i} + \epsilon_t.$$

2. Apskaičiuojame kvadratinės paklaidas, jas išreikšdami kaip tiesinę kombinaciją konstantų ir praeities reikšmių, bei sudarome regresijos modelį:

$$\widehat{\epsilon}_t^2 = \widehat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^p \widehat{\alpha}_i \widehat{\epsilon}_{t-i}^2.$$

3. Patikriname modelio tinkamumą. Nulinė hipotezė teigia, kad ARCH modelis netinkamas ir tokiu atveju  $\alpha_i = 0$  visiems  $i = 1, \dots, p$ . Alternatyvi hipotezė teigia, kad bent viena iš įvertintų konstantų  $\alpha_i$  yra reikšminga ir nelygi nuliui.

Danijos ekonomistas T. P. Bollerslev 1986 m. pasiūlė apibendrintą ARCH modelį, vadinamą GARCH (angl. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) [6]. Modelis taikomas tuo atveju, kai sąlyginę gražos dispersiją galima aprašyti ARMA modelio lygtimis. GARCH( $p, q$ ) modelis užrašomas taip:

$$\begin{cases} r_t = \sigma_t \epsilon_t, & \epsilon_t \sim \text{n.v.p. } N(0, 1), \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j r_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^q \beta_k \sigma_{t-k}^2, \end{cases}$$

čia svoriai  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p \geq 0$ .

Modelio pritaikymas susideda iš trijų žingsnių

1. Kvadratinėms gražoms parenkame tinkamiausią ARMA( $p, q$ ) modelį. Pažymėkime  $\nu_t = r_t^2 - \sigma_t^2$ , tada galime išreikšti

$$r_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) r_{t-i}^2 + \nu_t - \sum_{j=1}^p \beta_j \nu_{t-j}.$$

Žymime ARMA( $\max(p, q), p$ ).

2. Apskaičiuojame kvadratinių liekamųjų narių autokoreliacijos funkciją:

$$\rho = \frac{\sum_{t=i+1}^T (\hat{\epsilon}_t^2 - \hat{\sigma}_t^2)(\hat{\epsilon}_{t-1}^2 - \hat{\sigma}_{t-1}^2)}{\sum_{t=1}^T (\hat{\epsilon}_t^2 - \hat{\sigma}_t^2)^2}$$

3. Patikriname modelio tinkamumą. Galima atlikti Portmanteau liekanų testą [5]. Portmanteau statistika apibrėžiama:

$$Q = n(n+2) \sum_{j=1}^h \rho^2(j)/(n-j),$$

čia  $\rho(j)$  yra liekanų ACF funkcija. Jeigu modelis yra gerai parinktas, tai didelėms  $h$  intims:

$$Q \xrightarrow{d} \chi_{h-p-q}^2,$$

čia  $h$  yra laisvai pasirenkamas, praktikoje dažniausiai naudojama  $h$  reikšmė nuo 15 iki 30.

## 2.5 Stacionarių procesų prognozavimas

Vienas svarbiausių laiko eilučių analizės uždavinių yra ateities reikšmių prognozavimas. Uždavinys glaudžiai susijęs su funkicine analize.

**2.13 apibrėžimas.** [7] Tarkime, turime Hilberto erdvę  $\mathcal{H}$ . Bet kokios Hilberto erdvės  $\mathcal{H}$  poaibio  $\{x_t, t \in T\}$  uždaras apvalkalas  $\overline{\text{sp}}\{x_t, t \in T\}$  yra mažiausias uždaras  $\mathcal{H}$  poaibis, kuriam priklauso visi elementai  $x_t, t \in T$ .

Baigtinės aibės  $\{x_1, \dots, x_n\}$  uždaras apvalkalas yra aibė visų tiesinių kombinacijų

$$y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}.$$

Jeigu  $\mathcal{M} = \overline{\text{sp}}\{x_1, \dots, x_n\}$ , tada bet kokiam  $x \in \mathcal{H}$ ,  $P_{\mathcal{M}}x$  yra vienintelis elementas, išreiškiamas tokia forma:

$$P_{\mathcal{M}}x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n,$$

ir toks kad

$$\langle x - P_{\mathcal{M}}x, y \rangle = 0, \quad y \in \mathcal{M}.$$

Paskutinę lygybę galima išreikšti:

$$\langle P_{\mathcal{M}}x, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

Taip gauname tiesinių lygčių sistemą su nežinomaisiais  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tarkime, turime  $(X_1, \dots, X_n)$  yra stebėjimų vektorių ir norime nuspėti ateities reikšmę  $X_{n+h}$ ,  $h = 1, 2, 3, \dots$ . Tegul reikšmės  $X_1, \dots, X_n$  priklauso stacionariai sekai  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ .

**2.14 apibrėžimas.** [1] Nestebimo dydžio  $X_{n+h}$  prognoze vadinama funkcija  $P_{\mathcal{M}}X_{n+h} = \alpha_0 + \alpha_1 X_n + \dots + \alpha_n X_1$ , tokia, kad

$$\mathbb{E}(X_{n+h} - P_{\mathcal{M}}X_{n+h})^2 \rightarrow \min_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}.$$

### Prognozės kokybės įvertinimas naudojant paklaidas

Prognozės tikslumas nustatomas palyginant tikrąją vektoriaus reikšmę su prognozuojama. Tam naudojami įvairūs paklaidų skaičiavimo būdai.

1. Vidutinė kvadratinė prognozės paklaida (angl. Mean square prediction error, MSPE) apibrėžiama formule:

$$MSPE = \mathbb{E}(X_{n+h} - P_{\mathcal{M}}X_{n+h})^2.$$

2. Vidutinė procentinė absoliutinė paklaida (angl. Mean absolute percentage error, MAPE) apibrėžiama formule:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^T \left| \frac{X_{n+h} - P_{\mathcal{M}}X_{n+h}}{X_{n+h}} \right| \cdot 100\%.$$

3. Vidutinis standartinis nuokrypis (angl. Root mean square deviation, RMSD) apibrėžiamas formule:

$$RMSD = \sqrt{\frac{\sum_{h=1}^T (P_{\mathcal{M}}X_{n+h} - X_{n+h})^2}{T}}.$$

## Liekanų analizė

Parinkus modelį ir įvertinus jo parametrus, reikia iširti modelio tinkamumą, t.y., patikrinti, ar įvertintas modelis tenkina teorinio modelio prielaidas. Dažniausiai yra tikrinama, ar liekanos  $\hat{Z}_t$  turi normalųjį skirstinį, yra nekoreliuotos, turi vidurkį 0 ir pastovią dispersiją. Tiksliam tyrimui naudojami normalumo tikrinimo kriterijai: Kolmogorovo, Andersono–Darlingo, Shapiro–Wilko. Norint patikrinti, ar liekanos sudaro baltojo triukšmo seką, nubraižomi ACF ir PACF grafikai.

## 2.6 Modelio tinkamumo rodikliai

Modelio tinkamumą įvertinsime remdamiesi trimis rodikliais.

1. Tikėtinumo funkcija (angl. "likelihood function") [6]. Tarkime, turime stebinių vektorių  $\{X_1, \dots, X_T\}$ . Jeigu sąlyginio skirstinio tankio funkcija  $f(X_t|X_{t-1}, \dots, X_1, \theta)$  yra normaliojo skirstinio su vidurkiu  $\mu_t$  ir dispersija  $\sigma_t^2$  tankio funkcija, tada  $\theta$  yra sudarytas iš parametru  $\mu_t$  ir  $\sigma_t^2$ , o tikėtinumo funkcija išreiškiama:

$$f(X_1, \dots, X_T; \theta) = f(X_1; \theta) \prod_{t=2}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t}} \exp\left(\frac{-(X_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right).$$

Reikšmė  $\theta$ , kuri maksimizuoja tikėtinumo funkciją, yra vadinama didžiausio tikėtinumo įverčiu (angl. "maximum likelihood estimator" — MLE). Praktiniams skaičiavimams labiau tinkama naudoti

logaritmuotą tikėtinumo funkciją:

$$\ln f(X_1, \dots, X_T; \theta) = \ln f(X_1; \theta) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left( \ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) + \frac{(X_t - \mu_t)^2}{\sigma_t^2} \right).$$

ln funkcija yra monotoniška, taigi MLE galima gauti maksimizuojant logaritmuotą tikėtinumo funkciją. Lyginant skirtingus modelius, geresnis modelis yra tas, kurio tikėtinumo funkcijos reikšmė yra didesnė. Nėra patikima įvertinti modelį vien remiantis LLE, kadangi funkcija gali didėti priklausomai nuo parametrų skaičiaus. Galbūt ne visi parametrai reikalingi, bet įtraukus jų kuo daugiau į modelį, padidės ir LLE. Šiai problemai spręsti buvo sukurti išvestiniai informacijos kriterijai.

2. Akaike informacijos kriterijus (AIC) apibrėžiamas formule:

$$AIC = 2k - 2 \ln(\hat{f}),$$

čia  $k$  yra modelio parametrų skaičius, o  $\hat{f}$  yra maksimali tikėtinumo funkcijos reikšmė.

3. Bajeso informacijos kriterijus (BIC) apibrėžiamas formule:

$$BIC = \ln(T)k - 2 \ln(\hat{f}).$$

Iš kelių modelių norint išsirinkti geriausią, reikia rinktis tą, kurio AIC ir BIC yra patys mažiausi. Net jeigu AIC arba BIC įgyja neigiamas reikšmes, vis tiek reikia rinktis mažiausią.

## 3 skyrius

# Regresijos modeliai

Šiame skyrelyje pirma trumpai pristatysime tiesinės regresijos modelį, o po to — kvantilių regresijos modelį. Tiesinės regresijos modelio skyrelis parašytas daugiausia remiantis taikomosios regresinės analizės vadovėliu [9].

### 3.1 Tiesinė regresija

Regresine analize vadinamas statistinių modelių tyrimas, siekiant nustatyti sąryšius tarp priklausomo kintamojo ir jį veikiančių nepriklausomų kintamųjų. Nepriklausomi kintamieji vadinami aiškinamaisiais kintamaisiais arba regresoriais. Dažniausiai tyrėjai neturi informacijos apie modelio parametrus (daugiklius, kintamųjų vidurkius, dispersijas) [9]. Jiems įvertinti naudojami imties duomenys pritaikant įvairius statistinius metodus. Plačiausiai žinomi didžiausio tikėtimumo (angl. *maximum likelihood*) ir mažiausiųjų kvadratų (angl. *ordinary least squares*) metodai. Gautos apytikslės nežinomų parametrų reikšmės vadinamos parametrų įverčiais.

Pats paprasčiausias modelis – tiesinė regresinė analizė. Modelio formalus užrašas:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p + e.$$

Čia  $y$  – tiriamas priklausomas kintamasis,  $X_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , regresoriai,  $e$  – liekamoji paklaida, t.y., viskas, nuo ko dar gali priklausyti  $Y$ . Nei konstanta  $\beta_0$ , nei koeficientai  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , nei liekamoji paklaida  $e$  nėra žinomi. Įverčiai  $\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , gaunami panaudojus imties duomenis. Gaunama regresijos lygtis apytikslei  $y$  reikšmei:

$$\widehat{Y} = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_1 + \dots + \widehat{\beta}_p X_p.$$

Norint sudaryti tinkamą tiesinės regresijos modelį, visų pirma reikia išanalizuoti turimus duomenis [9].



## Reikalavimai duomenims ir tiesinės regresijos modelio prielaidos.

1. Priklausomas kintamasis  $Y$  ir visi regresoriai yra intervaliniai. Liekamosios paklaidos yra normaliai pasiskirsčiusios.
2. Regresoriai laikomi atsitiktiniais dydžiais. Regresoriai tuo geriau tinka modeliui, kuo labiau jų pasiskirstymas artimas normaliajam pasiskirstymui. Dažnai siekiant didesnio kintamųjų panašumo į normaliuosius, jie transformuojami, pavyzdžiui, naudojama logaritminė transformacija.
3. Skirtingų stebinių liekamosios paklaidos  $e$  neturi koreliuoti. Tai reiškia, kad stebiniai nesusiję.
4. Regresoriai neturi būti stipriai koreliuoti.
5. Duomenyse neturi būti išskirčių. Išskirtis – tokia  $y$ , arba  $X_k$ ,  $k = 1, \dots, p$  reikšmė, kuri labai skiriasi nuo kitų stebinių.
6. Duomenys turi būti homoskedastiški. Reikalaujama, kad liekamosios paklaidos dispersija nepriklausytų nuo regresorių reikšmių.

## Modelio tinkamumas

Regresijos modelio tinkamumas nustatomas remiantis tokiais rodikliais:

1. Determinacijos koeficientas ( $R$  kvadratas). Tai yra modeliuojamų ir stebimų priklausomo kintamojo reikšmių skirtumų matas. Tarkime, turime stacionarią  $AR(p)$  laiko eilutę, sudarytą iš  $T$  stebėjimų sekos  $X_t, t = 1, \dots, T$ . Tada tinkamumo matą  $R^2$  galime užrašyti [6]:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=p+1}^T \hat{Z}_t^2}{\sum_{t=p+1}^T (X_t - \bar{X})^2},$$

čia  $\bar{X} = (\sum_{t=p+1}^T X_t)/(T - p)$ , o  $\hat{Z}_t$  yra modelio liekanos. Apytikslė  $R^2$  interpretacija – kokią dalį  $Y$  elgesio paaiškina kintamųjų  $X_t, t = 1, \dots, T$  elgesys. Determinacijos koeficientas įgyja reikšmes iš intervalo  $[0, 1]$ , kuomet  $R^2$  artimesnis vienetui, tuo geriau modelis tinka duomenims. Tačiau tai galioja tik stacionarioms laiko eilutėms. Nestacionarioms, turinčioms vienetinę šaknį, laiko eilutėms, tenkinančioms  $AR(1)$  modelio lygtį,  $R^2$  konverguoja į vienetą, kai stebinių aibės dydis artėja į begalybę.

2. Suderintasis  $R^2$  (angl. "adjusted  $R^2$ "). Tarkime,  $\widehat{\sigma}_X^2$  yra stebinių aibės  $X_t$  dispersija, o  $\widehat{\sigma}_Z^2$  yra modelio liekanų dispersija. Tada suderintasis  $R^2$  apskaičiuojamas:

$$R^2 = 1 - \frac{\widehat{\sigma}_Z^2}{\widehat{\sigma}_X^2}.$$

Suderintasis  $R^2$  buvo išvestas, nes įprastas determinacijos koeficientas turi keletą problemų. Žinoma, kad  $R^2$  yra nemažėjanti funkcija [6]. Kuo modelyje naudojama daugiau regresorių, tuo didesnę reikšmę įgyja  $R^2$ . Gali būti, kad modelyje ne visi regresoriai iš tiesų veikia priklausomąjį kintamąjį, tačiau vis tiek turėsime didelę  $R^2$  reikšmę vien tik dėl to, kad į tyrimą įtraukiame daug kintamųjų. Kita problema — jei modelis turi per daug regresorių, tai jis pradeda modeliuoti baltąjį triukšmą. Ši savybė dar vadinama per dideliu modelio tinkamumu (angl. "overfitting"). Šiuo atveju gauname klaidinančiai didelę  $R^2$  reikšmę, be to, sumažėja tikimybė gauti tikslią prognozę.

3. *ANOVA*  $p$  reikšmė. Ji parodo, ar modelyje yra su priklausomu kintamuoju susijusių regresorių. Jeigu  $p$  reikšmė didesnė už 0,05, tai regresijos modelio tinkamumas labai abejotinas (faktiškai gauname, kad  $Y$  statistiškai reikšmingai nepriklauso nuo  $X_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ ). Jeigu  $p$  reikšmė mažesnė už 0,05, gaunamas patvirtinimas, kad modelis gali būti tinkamas aiškinant dydžių priklausomybes. Galima ir tokia *ANOVA*  $p$  reikšmės interpretacija: sudarytas regresijos modelis yra statistiškai reikšmingai geresnis už modelį be regresorių, t.y., kai  $y$  modeliuojamas kaip konstanta.
4. *T* (Stjudento) kriterijai atskiriems regresoriams. Padeda nuspręsti, ar atitinkamas regresorius šalintinas iš modelio. Jeigu atitinkamo kriterijaus  $p$  reikšmė  $< 0,05$ , tariama, kad regresorius yra statistiškai reikšmingas ir dažniausiai jis modelyje paliekamas. Jeigu  $p$ -reikšmė  $\geq 0,05$ , tai regresorius laikomas statistiškai nereikšmingu ir gali būti pašalintas iš modelio. Dažniausiai modelio konstanta  $\beta_0$  paliekama net ir tada, kai ji statistiškai nereikšminga.

Ar tenkinamos regresijos modelio prielaidos parodo:

1. Standartizuotosios liekamosios paklaidos. Naudojamos patikrinti, ar  $Y$  normaliai pasiskirstęs.
2. Šapiro–Vilko (Shapiro–Wilk) testas paklaidoms. Jei atlikus testą gaunama  $p$  reikšmė  $\geq 0,05$ , tai standartizuotosios paklaidos yra normalios.

3. Breušo–Pagano (Breusch–Pagan) testas. Kriterijaus  $p$  reikšmė  $\geq 0,05$  rodo, kad duomenys yra homoskedastiški.

Tiesinės regresijos modelis turi tam tikrų apribojimų. Nustatomas tik sąlyginis priklausomojo kintamojo vidurkis  $\mathbb{E}(Y|X)$ , tačiau negaunama informacija apie visą priklausomojo kintamojo pasiskirstymą. Dažniausiai daroma prielaida, kad duomenys atitinka normalųjį skirstinį. Taip pat, tiesinės regresijos modelis yra netinkamas, kai duomenyse daug išskirčių.

## 3.2 Kvantilių regresija

Amerikiečių matematikai R. Koenker ir G. Bassett 1978 m. [10] pristatė kvantilių regresijos modelį, taip išplėsdami regresinės analizės galimybes. Atliekant kvantilių regresijos tyrimą nereikia daryti duomenų normalumo prielaidos, modelis tinkamas ir heteroskedastiškiems duomenims. Taip pat modelis yra atsparus išskirtims.

Prieš aprašydami kvantilių regresijos modelį trumpai priminsime kelis tikimybių teorijos apibrėžimus.

**3.1 apibrėžimas.** Funkcija  $F = F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  yra vadinama pasiskirstymo funkcija, jei tenkinamos šios savybės:

1.  $F$  yra nemažėjanti;
2.  $F(-\infty) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ ;
3.  $F(+\infty) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ;
4.  $F(x)$  yra tolydi iš dešinės ir turi ribą iš kairės kiekviename taške  $x \in \mathbb{R}$ .

**3.2 apibrėžimas.** Atsitiktinio dydžio  $Y$  pasiskirstymo funkcija vadinama

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

**3.3 apibrėžimas.** Atsitiktinio dydžio  $Y$   $\tau$  eilės apatiniu kvantiliu vadinamas skaičius  $Q(\tau)$ :

$$Q(\tau) = \inf\{y : F_Y(y) \geq \tau\}$$

čia  $\tau \in (0, 1)$ .

Kvantilis gali būti suprantamas kaip optimizacijos uždavinio sprendinys [10]. Bet kokiam  $0 < \tau < 1$ , apibrėžkime dalimis tiesinę funkciją  $\rho_\tau(u) = u(\tau - I(u < 0))$ , vadinamą nuostolio funkcija. Minimizuojant funkcijos  $\rho_\tau(Y - \zeta)$  vidurkį pagal  $\zeta$  gaunamas sprendinys  $\hat{\zeta}(\tau)$ , kuris yra eilės  $\tau$  kvantilis  $Q_\tau$ .

$\tau$  eilės kvantilis proporcingai dalija atsitiktinio dydžio  $Y$  reikšmes į dvi dalis:  $\tau \cdot 100\%$  reikšmių yra mažesnės už  $\tau$  eilės kvantilį, ir  $(1 - \tau) \cdot 100\%$  visų reikšmių yra didesnės. Imant  $n$  kvantilių reikšmių iš intervalo  $(0, 1)$  sudaroma  $n$  regresijos modelių, ir gaunamas išsamus sąlyginio kintamojo  $Y$  pasiskirstymas.

## Kvantilių regresijos modelio pritaikymas

Standartinis regresijos modelis nustatantis, kaip nuo regresorių priklausau tiriamojo dydžio vidurkis, yra užrašomas [11]:

$$y_i = \mathbb{E}(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \cdots + \beta_p X_{pi}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Modelio parametrai randami sprendžiant mažiausių kvadratų minimizavimo uždavinį:

$$\min_{\beta_0, \dots, \beta_p} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^p X_{ji} \beta_j \right)^2$$

Regresijos modelis, nustatantis atsitiktinio dydžio  $Y$  eilės  $\tau$  kvantilio priklausomybę nuo regresorių, užrašomas:

$$Q_\tau(Y_i) = \beta_0(\tau) + \beta_1(\tau) X_{1i} + \cdots + \beta_p(\tau) X_{pi}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Parametrai  $\beta_j(\tau)$  randami sprendžiant minimizavimo uždavinį:

$$\min_{\beta_0(\tau), \dots, \beta_p(\tau)} \sum_{i=1}^n \rho_\tau \left( y_i - \beta_0(\tau) - \sum_{j=1}^p X_{ji} \beta_j(\tau) \right).$$

Kvantilių regresijos modelio tinkamumui įvertinti netinka suderintasis  $R^2$ . Matematikai R. Koenker ir J. Machado 1999 m. [12] pristatė analogą  $R^2$ , kurį įvardijo kaip pseudo  $R^2$ .

Panagrinėkime tokį sąlyginio kvantilio tiesinį modelį:

$$Q_\tau(Y|X) = X_1' \beta_1(\tau) + X_2' \beta_2(\tau),$$

čia  $X_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$ ,  $X_2 \in \mathbb{R}^{p_2}$ ,  $p_1 + p_2 = p$ .  $X_1' = (1, X_{1i_1}, X_{1i_2}, \dots, X_{1i_{p_1}})$ .

Tegul  $\hat{\beta}(\tau) \in \mathbb{R}^p$  žymi reikšmę, kuri minimizuoja:

$$\hat{V}(\tau) = \min_{b \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n \rho_\tau(y_i - X_i' b).$$

O  $\tilde{\beta}(\tau) = (\tilde{\beta}_1(\tau)', \mathbf{0}')'$  žymi reikšmę, kuri minimizuoja:

$$\tilde{V}(\tau) = \min_{b_1 \in \mathbb{R}^{p_1}} \sum_{i=1}^n \rho_\tau(y_i - X_1' b_1).$$

Tinkamumo kriterijus  $R^1$  apibrėžiamas:

$$R^1(\tau) = 1 - \frac{\hat{V}}{\tilde{V}}.$$

$R^1(\tau)$  gali įgyti reikšmes nuo 0 iki 1.  $R^1$  parodo, kiek pilnas modelis geresnis už nepilną.

## 4 skyrius

# Praktinė dalis

### 4.1 Duomenys

Šiame skyrelyje aprašysime elektros duomenų tyrimą pritaikant laiko eilučių ir kvantilių regresijos modelius. Tyrimo objektas: 2018 metų valandiniai NordPool elektros biržos duomenys. Pateikiamos 2018 metų Lietuvos elektros kainos bei kiek elektros energijos Lietuva pirko iš kitų šalių arba pardavė pati. Elektros kaina matuojama eurais už megavatą (EUR/MW), o perduotas elektros energijos kiekis matuojamas megavatais (MW). Pateikiami pirkimai tarp Lietuvos ir Latvijos, Baltarusijos, Rusijos, Lenkijos bei Švedijos teritorijos (SE4). Jei mainų tarp Lietuvos ir konkrečios šalies kiekis yra teigiamas, tai Lietuva pirko iš tos šalies elektros energiją. O jei kiekis neigiamas, vadinasi, Lietuva tai šaliai pardavė elektros energijos. Tyrimo tikslas: nustatyti, kaip Lietuvos elektros kaina priklauso nuo praeities reikšmių ir elektros energijos mainų, rasti geriausiai tinkantį modelį ir nustatyti artimos ateities prognozuojamas kainas. Skaičiavimai atliekami naudojantis R programa.

Visų pirma pritaikysime paprastesnį ARMA modelį vienmatei kainos laiko eilutei, į tyrimą neįtraukdami energijos mainų daugiamatės laiko eilutės. Pažvelgę į kainų grafiką (5.1 pav.), galime preliminariai nustatyti, kokiomis savybėmis pasižymi eilutė. Pastebime, kad vyrauja gana nedidelis kintamos krypties trendas – bangavimai atrodo tarsi išsidėstę ant linijos, kuri iš pradžių nežymiai kyla, vėliau leidžiasi ir vėl pakyla. Taip pat elutė pasižymi dideliu kintamumu – pastebimi ramesni ir didesnių bangavimų periodai. Duomenyse atsiranda išskirtys, kai dėl neaiškių priežasčių kaina pastebimai išauga.

Norint padaryti tyrimą paprastesniu, laiko eilutė yra logaritmuojama (5.2 pav.). Toliau tiriame, ar eilutė yra stacionari. Atlikus ADF testą, gauta pakankamai maža  $p$ -reikšmė,  $p = 0.01$ , taigi galime atmesti nulinę hipotezę apie vienatinės šaknies egzistavimą. Tačiau vienas ADF

testas nėra pakankamai išsamus, ir pasitikrinimui atliekame KPSS testą. Gauta tokia pati  $p$ -reikšmė,  $p = 0.01$ , tačiau šiuo atveju tai reiškia, kad eilutė nėra stacionari.

Nustatome kainų sezoniškumą. Gaunami trys didžiausio tikėtino sezoniškumo periodai: 24, 9000 ir 12 valandų. 24 valandų bei 12 valandų (dienos / nakties) periodai yra savaimė suprantami, o kiek netikėtas 9000 valandų (375 dienų) periodas reiškia kiek didesnius nei metinius pasikartojimus.

## 4.2 ARMA modelis

Tegul  $X_t$  žymi logaritmuotą kainos laiko eilutę. Naudojantis antros eilės slenkančio vidurkio metodu nustatoma trendo funkcija:

$$T_t = \frac{1}{5} \sum_{j=-2}^2 X_{t+j}.$$

Kadangi ARMA metodas remiasi eilutės stacionarumo prielaida, trendas yra eliminuojamas (pav. 5.3):

$$Y_t = X_t - T_t$$

Dar kartą patikriname eilutės stacionarumą. ADF testo  $p$ -reikšmė  $< 0,01$ , o KPSS testo  $p$ -reikšmė  $> 0,1$ . Taigi, nauja laiko eilutė yra stacionari. Pritaikius *auto.arima* funkciją, R programa automatiškai pasiūlo tinkamiausios eilės ARMA modelį. Pasiūlytas ARMA(5,0,0) modelis, t.y., AR(5):

$$Y_t - 0,6289Y_{t-1} + 0,2848Y_{t-2} - 0,0775Y_{t-3} + 0,0229Y_{t-4} + 0,0501Y_{t-5} = Z_t.$$

Naudodami R programos funkciją *predict* sudarome 24 valandų prognozę. Ją palyginame su realiais 2019 metų duomenimis. Žinoma, prieš lyginant 2019 metų duomenims turi būti pritaikytos tos pačios transformacijos. 2019 metų duomenis logaritnavome ir eliminavome trendą. Prognozės tikslumui įvertinti apskaičiuojame paklaidas:

1. MAPE = 0.9905998;
2. RMSE = 0.229435;
3. MAE = 0.185677.

Toliau tiriame, ar modelio liekanos atitinka prielaidas, t.y., ar yra nekoreliuotos ir normaliai pasiskirsčiusios. Vaizdiniam įvertinimui nubraižome liekanų ACF bei PACF (5.5 pav.) grafikus. Iš grafikų matome, kad sudarytas blogas modelis, ACF ir PACF grafikuose yra daug

reikšmingumo lygmenį kertančių reikšmių, liekanos koreliuotos. Atlikus Shapiro–Wilk normalumo testą, gaunama  $p$ -reikšmė  $< 2.2e^{-16}$ , taigi, atmetame nulinę hipotezę, liekanos nėra normaliai pasiskirsčiusios.

Bandysime patobulinti modelį. Pradinę kainos laiko eilutę logaritmuojame. Tačiau trendo eliminavimui nebenaudojame slenkančio vidurkio metodo. Vietoje to, eliminuojame trendą skaičiuodami laiko eilutės skirtumus. Diferencijuojame eilutę pirmuoju laipsniu taip sudarydami „naują“ stebinių eilutę:

$$Y_t = X_t - X_{t-1}.$$

Nubraižome naujos eilutės autokoreliacijos grafiką (5.6 pav.). Ties vienetu pastebime gana didelę teigiamą autokoreliacijos reikšmę. Greičiausiai, pirmo laipsnio diferencijavimas yra nepakankamas ir eilutę reikia diferencijuoti antru laipsniu:

$$Y_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}.$$

Nubraižome antru laipsniu diferencijuotos eilutės autokoreliacijos grafiką (5.7 pav.). Pastebime, kad reikšmė ties vienetu yra neigiama. Norėdami atrasti optimalų diferencijavimo laipsnį, pradinę logaritmuotą laiko eilutę diferencijuojame trečiu laipsniu:

$$Y_t = X_t - 3X_{t-1} + 3X_{t-2} - X_{t-3}.$$

Autokoreliacijos grafike (5.8 pav.) pastebime, kad ties vienetu autokoreliacijos reikšmė yra mažesnė už  $-0.6$ . Greičiausiai, eilutę per daug diferencijavome. Yra patartina eilutę diferencijuoti tokiu laipsniu, kad ACF grafiko reikšmė ties vienetu nebūtų mažesnė už  $-0.5$ , taip pat patartina vengti eilutės diferencijavimo pernelyg dideliu laipsniu. Todėl apsistojame ties eilute, diferencijuota antru laipsniu, ir toliau šiai eilutei ieškosime optimalaus ARMA( $p, q$ ) modelio. Programos R funkcija *auto.arima* siūlo naudoti AR(5) modelį. Pradėdami nuo šio modelio, didinsime MA narių skaičių ir palyginsime skirtingus modelius.

Modelio eilė	$ar_1$	$ar_2$	$ar_3$	$ar_4$	$ar_5$	$ma_1$	$ma_2$	$ma_3$
ARMA(5,0)	-0.5686	-0.394	-0.3187	-0.2106	-0.1325	0	0	0
ARMA(5,1)	0.2160	0.0235	-0.0603	-0.0352	-0.0960	-1e+00	0	0
ARMA(5,2)	1.0866	-0.1773	-0.0872	0.0276	-0.0713	-1.947	0.9471	0
ARMA(5,3)	0.1262	0.8780	-0.2335	-0.1092	-0.0627	-1.0048	-0.9278	0.9327

4.1 lentelė: Lentelė su modelių koeficientais

Sustojame didinti MA narių skaičių ties modeliu ARMA(5, 3) kadangi nepatartina į vieną modelį įtraukti panašios eilės AR ir MA narius – jie



Modelio eilė	MSPE	MAPE	RMSD	AIC
ARMA(5,0)	0.8125996	0.9925813	0.1523307	-7080.86
ARMA(5,1)	0.8015862	0.981482	0.1962125	-8927.59
ARMA(5,2)	0.801295	0.9951619	0.1967681	-9647.96
ARMA(5,3)	0.7972191	0.9794566	0.1960451	-9653.4

4.2 lentelė: Modelių tikslumas

modelyje vienas kitą panaikina. Lyginant paklaidas ir informacijos kriterijų AIC modelis ARMA(5, 3) atrodo geriausias. Nors ARMA modelių paklaidos ganėtinai mažos, tačiau modeliai nėra geri. Nubraižius liekanų ACF ir PACF grafikus, pastebimas didelis liekanų koreliuotumas, be to, pagal Shapiro testą liekanos nėra normaliai pasiskirsčiusios.

### 4.3 GARCH modelis

Elektros kainos pasižymi heteroskedastiškumu, t.y., nepastovia dispersija, todėl joms pritaikysime GARCH( $p, q$ ) modelį. GARCH modelį galima suvokti kaip ARMA( $m, n$ )-GARCH( $p, q$ ) modelį, kuriame ARMA( $m, n$ ) išreiškia atsitiktinio dydžio sąlyginį vidurkį, o GARCH( $p, q$ ) žymi sąlyginę dispersiją. Palyginsime kelis skirtingų eilių ARMA( $m, n$ )-GARCH( $p, q$ ) modelius. Pradinę kainos laiko eilutę logaritnavome ir diferencijavome antru laipsniu. Modelio koeficientai parinkti naudojant R funkciją *ugarchfit*. Bendrai modelius galime užrašyti:

$$\begin{cases} Y_t = \sigma_t \epsilon_t, & \epsilon_t \sim \text{n.v.p. } N(0, 1) \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases}$$

ARMA( $m, n$ )-GARCH( $p, q$ ) modeliams sudarome 24 valandų prognozes. Taigi, gauname prognozuojamą 2019 metų sausio 1 dienos elektros kainą valandiniais intervalams. Gautą kainą palyginame su 2019 metų sausio 1 dienos realiais duomenimis. Tačiau, kadangi prognozuojamos kainos buvo gautos 2018 metų duomenis logaritnavus ir diferencijavus antru laipsniu, tai ir 2019 metų tikriesiems duomenims pritaikome tas pačias transformacijas. Prognozės tikslumą įvertiname paklaidomis:

$$\begin{aligned} MSPE &= E(Y_{n+24} - P_{\mathcal{M}}Y_{n+24})^2 \\ MAPE &= \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{24} \left| \frac{Y_{n+h} - P_{\mathcal{M}}Y_{n+h}}{Y_{n+h}} \right| \\ RMSD &= \sqrt{\frac{\sum_{h=1}^{24} (P_{\mathcal{M}}Y_{n+h} - Y_{n+h})^2}{24}} \end{aligned}$$

Modelio tinkamumą nustatome lygindami AIC ir BIC kriterijus bei logaritmuotos tikėtinumo funkcijos įvertį ("log likelihood estimator", LLE). Ieškome optimalaus modelio, su geriausiais tinkamumo kriterijais, bei mažiausia eile. Sudarome koeficientų ir jų standartinių paklaidų lentelę.

Modelis	$\mu$	$ar_1$	$ar_2$	$ar_3$	$ar_4$	$ar_5$
ARMA(5,3)-GARCH(1,1)	0.000028	0.333624	0.897459	-0.435447	-0.105501	-0.072216
s.e.	0.000015	0.012909	0.013795	0.016990	0.013820	0.012834
ARMA(5,3)-GARCH(1,2)	0.000023	0.337999	0.900820	-0.440280	-0.107187	-0.064161
s.e.	0.000016	0.013253	0.013305	0.017087	0.013403	0.012651
ARMA(5,3)-GARCH(1,3)	0.000016	0.344138	0.901520	-0.443719	-0.100894	-0.061864
s.e.	0.000016	0.013652	0.013432	0.016839	0.013530	0.012050
ARMA(5,3)-GARCH(2,1)	0.000028	0.333622	0.897459	-0.435448	-0.105501	-0.072215
s.e.	0.000015	0.013239	0.013796	0.017192	0.013852	0.012887
ARMA(5,3)-GARCH(3,1)	0.000028	0.333623	0.897459	-0.435447	-0.105501	-0.072216
s.e.	0.000016	0.013348	0.013800	0.017228	0.013890	0.012888

4.3 lentelė: ARMA( $m, n$ )-GARCH( $p, q$ ) modelių koeficientai

Modelis	$ma_1$	$ma_2$	$ma_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
ARMA(5,3)-GARCH(1,1)	-0.935025	-0.957192	0.901151	0.138104	0	0	0.860896	0	0
s.e.	0.000006	0.000006	0.000008	0.003619	0	0	0.001569	0	0
ARMA(5,3)-GARCH(1,2)	-0.935603	-0.954895	0.899327	0.175473	0	0	0.463206	0.360320	0
s.e.	0.000006	0.000006	0.000008	0.005825	0	0	0.037045	0.032234	0
ARMA(5,3)-GARCH(1,3)	-0.933620	-0.956685	0.899023	0.204896	0	0	0.448261	0.000001	0.345843
s.e.	0.000006	0.000006	0.000008	0.006999	0	0	0.047313	0.059355	0.030094
ARMA(5,3)-GARCH(2,1)	-0.935025	-0.957193	0.901151	0.138104	0.000000	0	0.860896	0	0
s.e.	0.000007	0.000006	0.000008	0.008450	0.009183	0	0.001599	0	0
ARMA(5,3)-GARCH(3,1)	-0.935026	-0.957192	0.901150	0.138104	0.000000	0.000000	0.860896	0	0
s.e.	0.000007	0.000006	0.000008	0.008461	0.012314	0.009170	0.001613	0	0

4.4 lentelė: ARMA( $m, n$ )-GARCH( $p, q$ ) modelių koeficientai

Pastebime, kad neverta nagrinėti modelių, kuriuose GARCH eilė  $q$  yra didesnė už 1, nes koeficientai  $\alpha_2, \alpha_3$  yra artimi nuliui ir nereikšmingi. Toliau didiname GARCH eilę  $p$ , o eilę  $q$  paliekame lygią vienetui ir ieškome optimalaus modelio.

Modelis	$\mu$	$ar_1$	$ar_2$	$ar_3$	$ar_4$	$ar_5$
ARMA(5,3)-GARCH(1,4)	0.000018	0.353940	0.903382	-0.454733	-0.101272	-0.050659
s.e.	0.000017	0.013782	0.013598	0.016988	0.013573	0.012225
ARMA(5,3)-GARCH(1,5)	0.000016	0.363366	0.904239	-0.461429	-0.095464	-0.043726
s.e.	0.000018	0.014218	0.013824	0.017272	0.013901	0.012254

4.5 lentelė: ARMA( $m, n$ )-GARCH( $p, q$ ) modelių koeficientai

Modelis	$ma_1$	$ma_2$	$ma_3$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$
ARMA(5,3)-GARCH(1,4)	-0.935566	-0.952376	0.896920	0.224090	0.456334	0.000002	0.063932	0.254642	0
s.e.	0.000006	0.000006	0.000008	0.008936	0.047385	0.043214	0.050750	0.024797	0
ARMA(5,3)-GARCH(1,5)	-0.935228	-0.951360	0.895654	0.247993	0.437629	0.000001	0.038171	0.000001	0.275206
s.e.	0.000006	0.000006	0.000008	0.009074	0.036447	0.048492	0.051143	0.041194	0.028325

4.6 lentelė: ARMA( $m, n$ )-GARCH( $p, q$ ) modelių koeficientai

Modelio eilė	MSPE	MAPE	RMSD	AIC	BIC	LLE	EZ
ARMA(5,3)-GARCH(1,1)	0.8053829	1.011851	0.1949099	-2.0007	-1.9910	8773.954	0.002485796
ARMA(5,3)-GARCH(1,2)	0.8057119	1.010166	0.1947596	-2.0116	-2.0011	8822.821	0.002757736
ARMA(5,3)-GARCH(1,3)	0.8062714	1.007816	0.1945523	-2.0267	-2.0154	8889.835	0.0030419
ARMA(5,3)-GARCH(1,4)	0.806601	1.005972	0.1942791	-2.0347	-2.0226	8926.172	0.002860445
ARMA(5,3)-GARCH(1,5)	0.8072128	1.002736	0.193889	-2.0458	-2.0328	8975.431	0.002902147
ARMA(5,3)-GARCH(2,1)	0.8053829	1.011851	0.1949099	-2.0004	-1.9899	8773.954	0.002485837
ARMA(5,3)-GARCH(3,1)	0.8053828	1.011851	0.1949099	-2.0002	-1.9889	8773.954	0.002485916

4.7 lentelė: ARMA(m,n)-GARCH(p,q) modelių paklaidos, informacijos kriterijai ir liekanų vidurkiai

Pagal logaritmuotos tikėtinumo funkcijos įvertį LLE ir informacijos kriterijus AIC ir BIC iš lentelėje pristatytų modelių geriausias yra ARMA(5,3)-GARCH(1,5). Šio modelio LLE pats didžiausias, o AIC ir BIC yra mažiausi. Patikriname, ar visi modelio koeficientai yra reikšmingi. Tikriname, ar nulis priklauso intervalui  $[c - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, c + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ , čia  $c$  yra koeficientas, kurio reikšmingumą tikriname, o  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  yra standartinė paklaida (s.e.). Taip patikrinę modelio ARMA(5,3)-GARCH(1,5) koeficientus, gauname, kad  $\mu, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  yra nereikšmingi. Taigi, galime nagrinėti paprastesnį modelį ARMA(5,3)-GARCH(1,4), tačiau patikrinus koeficientus gauname, kad  $\mu, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  yra nereikšmingi. Toliau tikriname modelį ARMA(5,3)-GARCH(1,3). Visi modelio koeficientai, išskyrus  $\mu$  yra reikšmingi. Modelio ARMA(5,3)-GARCH(1,3) paklaidos beveik vienodos kaip ir modelių ARMA(5,3)-GARCH(1,2), ARMA(5,3)-GARCH(1,1), tačiau AIC, BIC reikšmės mažesnės, o LLE reikšmė didesnė. Taigi, modelis ARMA(5,3)-GARCH(1,3) atrodo geriausias.

Nubrėžiame 2019 metų sausio 1os dienos prognozuojamų ir realių kainų grafiką 5.10. Prognozė nėra tokia, kokios norėtusi – grafike neatsispindi elektros kainų svyravimai, galime laikyti, kad gavome prognozuojamą kainos vidurkį. Kita modelio problema – nors liekanų vidurkis yra artimas nuliui ( $EZ = 0.0030419$ ), tačiau liekanos yra koreliuotos, tai matome iš ACF ir PACF grafikų.

## 4.4 VAR modelis

Elektros kaina turėtų priklausyti nuo to, kiek elektros yra pagaminama Lietuvoje ir kiek nuperkama iš kitų šalių. Todėl į kainos prognozavimą įtraukiame elektros mainų duomenis ir pritaikome vektorinį autoregresinį modelį. Stebėjimus laiko momentu  $t$  pažymėkime  $X_t = (X_{t1}, X_{t2}, \dots, X_{t6})'$ . Vektorių  $X_t$  sudaro:

$X_{t1}$  — elektros kaina (EUR)

$X_{t2}$  — elektros mainų kiekis (EUR/MWH) tarp Lietuvos ir Latvijos,

$X_{t3}$  — elektros mainų kiekis (EUR/MWH) tarp Lietuvos ir Baltarusijos,

$X_{t4}$  — elektros mainų kiekis (EUR/MWH) tarp Lietuvos ir Rusijos,  
 $X_{t5}$  — elektros mainų kiekis (EUR/MWH) tarp Lietuvos ir Švedijos dalies SE4,  
 $X_{t6}$  — elektros mainų kiekis (EUR/MWH) tarp Lietuvos ir Lenkijos.

Skirtingai nei vienmačiu atveju, duomenų negalime logaritmuoti, nes kai kurie mainų duomenys yra neigiami. Norėdami pašalinti tendą, visus duomenis diferencijuojame antru laipsniu ir sudarome naują vektorių  $Y_t$ . Jo reikšmės yra:

$$Y_{tk} = \nabla^2 X_{tk} = X_{tk} - 2X_{t-1,k} + X_{t-2,k}, \quad k = 1, \dots, 6.$$

Tikriname, ar visos naujos laiko eilutės yra stacionarios. Atlikus stacionarumo testus, visoms laiko eilutėms gautos  $p$ -reikšmės yra vienuose intervaluose. ADF testo  $p$ -reikšmė mažesnė už 0,01, o KPSS testo reikšmė didesnė už 0,1. Taigi, seka  $Y_t$  yra stacionari. Sudarome eilės  $p$  VAR modelį:

$$Y_t = \nu + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + Z_t,$$

čia  $\nu$  yra konstanta,  $\phi_1, \dots, \phi_p$  koeficientų vektoriai,  $Z_t$  modelio liekanos.

Nubraižome skirtingų eilių VAR(p) modelių prognozių grafikus (žr. 5.1 pav.). Taikant VAR modelį  $R$  programa automatiškai nurodo pasikliautinąjį intervalą — mažiausią ir didžiausią prognozuojamą kainą. Realios elektros kainos pasižymi dideliu svyravimu, galima sakyti, kad mažos eilės VAR modeliai prognozuoja būsimų kainų vidurkį. Prognozuojama kaina nesvyruoja taip, kaip reali. Tačiau visuose modeliuose didžioji dalis realios kainos kreivės guli pasikliautinajame intervale, į šį intervalą nepatenka tik išskirtinai mažos arba didelės reikšmės. Didinant modelio eilę pastebima, kad prognozuojama kaina atsiliepia į rinkos pokyčius. Ji nežymiai svyruoja, tačiau svyravimai atrodo „pasislinkę“ laike — iš pradžių prognozuojama kaina didėja ir mažėja taip pat kaip ir reali kaina, tačiau ties didesniais laiko momentais realiai kainai didėjant, prognozuojama kaina nežymiai mažėja ir atvirkščiai.

Modelių tinkamumą įvertiname lygindami paklaidas ir suderintojo  $R$ -kvadrato reikšmes.

Suderintasis  $R^2$  didinant modelio eilę  $p$  didėja, tačiau tai dar nereiškia, kad modelis su aukščiausia eile yra pats geriausias, kadangi modelyje gali būti nereikšmingų koeficientų. Visų modelių koeficientų reikšmingumo lentelės pateiktos prieduose (žr. 5.12 lentelę). Lentelėse pateiktos  $R$  programos gražintos VAR modelių koeficientų reikšmės. Naudojami reikšmingumo žymėjimai: „\*\*\*“ žymi labai reikšmingą koeficientą (pa-

Modelio eilė	MSPE	MAPE	RMSD	$R^2$	EZ
VAR(1)	128.9863	0.9744559	1.622046	0.1964	0.002411036
VAR(2)	128.4847	0.9700836	1.246812	0.2788	0.004030704
VAR(3)	126.4665	1.010098	1.083187	0.313	0.001879986
VAR(4)	130.3359	1.02095	0.8997053	0.3516	0.002753639
VAR(5)	129.9441	0.9727849	0.7602129	0.3722	0.002461987
VAR(10)	123.9497	0.8986815	0.2834395	0.4448	0.004265137
VAR(15)	126.1559	0.9530819	0.0007047154	0.4623	-0.0004696587

4.8 lentelė: VAR(p) modelių paklaidos, determinacijos koeficientas  $R^2$  ir liekanų vidurkiai.

siklovimo lygmuo 0.001), „\*\*“ vidutinio reikšmingumo koeficientą (pasiklovimo lygmuo 0.01), „\*“ ir „.“ žymi mažo reikšmingumo koeficientus (pasiklovimo lygmenys atitinkamai 0.05 ir 0.1). O visai nereikšmingi koeficientai neturi žymėjimo.

Nors modelio VAR(15) determinacijos koeficientas pats aukščiausias, tačiau modelyje yra nereikšmingų koeficientų. Kiek mažesnę determinacijos koeficientą turi modelis VAR(10), tačiau jame kai kurie koeficientai prie sekos  $Y_{t2}$  yra nereikšmingi. Kyla įtarimas, kad elektros mainų kiekis tarp Lietuvos ir Latvijos turi gana nežymų poveikį elektros kainai, todėl iš tiriamų duomenų pašaliname seką  $Y_{t2}$  ir sudarome naują penkiamatį VAR(9) modelį. Jo koeficientai prie  $Y_{t-9}$  yra nereikšmingi (žr. 5.3 lentelę), todėl toliau mažiname eilę  $p$  ir sudarome penkiamatį VAR(8) modelį. Taip gaunamas modelis, kurio beveik visi koeficientai reikšmingi (žr. 5.4 lentelę).

Sudaryta 24 valandų prognozė grafiškai atrodo pakankamai gerai (5.13 pav.). Modelio VAR(8) paklaidos:

1. MSPE = 128,1936
2. MAPE = 0,9372224
3. RMSD = 0,3039664

Modelio VAR(8) suderintasis determinacijos koeficientas  $R^2$  yra 0,4183. Liekanų vidurkis 0,001427433. Modelio liekanos nestipriai koreliuotos (5.13 pav.) ir nėra normaliai pasiskirsčiusios, atlikus Shapiro-Wilko testą gauta  $p$ -reikšmė  $< 2.2e-16$ .

## 4.5 Kvantilių regresija

Šiame skyrelyje elektros kainoms pritaikysime kvantilių regresijos modelį ir nustatysime sąryšius tarp kainos ir elektros mainų duomenų. Elektros

kainos yra neviendodai pasiskirsčiusios bei turi išskirčių. Taigi, yra netenkinamos tiesinės regresijos prielaidos. Tyrimo objektas: 2018 metų NorPool elektros biržos valandiniai duomenys. (Tiriami tie patys duomenys, kaip ir laiko eilučių metodų skyreliuose.) Elektros mainų duomenys buvo apdoroti: NordPool tinklapyje pateikiami duomenys matuojami megavatais (MW), o tyrime naudojami duomenys gigavatais (GW), taip siekiant išvengti itin mažų ir artimų nuliui koeficientų regresijos lygtyje.

Stebėjimus laiko momentu  $t$  pažymėkime  $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t}, \dots, X_{5,t})'$ . Vektorių  $X_t$  sudaro:

- $X_{1,t}$  — elektros mainų kiekis (GWH) tarp Lietuvos ir Latvijos,
- $X_{2,t}$  — elektros mainų kiekis (GWH) tarp Lietuvos ir Baltarusijos,
- $X_{3,t}$  — elektros mainų kiekis (GWH) tarp Lietuvos ir Rusijos,
- $X_{4,t}$  — elektros mainų kiekis (GWH) tarp Lietuvos ir Švedijos dalies SE4,
- $X_{5,t}$  — elektros mainų kiekis (GWH) tarp Lietuvos ir Lenkijos.

Sudarome 19 regresijos modelių kvantilių  $\tau$  eilėms: 0,05, 0,1, 0,15, 0,20, 0,25, 0,30, 0,35, 0,40, 0,45, 0,50, 0,55, 0,60, 0,65, 0,70, 0,75, 0,80, 0,85, 0,90, 0,95.

Kvantilių regresijos modelis užrašomas:

$$Q_\tau(Y_t) = \beta_0(\tau) + \beta_1(\tau)X_{1,t} + \dots + \beta_6(\tau)X_{6,t}, \quad t = 1, \dots, 8761.$$

Kvantilio  $\tau$  eilės regresijos koeficientai  $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_5$  randami sprendžiant minimizavimo uždavinį.

$$\min_{\beta_0(\tau), \dots, \beta_5(\tau)} \sum_{t=1}^{8761} \rho_\tau \left( y_t - \beta_0(\tau) - \sum_{j=1}^5 X_{jt} \beta_j(\tau) \right),$$

čia  $y_t = \min \mathbb{E} \rho_\tau(X_{1,t} - \zeta)$ , o  $\rho$  yra teorinėje dalyje aprašyta nuostolio funkcija.

Prieduose pateikiamos lentelės su gautų modelių koeficientų įverčiais ir jų reikšmingumu (5.1, 5.1, 5.1, 5.1, 5.1, 5.1 lentelės). Žemiau pateikiamos ANOVA testo  $p$ -reikšmės bei  $R^1(\tau)$  reikšmės (4.9 lentelė).

Visiems modeliams gauta ANOVA  $p$ -reikšmė priklauso vienam intervalui ( $p < 2 \exp^{-16}$ ). Kaip buvo minėta teorinėje dalyje, jeigu  $p$ -reikšmė mažesnė už 0,05, gaunamas patvirtinimas, kad modelis gali būti tinkamas aiškinant dydžių priklausomybes. Bet  $R^1$  reikšmės yra labai mažos. Greičiausiai elektros kainos priklauso nuo daugiau regresorių, o ne vien tik nuo elektros mainų.

Kvantilio $\tau$ eilė	ANOVA $p$ -reikšmė	$R^1(\tau)$
0.05	$p < 2 \exp^{-16}$	0.04736905
0.10	$p < 2 \exp^{-16}$	0.02778846
0.15	$p < 2 \exp^{-16}$	0.01595995
0.20	$p < 2 \exp^{-16}$	0.01538485
0.25	$p < 2 \exp^{-16}$	0.02108899
0.30	$p < 2 \exp^{-16}$	0.02950484
0.35	$p < 2 \exp^{-16}$	0.03688712
0.40	$p < 2 \exp^{-16}$	0.04120069
0.45	$p < 2 \exp^{-16}$	0.04348263
0.50	$p < 2 \exp^{-16}$	0.04680769
0.55	$p < 2 \exp^{-16}$	0.05113755
0.60	$p < 2 \exp^{-16}$	0.05625102
0.65	$p < 2 \exp^{-16}$	0.06274327
0.70	$p < 2 \exp^{-16}$	0.07119797
0.75	$p < 2 \exp^{-16}$	0.076815
0.80	$p < 2 \exp^{-16}$	0.07803102
0.85	$p < 2 \exp^{-16}$	0.07336936
0.90	$p < 2 \exp^{-16}$	0.06524869
0.95	$p < 2 \exp^{-16}$	0.06241925

4.9 lentelė: Modelių tinkamumo indikatoriai.

Sudarysime naują kvantilių regresijos modelį. Ištirsime, kaip kaina priklauso nuo mainų krypčių ir kaip papildomą regresorių įtrauksime ankstesnę elektros kainą. Taip pat ištirsime, kaip elektros kaina priklauso nuo paros laiko. Valandinius duomenis suskirstome į 4 intervalus:

1. rytas nuo 05:00 iki 11:00;
2. diena nuo 11:00 iki 17:00;
3. vakaras nuo 17:00 iki 23:00;
4. naktis nuo 23:00 iki 05:00.

Tegul indeksas  $i = 1, \dots, 4$  žymi laiko intervalą. Stebėjimus laiko momentu  $t$ ,  $i$ -tajame intervale pažymėkime:

- $X_{i,t}^1$  — elektros kaina (EUR MW),
- $X_{i,t}^2$  — elektros mainų kiekis (GW) tarp Lietuvos ir Latvijos,
- $X_{i,t}^3$  — elektros mainų kiekis (GW) tarp Lietuvos ir Baltarusijos,
- $X_{i,t}^4$  — elektros mainų kiekis (GW) tarp Lietuvos ir Rusijos,
- $X_{i,t}^5$  — elektros mainų kiekis (GW) tarp Lietuvos ir Švedijos dalies SE4,
- $X_{i,t}^6$  — elektros mainų kiekis (GW) tarp Lietuvos ir Lenkijos.

Sudarysime modelius kvantilių eilėms: 0,05; 0,10; 0,25; 0,5; 0,75; 0,90; 0,95. Regresijos modelis  $\tau$  kvantilio eilei intervalui  $i$  užrašomas:

$$Q_{\tau}(X_{i,t}^1) = \beta_{i,0}(\tau) + \beta_{i,1}(\tau)X_{i,t-1}^1 + \beta_{i,2}(\tau)X_{i,t}^2 + \dots + \beta_{i,6}(\tau)X_{i,t}^6,$$

$t = 1, \dots, 8761$ . Apskaičiuojame  $i$ -tojo intervalo kvantilio  $\tau$  eilės regresijos koeficientų įverčius  $\widehat{\beta}_{i,0}, \dots, \widehat{\beta}_{i,6}$ :

$$\min_{\beta_{i,0}(\tau), \dots, \beta_{i,6}(\tau)} \sum_{t=1}^{8761} \rho_{\tau} \left( y_t - \beta_{i,0}(\tau) - X_{i,t-1}^1 \beta_{i,1} - \sum_{j=1}^5 X_{i,t}^j \beta_j(\tau) \right),$$

Modelių tinkamumui įvertinti naudojamos ANOVA  $p$ -reikšmės ir  $R^1$  reikšmės (lentelės pateiktos prie kiekvieno periodo aprašymo). Visiems modeliams gautos ANOVA  $p$ -reikšmės priklauso vienam intervalui:  $p < 2 \exp^{-16}$ . Taigi, pagal ANOVA kriterijų modeliai yra tinkami aiškinant dydžių priklausomybes. Į tyrimą įtraukus ankstesnės kainos regresorių išaugo  $R^1$  reikšmės. Jeigu gavus  $R^1$  reikšmę, lygią vienetui, galima laikyti, kad modelis idealiai paaiškina dydžių priklausomybes, tai, tarkime, gavus  $R^1$  reikšmę, aukštesnę arba lygią 0,80, galime laikyti modelį geru. Tam tikros eilės kvantiliams gauti modeliai, kurių  $R^1$  reikšmės artimos 0,80 (pavyzdžiui, kvantilio 0,50 eilės nakties periodu gauta  $R^1$  reikšmė 0,7966). Nakties periodui gautos gana aukštos  $R^1$  reikšmės visiems kvantilio lygmenims. O ryto ir vakaro periodams gautos kiek mažesnės  $R^1$  reikšmės (jos svyruoja nuo 0,58 iki 0,66). Ryto ir vakaro periodais greičiausiai daugiau veiksnių nulemia elektros kainą, norint gauti geresnį modelį reiktų į tyrimą įtraukti daugiau regresorių, tokių, kaip paklausa, sukauptos elektros rezervas (angl. "reserve margin forecast"), elektros žaliavų (anglies, dujų) kainos.

Prie kiekvieno periodo pateikiamos modelių koeficientų reikšmės ir jų standartinės paklaidos. Taip pat pateikiami kvantilių regresijos grafikai. Grafikuose  $x$  ašyje atidėtos kvantilių eilės, o  $y$  ašyje koeficientai prie atitinkamo regresoriaus modelyje. Raudona ištisinė linija žymi tiesinės regresijos tiesę, o punktyrine linija žymimas pasikliautinis intervalas. Juodi taškai žymi regresoriaus koeficiento įvertį ties eilės  $\tau$  kvantiliu. Pilka juosta žymimas kvantilių regresijos modelio pasikliautinis intervalas.

## Ryto periodas

Eilės 0,05 - 0,25 kvantilius galima laikyti nurodančiais mažą kainą. Ją daugiausia nulemia mainai su Rusija, ypač išsiskiria koeficientas ties 0,05 kvantiliu. Taip pat įtakos mažai kainai ryto valandomis daro mainai su Baltarusija (0,05 ir 0,10 kvantilio eilės). Ties 0,25 kvantiliu išauga mainų su Lenkija ir Švedija įtaka. Vidutinę ir aukštesnę nei vidutinę kainą (0,50 ir 0,75 kvantilio eilės) ryto valandomis daugiausia nulemia mainai su Rusija, Lenkija ir Latvija. Ties 0,90 ir 0,95 kvantilio eile pastebima įdomi tendencija — iš Rusijos perkamos elektros kiekio didinimas neiigiamai veikia ypač aukštą elektros kainą, t.y., ji mažėja. Taip pat išauga



mainų su Lenkija įtaka kainai. Turbūt šį efektą galima paaiškinti taip: Rusijos elektra ganėtinai pigi, o Lenkijos — pati brangiausia iš lyginamųjų šalių. Perkant daugiau pigios rusiškos elektros nei brangios lenkiškos, kaina mažėja. Atkreiptinas dėmesys į tai, kad kainai turi įtakos prieš tai buvusi kaina (grafike didėjant kvantilio eilei, koeficientas prie regresoriaus taip pat nežymiai didėja.) Mainų su Lenkija grafike didėjant kvantilio eilei, didėja koeficientas prie Lenkijos regresoriaus, galime daryti išvadą, didesnis iš Lenkijos nupirkto elektros kiekis lemia didesnę kainą ryto valandomis.

Koeficientas	$\tau = 0.05$		$\tau = 0.10$		$\tau = 0.25$	
	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.
$\beta_{1,0}$	2.61387	0.56026	2.44191	0.34454	1.38305	0.17988
$\beta_{1,1}$	0.79577	0.00655	0.85880	0.00723	0.92233	0.00184
$\beta_{1,2}$	1.15527	0.44290	0.55883	0.28901	0.72060	0.17835
$\beta_{1,3}$	3.00395	0.42973	1.56898	0.34958	0.17044	0.20531
$\beta_{1,4}$	8.97491	0.75998	6.52269	0.49091	5.37017	0.27054
$\beta_{1,5}$	0.41810	0.36173	0.71582	0.25929	1.35171	0.14751
$\beta_{1,6}$	1.13282	0.46478	1.92319	0.36757	1.52991	0.18647

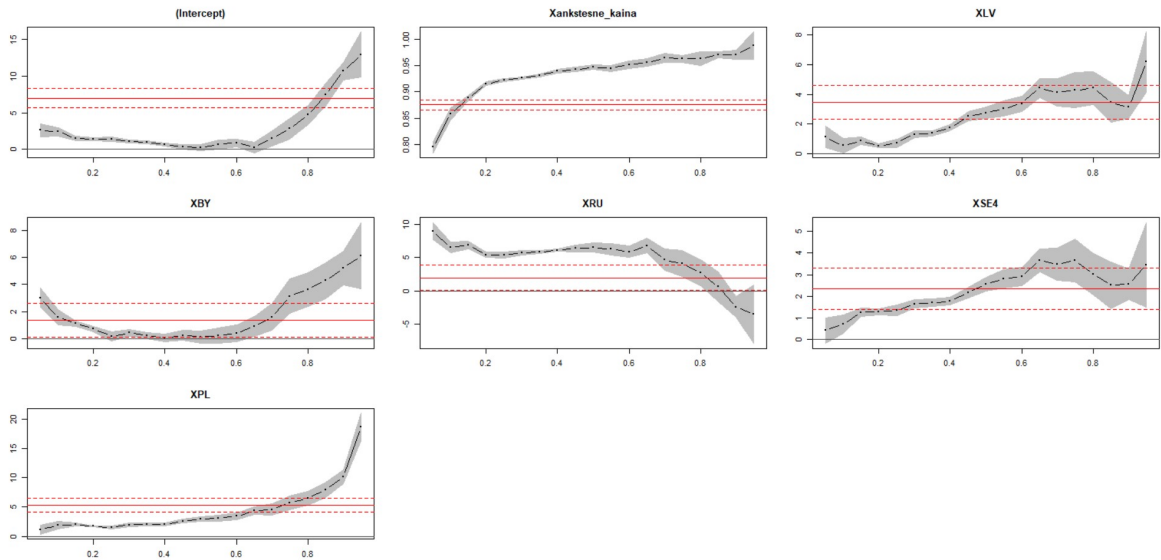
4.10 lentelė: Ryto periodo modelių koeficientai ir standartinės paklaidos.

Koeficientas	$\tau = 0.5$		$\tau = 0.75$		$\tau = 0.9$		$\tau = 0.95$	
	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.
$\beta_{1,0}$	0.25981	0.27664	2.82156	0.85857	10.71461	0.75095	12.98876	1.88741
$\beta_{1,1}$	0.94670	0.00265	0.96282	0.00408	0.97056	0.00505	0.98758	0.01605
$\beta_{1,2}$	2.77358	0.24343	4.28375	0.72475	3.14955	0.46380	6.19438	1.23213
$\beta_{1,3}$	0.12515	0.26861	3.12056	0.76934	5.20500	0.75953	6.11454	1.48468
$\beta_{1,4}$	6.49550	0.40977	4.11975	1.21367	-2.40804	0.93620	-3.49094	2.64463
$\beta_{1,5}$	2.55070	0.19920	3.65157	0.60807	2.56412	0.43070	3.45207	1.18435
$\beta_{1,6}$	2.95087	0.24530	5.73845	0.73726	10.16955	0.74077	18.60255	1.41769

4.11 lentelė: Ryto periodo modelių koeficientai ir standartinės paklaidos.

Kvantilio $\tau$ eilė	ANOVA $p$ -reikšmė	$R^1(\tau)$
0.05	$p < 2 \exp^{-16}$	0.5887029
0.10	$p < 2 \exp^{-16}$	0.6299538
0.25	$p < 2 \exp^{-16}$	0.6647234
0.50	$p < 2 \exp^{-16}$	0.6545809
0.75	$p < 2 \exp^{-16}$	0.5999172
0.90	$p < 2 \exp^{-16}$	0.5424137
0.95	$p < 2 \exp^{-16}$	0.5268315

4.12 lentelė: Ryto periodo modelių tinkamumo indikatoriai.



4.1 pav.: Ryto periodo modelių grafikai.

## Dienos periodas

Gautos ganėtinai geros ANOVA  $p$ –reikšmės ir  $R^1$  reikšmės. Dieną mažai kainai (kvantiliai 0,05 - 0,25) daugiausia įtakos turi mainai su Rusija, Latvija ir Lenkija. Vidutinei kainai daugiausia įtakos turi mainai su Rusija ir Lenkija, taip pat pastebima prieš tai buvusios kainos įtaka. Ties aukštą kainą reprezentuojančiomis 0,90 ir 0,95 kvantilių eilėmis pastebimas tas pats fenomenas kaip ir ryto valandomis — neigiamas koeficientas prie mainų su Rusija regresoriaus. Didinamas iš Rusijos perkamos elektros kiekis neleidžia elektros kainai ženkliai išaugti. Tačiau, skirtingai nei ryto valandomis, dieną aukštai elektros kainai nedaro tokios didelės įtakos mainai su Lenkija. Aukštą elektros kainą dieną labiau veikia mainai su Latvija ir Baltarusija. Grafikuose pastebimas ankstesnės kainos poveikis esamai elektros kainai dienos metu.

Koeficientas	$\tau = 0.05$		$\tau = 0.10$		$\tau = 0.25$	
	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.
$\beta_{2,0}$	-0.29232	0.89634	3.12853	0.58892	1.45353	0.23323
$\beta_{2,1}$	0.72457	0.01400	0.78973	0.00732	0.91295	0.00434
$\beta_{2,2}$	4.40473	0.72885	1.60689	0.48048	0.79153	0.21940
$\beta_{2,3}$	1.62743	1.00610	0.64867	0.54909	0.29345	0.23865
$\beta_{2,4}$	19.66625	1.26588	10.70108	1.04430	3.79482	0.34560
$\beta_{2,5}$	2.05151	0.73195	0.29258	0.43526	0.44492	0.19245
$\beta_{2,6}$	4.72219	0.93190	3.12488	0.54318	1.73442	0.24688

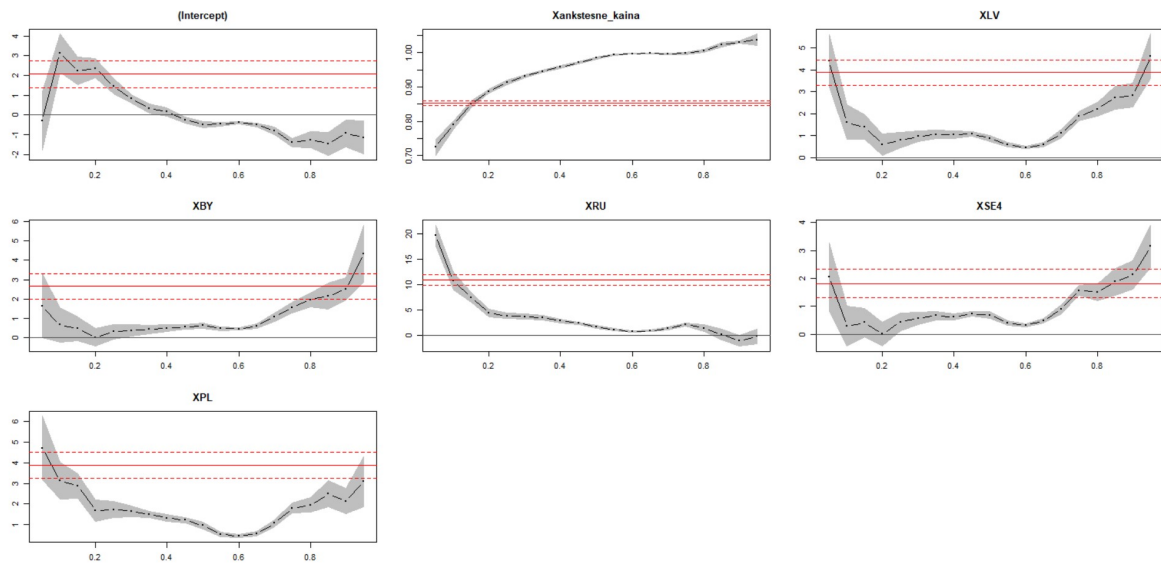
4.13 lentelė: Dienos periodo modelių koeficientai ir standartinės paklaidos.

Koefficientas	$\tau = 0.5$		$\tau = 0.75$		$\tau = 0.9$		$\tau = 0.95$	
	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.
$\beta_{2,0}$	-0.48984	0.09162	-1.39861	0.13522	-0.92476	0.41674	-1.13576	0.50382
$\beta_{2,1}$	0.98434	0.00210	0.99819	0.00203	1.03047	0.00237	1.03720	0.01031
$\beta_{2,2}$	0.86983	0.08669	1.87756	0.12075	2.84061	0.33546	4.61740	0.61432
$\beta_{2,3}$	0.61201	0.09260	1.55092	0.16506	2.50970	0.35040	4.34988	0.89408
$\beta_{2,4}$	1.63395	0.15951	2.08460	0.17939	-1.16680	0.63636	-0.26074	0.90074
$\beta_{2,5}$	0.69529	0.08094	1.57575	0.10986	2.12616	0.31028	3.14673	0.46096
$\beta_{2,6}$	0.95550	0.09766	1.79696	0.14882	2.14744	0.37126	3.08493	0.73323

4.14 lentelė: Dienos periodo modelių koeficientai ir standartinės paklaidos.

Kvantilio $\tau$ eilė	ANOVA $p$ -reikšmė	$R^1(\tau)$
0.05	$p < 2 \exp^{-16}$	0.5870662
0.10	$p < 2 \exp^{-16}$	0.6434272
0.25	$p < 2 \exp^{-16}$	0.728672
0.50	$p < 2 \exp^{-16}$	0.7862383
0.75	$p < 2 \exp^{-16}$	0.7801723
0.90	$p < 2 \exp^{-16}$	0.7404268
0.95	$p < 2 \exp^{-16}$	0.7150036

4.15 lentelė: Dienos periodo modelių tinkamumo indikatoriai.



4.2 pav.: Dienos periodo modelių grafikai.

## Vakaro periodas

Vakare mažą kainą (kvantilių eilės 0,05 - 0,25) labiausiai veikia iš Rusijos, Lenkijos ir Latvijos perkamos elektros kiekis. O mainų su Baltarusija kiekis nuo 0,05 iki 0,75 kvantilio eilės kainą veikia neigiamai — iš Baltarusijos perkamos elektros kiekiui didėjant, kaina mažėja. Vidutinę elektros kainą (0,50 eilės kvantilis) labiausiai veikia mainai su Rusija, Lenkija ir Latvija. Kvantilio eilei didėjant, pastebima išauganti prieš tai

buvusios kainos įtaka esamai kainai. Vakare aukštą kainą (0,90 eilės kvantilis) labiausiai veikia mainai su Lenkija ir Latvija, o ypač aukštą kainą (0,95 eilės kvantilis) neigiamai veikia mainai su Rusija ir Švedija. Iš šių šalių perkamos pigesnės elektros kiekio didinimas neleidžia kainai ženkliai pakilti. Modelių grafikuose labiausiai išsiskiria matomas ryškus ankstesnės kainos poveikis esamos kainos augimui.

Koeficientas	$\tau = 0.05$		$\tau = 0.10$		$\tau = 0.25$	
	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.
$\beta_{3,0}$	3.26953	1.15381	2.80471	0.54047	3.54895	0.28660
$\beta_{3,1}$	0.65243	0.01630	0.71931	0.00868	0.82095	0.00486
$\beta_{3,2}$	5.34621	1.10486	4.74056	0.48153	2.00268	0.30811
$\beta_{3,3}$	-0.46438	1.04109	-4.17686	0.45527	-5.19225	0.35653
$\beta_{3,4}$	11.90453	2.07158	12.54716	1.11254	7.22430	0.58022
$\beta_{3,5}$	5.00733	1.01279	4.19566	0.50215	1.81897	0.28466
$\beta_{3,6}$	10.74522	1.26182	8.26403	0.50887	4.41430	0.32263

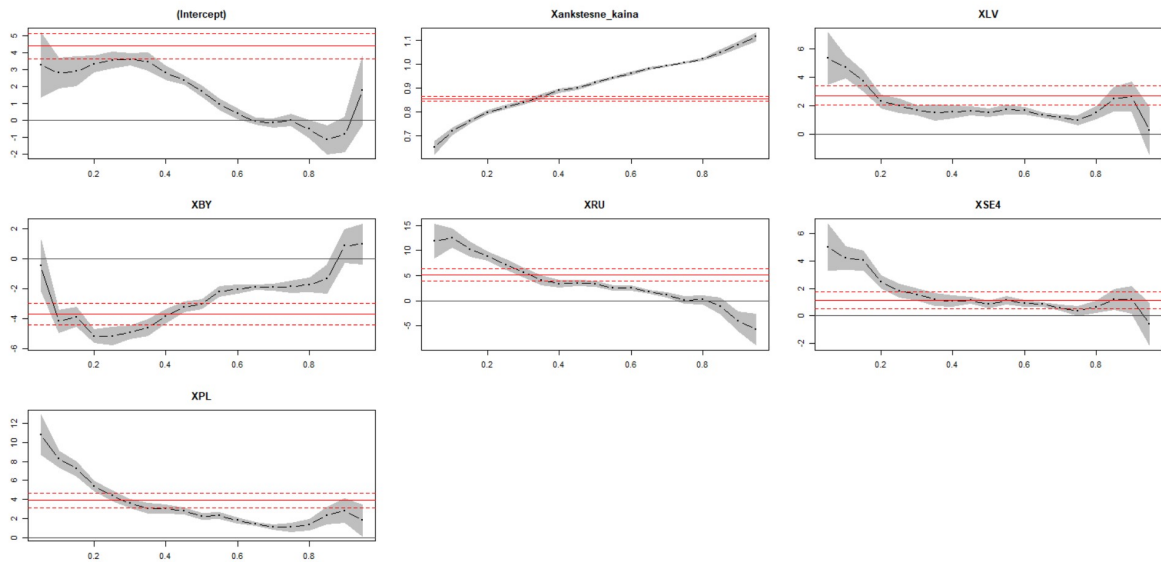
4.16 lentelė: Vakaro periodo modelių koeficientai ir standartinės paklaidos.

Koeficientas	$\tau = 0.5$		$\tau = 0.75$		$\tau = 0.90$		$\tau = 0.95$	
	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.
$\beta_{3,0}$	1.72353	0.18590	0.00656	0.21093	-0.84412	0.62371	1.75459	1.22743
$\beta_{3,1}$	0.92345	0.00370	1.00712	0.00277	1.08257	0.00776	1.11537	0.01039
$\beta_{3,2}$	1.51482	0.16927	0.97181	0.19369	2.65828	0.63039	0.23650	0.99795
$\beta_{3,3}$	-3.04501	0.18174	-1.88181	0.23221	0.85977	0.66947	0.97557	0.81628
$\beta_{3,4}$	3.37627	0.31728	0.15938	0.43523	-4.04242	1.16267	-5.69358	1.88469
$\beta_{3,5}$	0.84205	0.15385	0.36967	0.19135	1.18284	0.59292	-0.59021	0.92048
$\beta_{3,6}$	2.25410	0.18182	1.11757	0.25820	2.86123	0.75046	1.84488	1.00966

4.17 lentelė: Vakaro periodo modelių koeficientai ir standartinės paklaidos.

Kvantilio $\tau$ eilė	ANOVA $p$ -reikšmė	$R^1(\tau)$
0.05	$p < 2 \exp^{-16}$	0.5870662
0.10	$p < 2 \exp^{-16}$	0.534941
0.25	$p < 2 \exp^{-16}$	0.6064003
0.50	$p < 2 \exp^{-16}$	0.6606269
0.75	$p < 2 \exp^{-16}$	0.6661853
0.90	$p < 2 \exp^{-16}$	0.6180625
0.95	$p < 2 \exp^{-16}$	0.583916

4.18 lentelė: Vakaro periodo modelių tinkamumo indikatoriai.



4.3 pav.: Vakarų periodo modelių grafikai.

## Nakties periodas

Naktį mažai kainai (0,05 - 0,25 eilės kvantiliai) didžiausią įtaką daro mainai su Lenkija, Latvija ir Rusija. Vidutinę kainą (0,50 eilės kvantilis) labiausiai veikia mainai su Rusija, Lenkija ir Baltarusija. Kainai didėjant (0,75 eilės kvantilis) nežymiai išauga ankstesnės kainos įtaka esamos kainos augimui. Aukštą kainą (0,90 ir 0,95 eilės kvantiliai) labiausiai veikia mainai su Rusija, Baltarusija bei ankstenė kaina. Tačiau, lyginant su kitais periodais, naktį ankstesnės kainos įtaka esamai kainai nėra tokia didelė. Dar daugiau, grafike pastebima, kad kvantilio eilei didėjant nuo 0,80 iki 1,00, koeficientas modeliuose prie ankstesnės kainos regresoriaus mažėja. Įdomu tai, kad iš Švedijos nupirkta elektros kiekis neigiamai veikia kainą visiems kvantilių lygmenims nakties periodu. Nakties periodo grafikuose koeficientų prie regresorių didėjimas arba mažėjimas nėra toks staigus kaip kvantilių regresijos modeliuose kitais periodais.

Koeficientas	$\tau = 0.05$		$\tau = 0.10$		$\tau = 0.25$	
	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.
$\beta_{4,0}$	-4.83780	0.73158	-3.25029	0.29903	-0.78154	0.12960
$\beta_{4,1}$	0.93926	0.01863	0.94046	0.00447	0.93822	0.00194
$\beta_{4,2}$	3.96548	0.74327	2.61214	0.26373	1.40927	0.10404
$\beta_{4,3}$	-1.01809	0.77343	0.26245	0.15782	0.81014	0.08272
$\beta_{4,4}$	1.31765	0.88980	2.76235	0.36309	1.92915	0.18496
$\beta_{4,5}$	-4.62968	0.70502	-2.81129	0.21724	-0.63277	0.09555
$\beta_{4,6}$	6.05126	0.91034	3.58780	0.22678	2.02106	0.10119

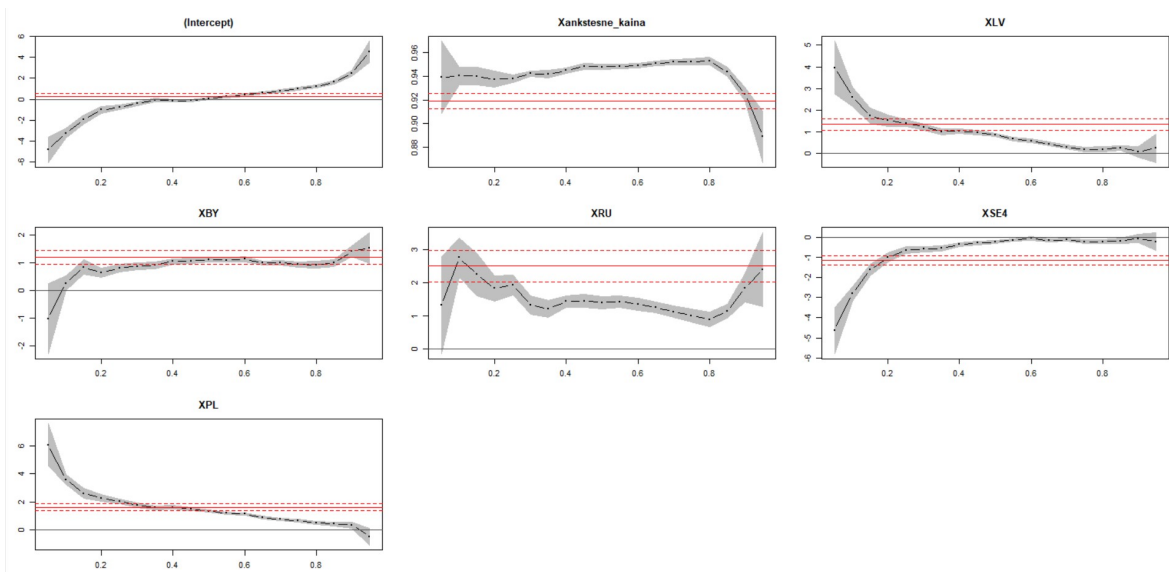
4.19 lentelė: Nakties periodo modelių koeficientai ir standartinės paklaidos.

Koeficientas	$\tau = 0.5$		$\tau = 0.75$		$\tau = 0.90$		$\tau = 0.95$	
	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.	Reikšmė	s.e.
$\beta_{4,0}$	0.07936	0.08220	1.00769	0.07708	2.48201	0.18100	4.54862	0.61576
$\beta_{4,1}$	0.94805	0.00145	0.95237	0.00146	0.92515	0.00362	0.88894	0.01320
$\beta_{4,2}$	0.86523	0.04729	0.17647	0.06283	0.08807	0.15603	0.25536	0.39909
$\beta_{4,3}$	1.11065	0.05262	0.94064	0.05786	1.42487	0.12617	1.53613	0.34450
$\beta_{4,4}$	1.40033	0.11131	1.00678	0.12119	1.84827	0.25861	2.40285	0.67795
$\beta_{4,5}$	-0.23678	0.05307	-0.21987	0.05361	-0.05861	0.13633	-0.21508	0.27557
$\beta_{4,6}$	1.33630	0.04721	0.63895	0.06218	0.33741	0.14113	-0.48397	0.37177

4.20 lentelė: Nakties periodo modelių koeficientai ir standartinės paklaidos.

Kvantilio $\tau$ eilė	ANOVA $p$ -reikšmė	$R^1(\tau)$
0.05	$p < 2 \exp^{-16}$	0.690793
0.10	$p < 2 \exp^{-16}$	0.7186378
0.25	$p < 2 \exp^{-16}$	0.7722197
0.50	$p < 2 \exp^{-16}$	0.7966698
0.75	$p < 2 \exp^{-16}$	0.7862893
0.90	$p < 2 \exp^{-16}$	0.7121144
0.95	$p < 2 \exp^{-16}$	0.6297048

4.21 lentelė: Nakties periodo modelių tinkamumo indikatoriai.



4.4 pav.: Nakties periodo modelių grafikai.

## 4.6 Išvados

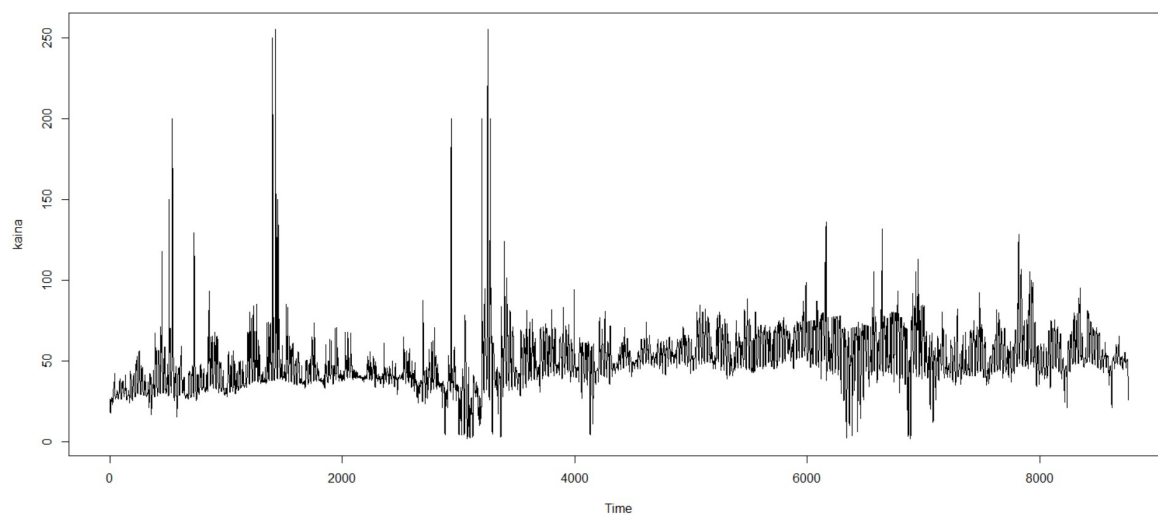
1. Iš nagrinėtų laiko eilučių modelių elektros kainos prognozei tinkamiausias VAR modelis. Naudojant VAR modelį prognozuojamas ne tik kainos vidurkis, bet ir jos svyravimai (grafikuose prognozuojama kaina didėja ir mažėja panašiai kaip ir reali kaina).

2. Gauti pakankamai geri kvantilių regresijos modeliai keturiems paros periodams. Tačiau siekiant gauti išsamesnę informaciją būtų galima pritaikyti modelius valandiniams periodams. O siekiant pagerinti modelių tinkamumą būtų galima įtraukti papildomų regresorių.
3. Toliau plėtojant darbą šia tema būtų galima atlikti stresinių situacijų testavimą — naudojant gautus kvantilių regresijos modelius iširti, kaip skirtingais periodais reaguoja kaina kintant tam tikro regresoriaus reikšmėms skirtingiems  $\tau$  eilės kvantiliams.
4. Kitas su kvantilių regresija susijęs uždavinys — sąlyginės vertės pokyčio rizikos (angl. "conditional value at risk") apskaičiavimas. Tai būtų galima atlikti ateityje, remiantis gautais kvantilių regresijos modeliais.

# 5 skyrius

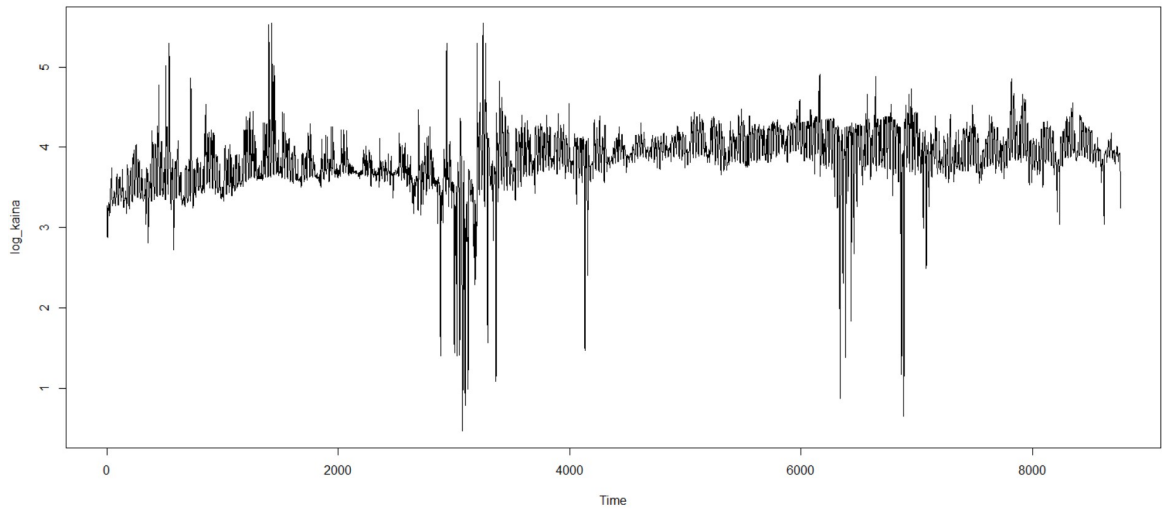
## Priedai

### 5.1 Grafikai

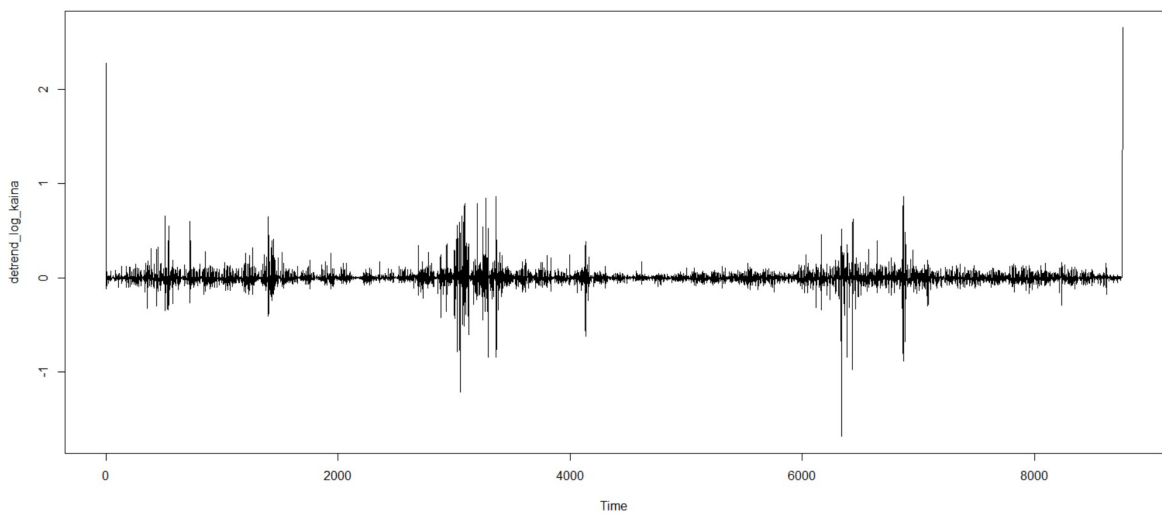


5.1 pav.: 2018 m. Lietuvos elektros kainos

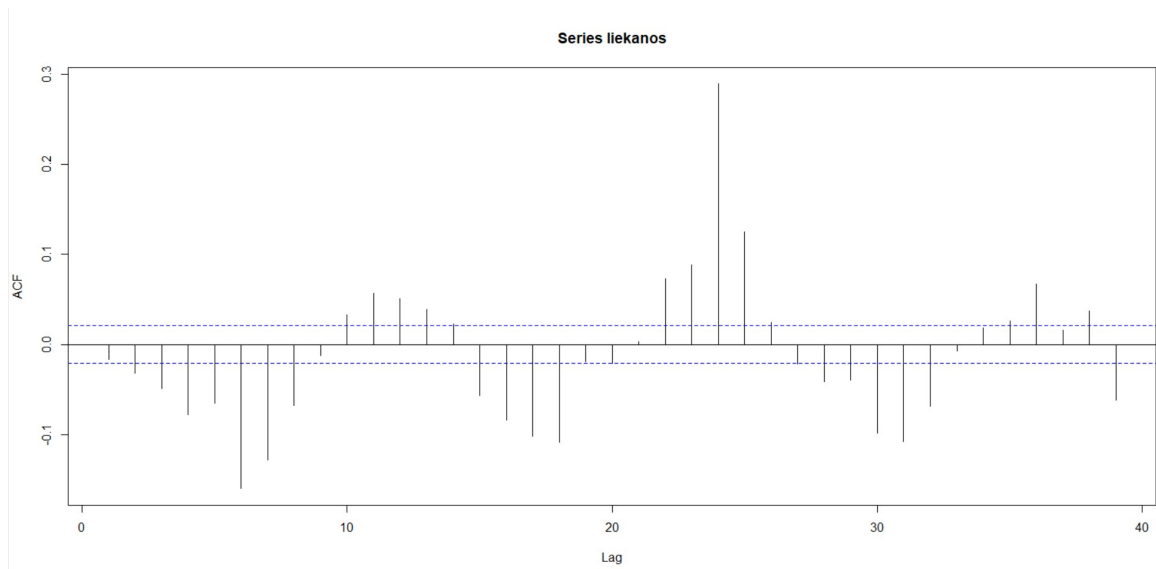




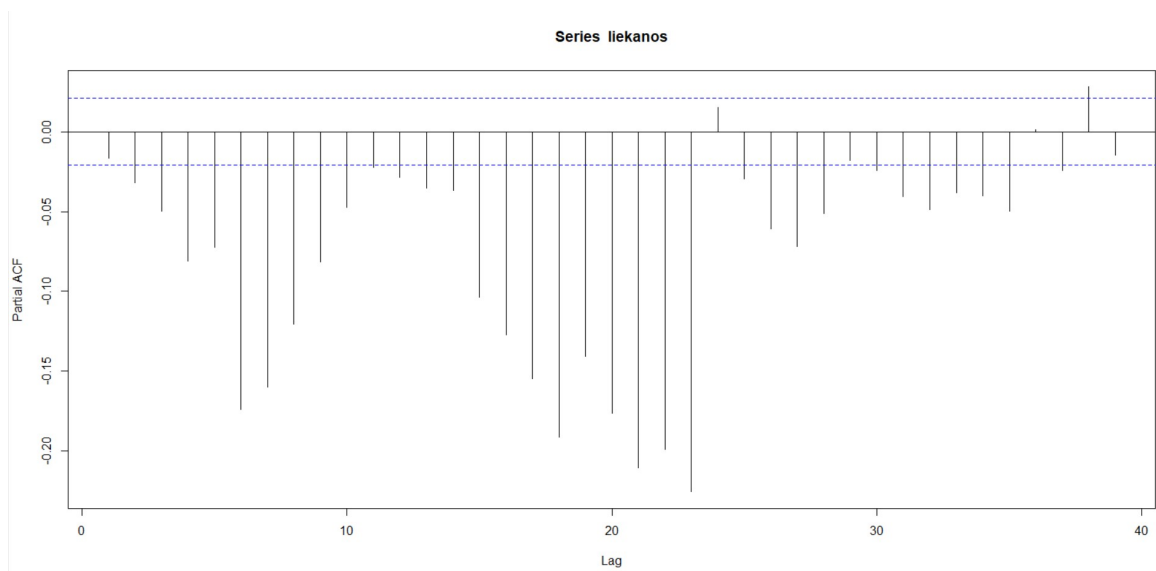
5.2 pav.: 2018 m. logaritmuotos Lietuvos elektros kainos



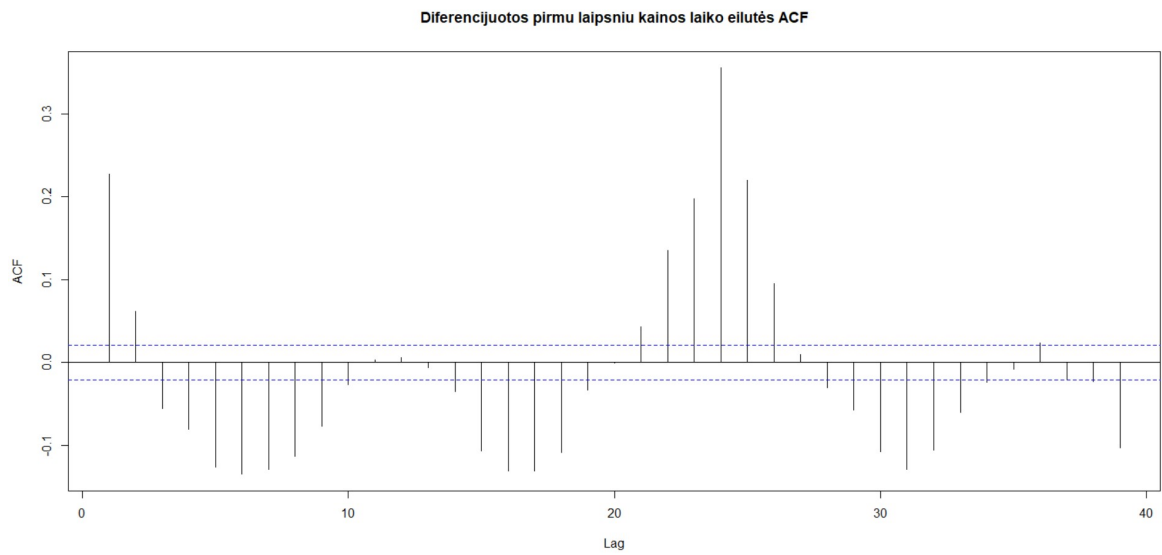
5.3 pav.: 2018 m. logaritmuotos Lietuvos elektros kainos, pašalinus trendo funkciją



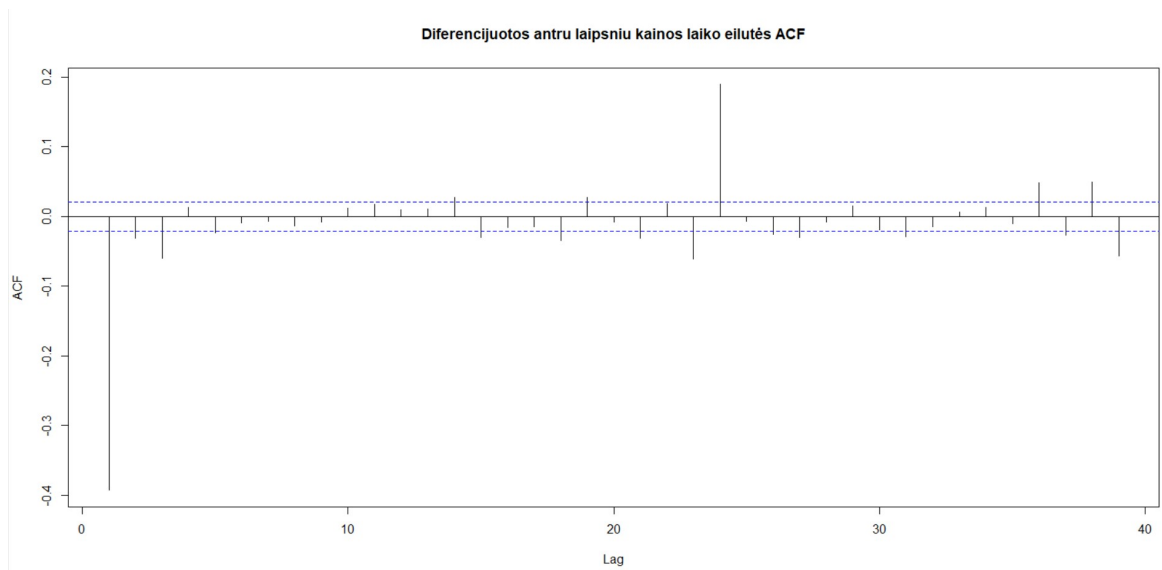
5.4 pav.: AR(5) modelio liekanų autokoreliacijos grafikas



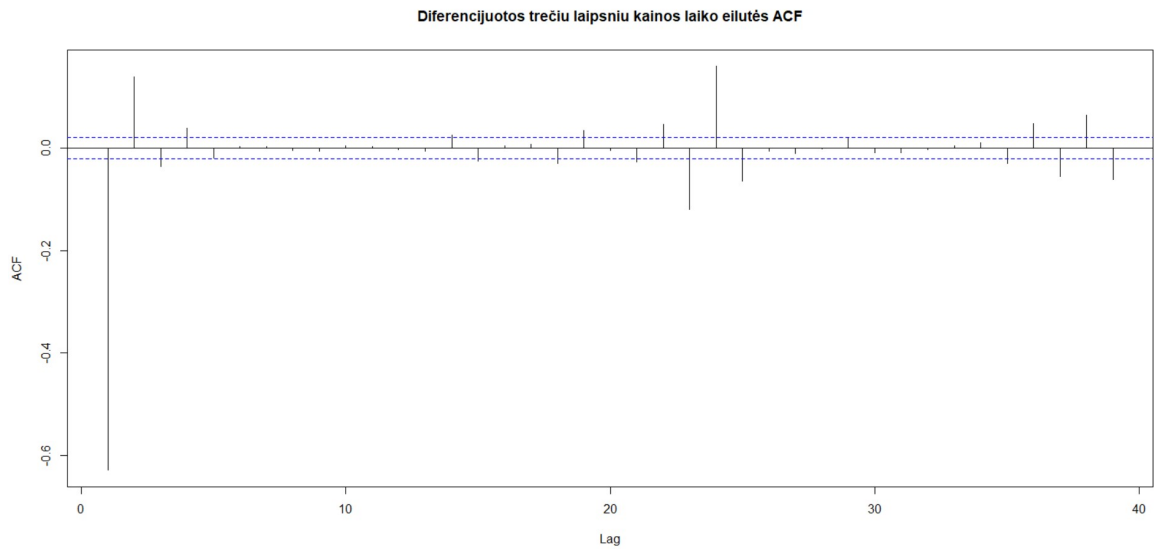
5.5 pav.: AR(5) modelio liekanų dalinės autokoreliacijos grafikas



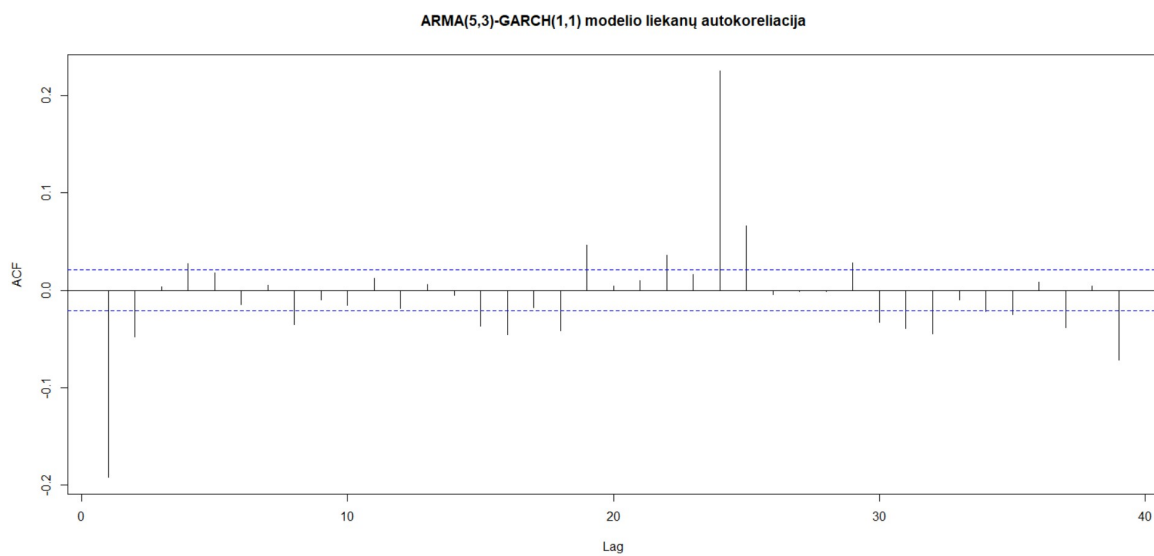
5.6 pav.: Diferencijuotos eilutės autokoreliacijos grafikas



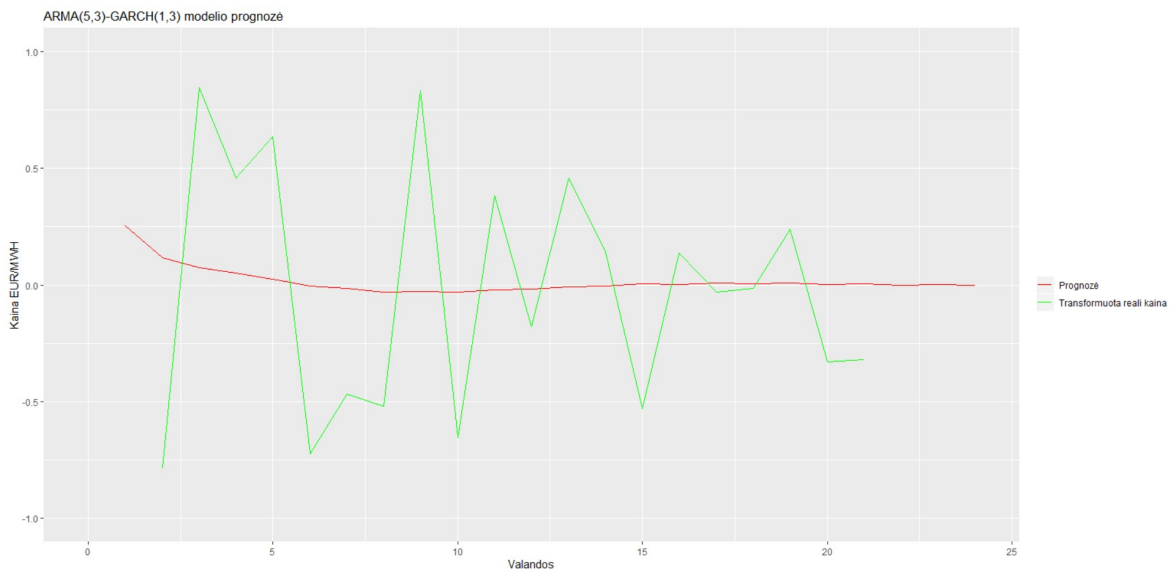
5.7 pav.: Diferencijuotos eilutės autokoreliacijos grafikas



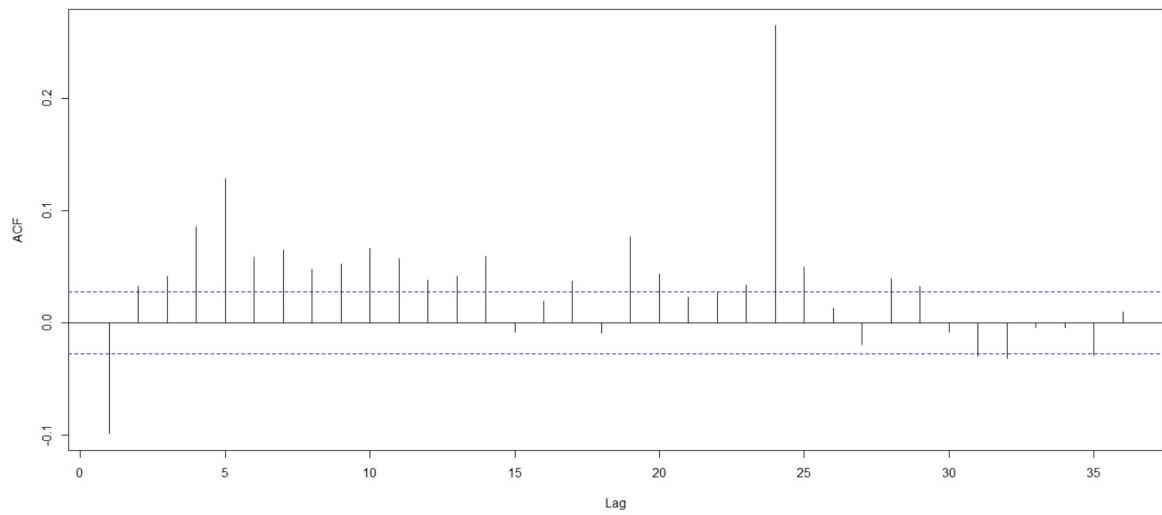
5.8 pav.: Diferencijuotos eilutės autokoreliacijos grafikas



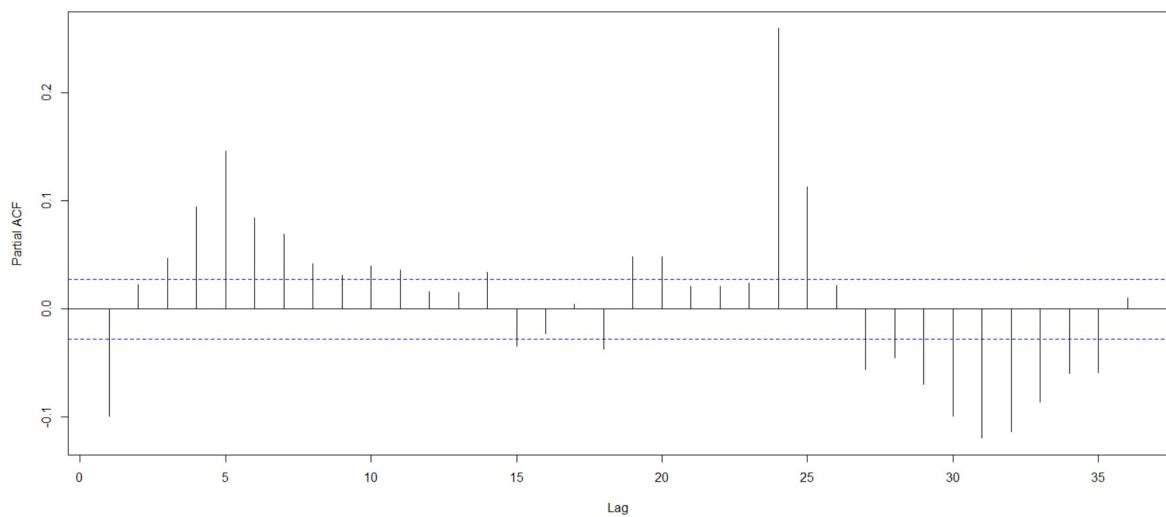
5.9 pav.: ARMA(5,3)-GARCH(1,1) modelio liekanų autokoreliacijos grafikas



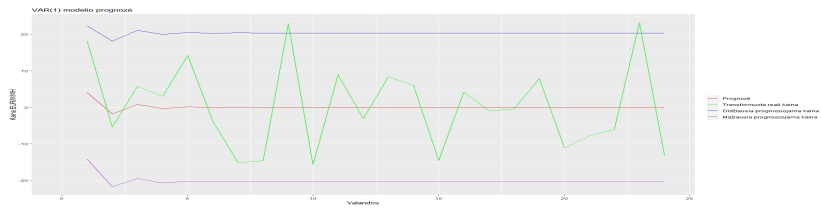
Modelio ARMA(5,3)-GARCH(1,3) liekanų ACF



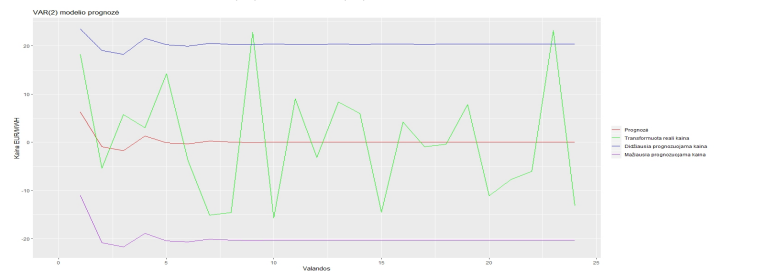
Modelio ARMA(5,3)-GARCH(1,3) liekanų PACF



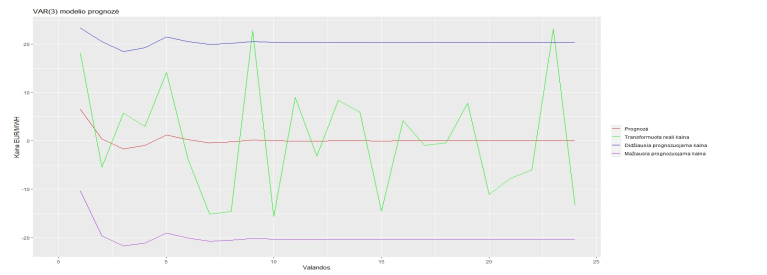
5.10 pav.: ARMA(5,3)-GARCH(1,3) modelio prognozė, liekanų ACF ir PACF grafikai



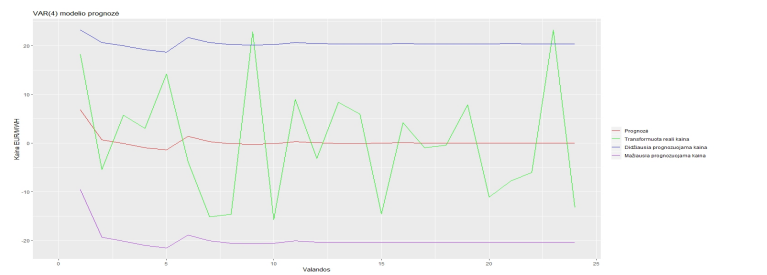
(a) VAR(1) prognozė



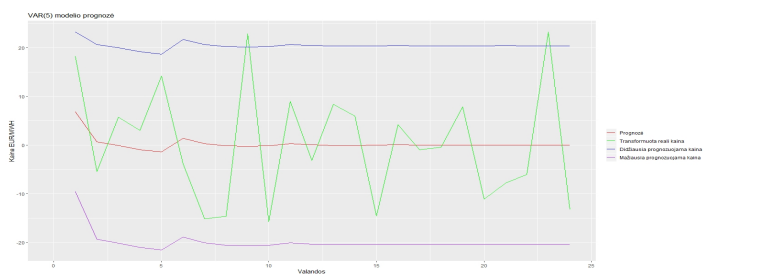
(b) VAR(2) prognozė



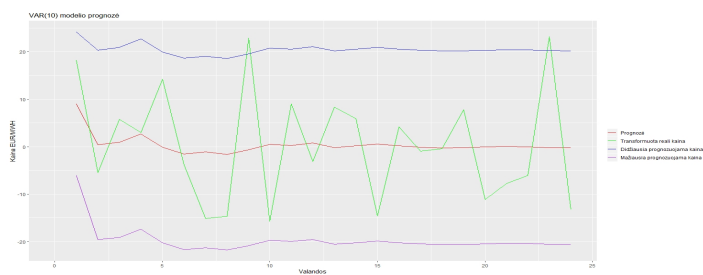
(c) VAR(3) prognozė



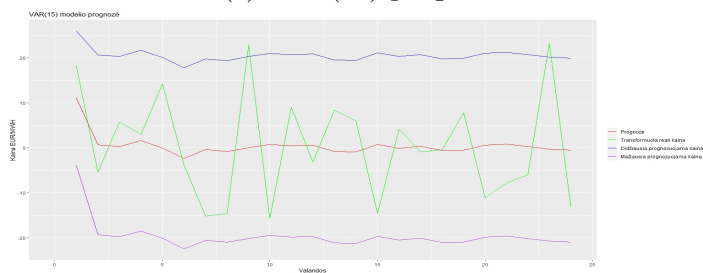
(d) VAR(4) prognozė



(e) VAR(5) prognozė



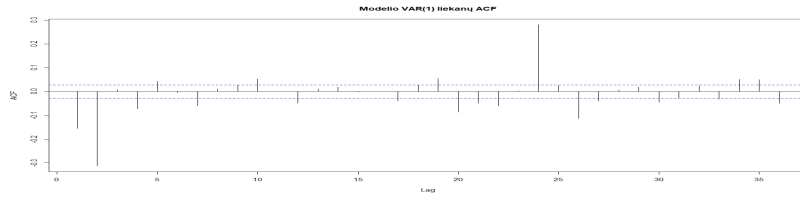
(e) VAR(10) prognozė



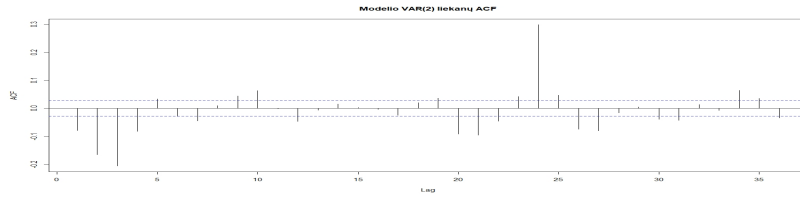
(f) VAR(15) prognozė

Koeficientas	Reikšmė	s.e.	Reikšmingumo ženklas	Koeficientas	Reikšmė	s.e.	Reikšmingumo ženklas
price.l1	-8.757e-01	1.089e-02	***	price.l16	-5.346e-01	1.884e-02	***
ltlv.l1	2.399e-03	9.313e-04	**	ltlv.l16	9.510e-03	1.601e-03	***
ltby.l1	-1.107e-02	1.087e-03	***	ltby.l16	-1.350e-02	1.903e-03	***
ltrū.l1	-3.775e-02	2.973e-03	***	ltrū.l16	-9.702e-03	4.030e-03	*
ltse4.l1	-2.283e-03	7.378e-04	**	ltse4.l16	4.407e-03	1.177e-03	***
ltpl.l1	-2.558e-03	8.147e-04	**	ltpl.l16	2.717e-03	1.448e-03	.
price.l2	-8.406e-01	1.441e-02	***	price.l17	-4.610e-01	1.802e-02	***
ltlv.l2	1.921e-03	1.190e-03		ltlv.l17	9.566e-03	1.559e-03	***
ltby.l2	-1.951e-02	1.426e-03	***	ltby.l17	-1.048e-02	1.839e-03	***
ltrū.l2	-3.404e-02	3.424e-03	***	ltrū.l17	-8.666e-04	3.946e-03	
ltse4.l2	-3.089e-03	9.153e-04	***	ltse4.l17	5.004e-03	1.151e-03	***
ltpl.l2	-4.836e-03	1.093e-03	***	ltpl.l17	6.241e-03	1.387e-03	***
price.l3	-7.646e-01	1.672e-02	***	price.l18	-3.437e-01	1.666e-02	***
ltlv.l3	2.598e-03	1.392e-03	.	ltlv.l18	8.494e-03	1.433e-03	***
ltby.l3	-2.211e-02	1.665e-03	***	ltby.l18	-7.311e-03	1.701e-03	***
ltrū.l3	-2.607e-02	3.824e-03	***	ltrū.l18	4.797e-03	3.713e-03	
ltse4.l3	-1.281e-03	1.040e-03		ltse4.l18	4.178e-03	1.072e-03	***
ltpl.l3	-5.222e-03	1.289e-03	***	ltpl.l18	6.097e-03	1.270e-03	***
price.l4	-7.320e-01	1.799e-02	***	price.l19	-2.289e-01	1.428e-02	***
ltlv.l4	2.885e-03	1.525e-03	.	ltlv.l19	5.890e-03	1.222e-03	***
ltby.l4	-2.012e-02	1.818e-03	***	ltby.l19	-6.060e-03	1.463e-03	***
ltrū.l4	-2.344e-02	4.037e-03	***	ltrū.l19	6.843e-03	3.343e-03	*
ltse4.l4	-5.322e-05	1.124e-03		ltse4.l19	2.096e-03	9.409e-04	*
ltpl.l4	-4.723e-03	1.407e-03	***	ltpl.l19	3.951e-03	1.081e-03	***
price.l5	-6.205e-01	1.883e-02	***	price.l10	-1.000e-01	1.078e-02	***
ltlv.l5	4.524e-03	1.585e-03	**	ltlv.l10	5.316e-04	9.491e-04	
ltby.l5	-1.700e-02	1.895e-03	***	ltby.l10	-3.372e-03	1.110e-03	**
ltrū.l5	-2.179e-02	4.058e-03	***	ltrū.l10	2.569e-03	2.916e-03	
ltse4.l5	2.095e-03	1.165e-03	.	ltse4.l10	-6.975e-04	7.506e-04	
ltpl.l5	-1.737e-03	1.454e-03		ltpl.l10	3.244e-04	8.101e-04	
-	-	-	-	const	-2.592e-03	8.270e-02	

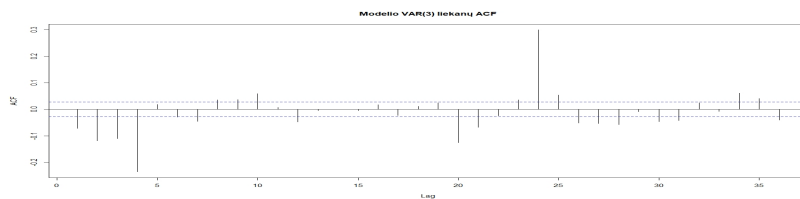
5.1 lentelė: VAR(10) modelio koeficientų reikšmingumas.



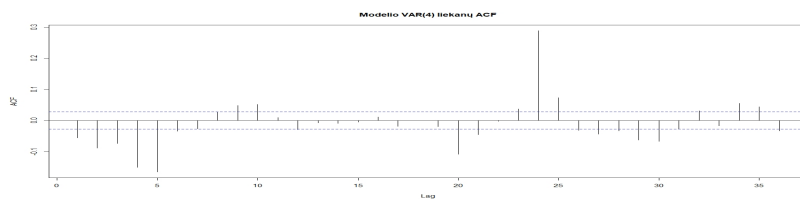
(a) VAR(1) liekanų ACF grafikas



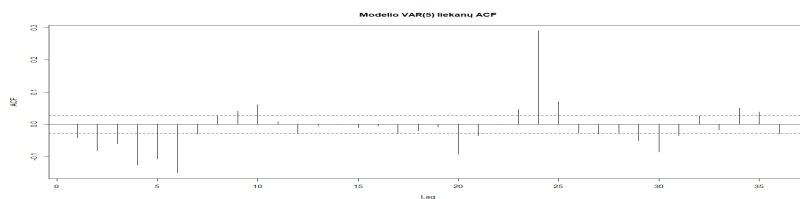
(b) VAR(2) liekanų ACF grafikas



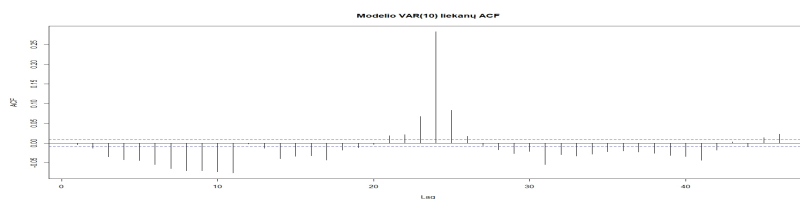
(c) VAR(3) liekanų ACF grafikas



(d) VAR(4) liekanų ACF grafikas

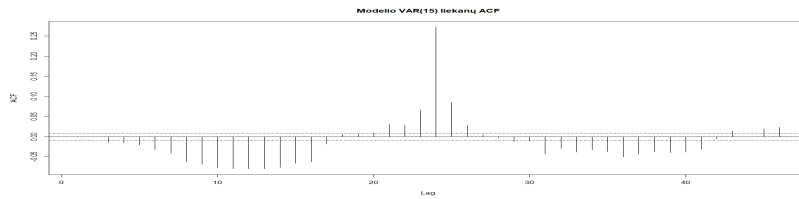


(e) VAR(5) liekanų ACF grafikas



(f) VAR(10) liekanų ACF grafikas

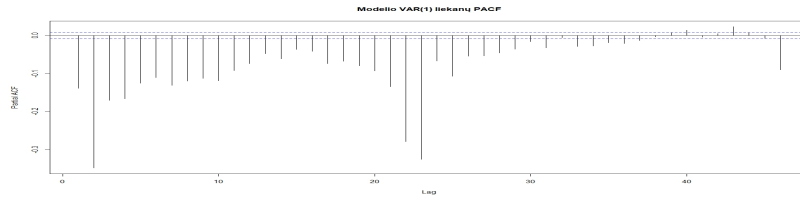




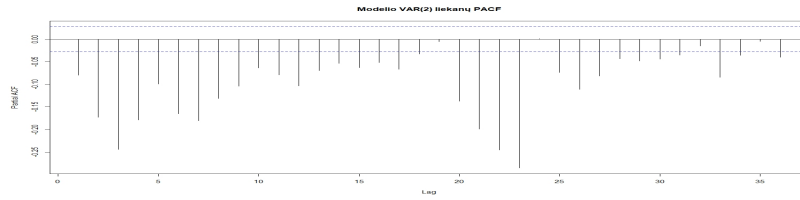
(e) VAR(15) liekanų ACF grafikas

Koeficientas	Reikšmė	s.e.		Koeficientas	Reikšmė	s.e.		Koeficientas	Reikšmė	s.e.	
price.11	-0.9072062	0.0109613	***	price.16	-0.7326784	0.0236224	***	price.111	-0.2796696	0.0221561	***
ltlv.11	0.0036128	0.0009400	***	ltlv.16	0.0139088	0.0019820	***	ltlv.111	0.0081726	0.0019076	***
ltby.11	-0.0118330	0.0011148	***	ltby.16	-0.0193914	0.0025095	***	ltby.111	-0.0098932	0.0023858	***
ltrū.11	-0.0394168	0.0029975	***	ltrū.16	-0.0144772	0.0049893	**	ltrū.111	-0.0077922	0.0046928	.
ltse4.11	-0.0016119	0.0007481	*	ltse4.16	0.0069899	0.0014612	***	ltse4.111	0.0056612	0.0014242	***
ltpl.11	-0.0015481	0.0008309	.	ltpl.16	0.0073678	0.0019529	***	ltpl.111	0.0056903	0.0018201	**
price.12	-0.9008240	0.0149372	***	price.17	-0.6808890	0.0244108	***	price.112	-0.2376812	0.0201412	***
ltlv.12	0.0044465	0.0012273	***	ltlv.17	0.0146238	0.0020849	***	ltlv.112	0.0056128	0.0017441	**
ltby.12	-0.0215110	0.0015303	***	ltby.17	-0.0176264	0.0025993	***	ltby.112	-0.0095708	0.0021770	***
ltrū.12	-0.0379195	0.0035508	***	ltrū.17	-0.0054562	0.0051235	.	ltrū.112	-0.0118602	0.0044079	**
ltse4.12	-0.0017078	0.0009596	.	ltse4.17	0.0078516	0.0015141	***	ltse4.112	0.0041596	0.0013248	**
ltpl.12	-0.0025453	0.0011605	*	ltpl.17	0.0108373	0.0020323	***	ltpl.112	0.0039824	0.0016390	*
price.13	-0.8574550	0.0179640	***	price.18	-0.5825225	0.0247011	***	price.113	-0.1673536	0.0178276	***
ltlv.13	0.0055390	0.0014733	***	ltlv.18	0.0146537	0.0021346	***	ltlv.113	0.0021879	0.0015307	***
ltby.13	-0.0253014	0.0018762	***	ltby.18	-0.0156247	0.0026336	***	ltby.113	-0.0100994	0.0019100	***
ltrū.13	-0.0316064	0.0040975	***	ltrū.18	-0.0009111	0.0051790	.	ltrū.113	-0.0037493	0.0039736	.
ltse4.13	0.0005881	0.0011325	.	ltse4.18	0.0078163	0.0015351	***	ltse4.113	0.0028810	0.0011783	*
ltpl.13	-0.0021661	0.0014383	.	ltpl.18	0.0109317	0.0020613	***	ltpl.113	0.0022221	0.0014188	.
price.14	-0.8610818	0.0202414	***	price.19	-0.4808978	0.0243443	***	price.114	-0.1108376	0.0147749	***
ltlv.14	0.0064253	0.0016794	***	ltlv.19	0.0127918	0.0021095	***	ltlv.114	0.0012255	0.0012689	***
ltby.14	-0.0242726	0.0021488	***	ltby.19	-0.0152793	0.0026105	***	ltby.114	-0.0081459	0.0015643	***
ltrū.14	-0.0291116	0.0045183	***	ltrū.19	-0.0012107	0.0051268	.	ltrū.114	0.0046103	0.0034496	.
ltse4.14	0.0021836	0.0012747	.	ltse4.19	0.0062829	0.0015281	***	ltse4.114	0.0005153	0.0009934	.
ltpl.14	-0.0008928	0.0016555	.	ltpl.19	0.0089134	0.0020427	***	ltpl.114	0.0007352	0.0011463	.
price.15	-0.7883440	0.0222654	***	price.110	-0.3665453	0.0235201	***	price.115	-0.0668132	0.0108590	***
ltlv.15	0.0086656	0.0018435	***	ltlv.110	0.0078983	0.0020320	***	ltlv.115	0.0006024	0.0009613	***
ltby.15	-0.0220863	0.0023597	***	ltby.110	-0.0131507	0.0025290	***	ltby.115	-0.0040586	0.0011356	***
ltrū.15	-0.0270925	0.0047665	***	ltrū.110	-0.0063442	0.0049503	.	ltrū.115	0.0039964	0.0029430	.
ltse4.15	0.0045382	0.0013776	***	ltse4.110	0.0039829	0.0014949	**	ltse4.115	-0.0003299	0.0007637	.
ltpl.15	0.0026362	0.0018235	.	ltpl.110	0.0054869	0.0019622	**	ltpl.115	0.0002653	0.0008236	.
-	-	-	-	-	-	-	-	const	-0.0022872	0.0814332	.

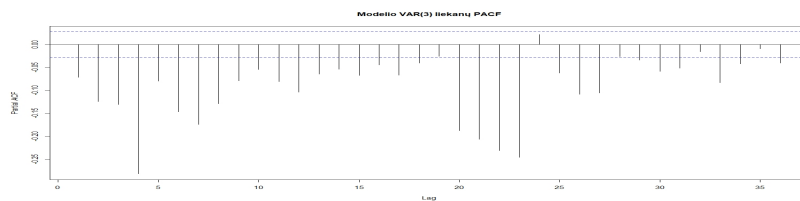
5.2 lentelė: VAR(15) modelio koeficientų reikšmingumas.



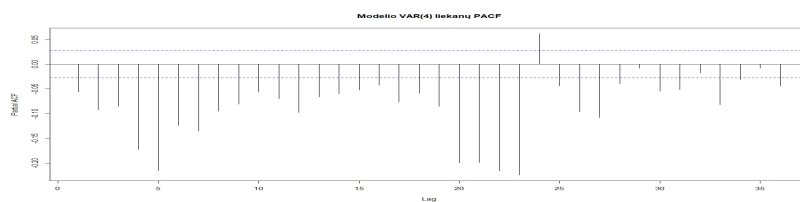
(a) VAR(1) liekanų PACF grafikas



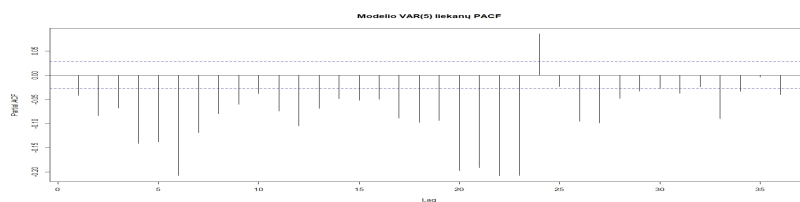
(b) VAR(2) liekanų PACF grafikas



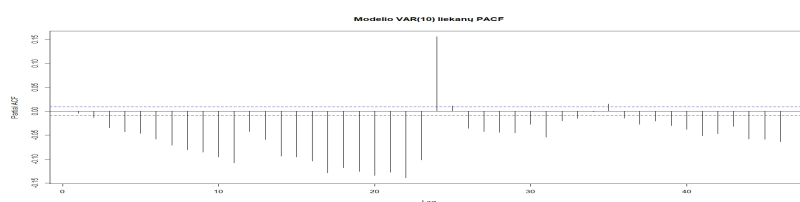
(c) VAR(3) liekanų PACF grafikas



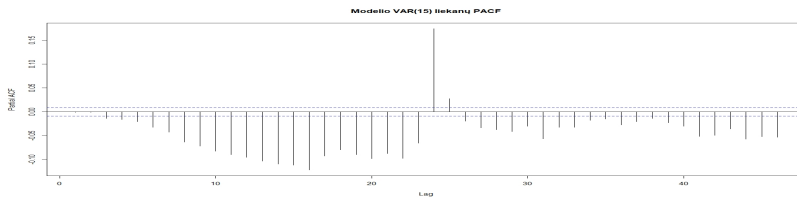
(d) VAR(4) liekanų PACF grafikas



(e) VAR(5) liekanų PACF grafikas



(f) VAR(10) liekanų PACF grafikas



(e) VAR(15) liekanų PACF grafikas

```

                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
price.ll -0.4403342  0.0096434 -45.662 <2e-16 ***
ltlv.ll  0.0017738  0.0008611   2.060  0.0394 *
ltby.ll  -0.0025226  0.0009855  -2.560  0.0105 *
ltru.ll  -0.0321506  0.0028903 -11.124 <2e-16 ***
ltse4.ll -0.0002879  0.0006969  -0.413  0.6795
ltpl.ll  -0.0001570  0.0007114  -0.221  0.8253
const   -0.0017400  0.0993958  -0.018  0.9860
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

(a) VAR(1) koeficientai

```

                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
price.ll -0.5866632  0.0102734 -57.105 < 2e-16 ***
ltlv.ll  0.0022685  0.0008874   2.556  0.0106 *
ltby.ll  -0.0068204  0.0010370  -6.577 5.08e-11 ***
ltru.ll  -0.0405748  0.0028518 -14.228 < 2e-16 ***
ltse4.ll -0.0017463  0.0007205  -2.424  0.0154 *
ltpl.ll  -0.0011504  0.0007530  -1.528  0.1266
price.ll -0.3176919  0.0102469 -31.004 < 2e-16 ***
ltlv.ll  0.0001242  0.0008862   0.140  0.8886
ltby.ll  -0.0075857  0.0010424  -7.277 3.71e-13 ***
ltru.ll  -0.0235760  0.0028584  -8.248 < 2e-16 ***
ltse4.ll -0.0016357  0.0007182  -2.277  0.0228 *
ltpl.ll  -0.0016062  0.0007522  -2.135  0.0327 *
const   -0.0017633  0.0941757  -0.019  0.9851
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

(b) VAR(2) koeficientai

```

                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
price.ll  1.043818  0.157706   6.619 3.84e-11 ***
ltlv.ll  -0.620097  0.013485 -45.950 < 2e-16 ***
ltby.ll  -0.077184  0.015767  -4.895 9.99e-07 ***
ltru.ll  -0.457471  0.042967 -10.647 < 2e-16 ***
ltse4.ll  0.054823  0.010944   5.009 5.56e-07 ***
ltpl.ll  0.025535  0.011564   2.208 0.027263 *
price.ll  0.940891  0.176797   5.322 1.05e-07 ***
ltlv.ll  -0.456520  0.014590 -31.289 < 2e-16 ***
ltby.ll  -0.097401  0.017662  -5.515 3.59e-08 ***
ltru.ll  -0.368024  0.044118  -8.342 < 2e-16 ***
ltse4.ll  0.044056  0.011825   3.726 0.000196 ***
ltpl.ll  0.022893  0.012856   1.781 0.074997 .
price.ll  0.355620  0.156875   2.267 0.023420 *
ltlv.ll  -0.233509  0.013449 -17.362 < 2e-16 ***
ltby.ll  -0.059208  0.015954  -3.702 0.000215 ***
ltru.ll  -0.226958  0.043172  -5.258 1.52e-07 ***
ltse4.ll  0.014605  0.010865   1.344 0.178925
ltpl.ll  0.016058  0.011830   1.393 0.163741
const   -0.008197  1.360523  -0.006 0.995193
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

(c) VAR(3) koeficientai

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
price.11	-7.115e-01	1.063e-02	-66.929	< 2e-16	***
ltlv.11	1.798e-03	9.194e-04	1.956	0.050480	.
ltby.11	-1.043e-02	1.065e-03	-9.797	< 2e-16	***
ltru.11	-4.489e-02	2.905e-03	-15.451	< 2e-16	***
ltse4.11	-2.532e-03	7.454e-04	-3.396	0.000686	***
ltpl.11	-2.184e-03	7.834e-04	-2.788	0.005314	**
price.12	-5.532e-01	1.266e-02	-43.681	< 2e-16	***
ltlv.12	-4.934e-05	1.042e-03	-0.047	0.962235	
ltby.12	-1.631e-02	1.261e-03	-12.934	< 2e-16	***
ltru.12	-3.618e-02	3.087e-03	-11.722	< 2e-16	***
ltse4.12	-3.518e-03	8.428e-04	-4.174	3.02e-05	***
ltpl.12	-3.930e-03	9.248e-04	-4.249	2.16e-05	***
price.13	-3.618e-01	1.262e-02	-28.674	< 2e-16	***
ltlv.13	-4.027e-04	1.039e-03	-0.388	0.698252	
ltby.13	-1.445e-02	1.277e-03	-11.319	< 2e-16	***
ltru.13	-2.128e-02	3.094e-03	-6.876	6.57e-12	***
ltse4.13	-1.627e-03	8.395e-04	-1.938	0.052654	.
ltpl.13	-3.551e-03	9.227e-04	-3.848	0.000120	***
price.14	-2.315e-01	1.054e-02	-21.958	< 2e-16	***
ltlv.14	-9.359e-04	9.143e-04	-1.024	0.306039	
ltby.14	-7.062e-03	1.091e-03	-6.473	1.02e-10	***
ltru.14	-1.190e-02	2.912e-03	-4.086	4.43e-05	***
ltse4.14	-4.418e-04	7.389e-04	-0.598	0.549945	
ltpl.14	-2.391e-03	7.792e-04	-3.069	0.002155	**
const	-1.451e-03	8.931e-02	-0.016	0.987034	

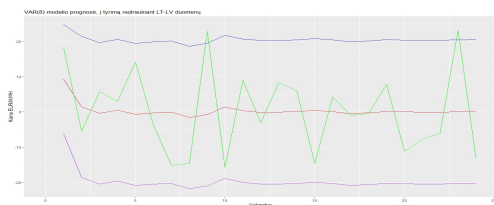
---  
Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

5.11 pav.: (d) VAR(4) koeficientai

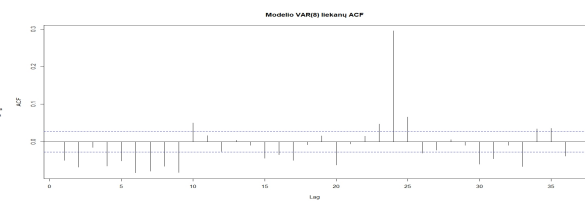
	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
price.11	-0.7547976	0.0107842	-69.991	< 2e-16	***
ltlv.11	0.0014334	0.0009273	1.546	0.122197	
ltby.11	-0.0117473	0.0010680	-10.999	< 2e-16	***
ltru.11	-0.0457318	0.0028915	-15.816	< 2e-16	***
ltse4.11	-0.0027959	0.0007482	-3.737	0.000187	***
ltpl.11	-0.0028921	0.0007899	-3.661	0.000252	***
price.12	-0.6220618	0.0131581	-47.276	< 2e-16	***
ltlv.12	-0.0007838	0.0010870	-0.721	0.470891	
ltby.12	-0.0185984	0.0013029	-14.274	< 2e-16	***
ltru.12	-0.0406293	0.0031598	-12.858	< 2e-16	***
ltse4.12	-0.0036775	0.0008756	-4.200	2.70e-05	***
ltpl.12	-0.0048158	0.0009606	-5.013	5.46e-07	***
price.13	-0.4621743	0.0139366	-33.163	< 2e-16	***
ltlv.13	-0.0014409	0.0011351	-1.269	0.204318	
ltby.13	-0.0180552	0.0013988	-12.908	< 2e-16	***
ltru.13	-0.0288338	0.0032814	-8.787	< 2e-16	***
ltse4.13	-0.0019135	0.0009122	-2.098	0.035956	*
ltpl.13	-0.0046729	0.0010174	-4.593	4.43e-06	***
price.14	-0.3544403	0.0130576	-27.144	< 2e-16	***
ltlv.14	-0.0021954	0.0010784	-2.036	0.041804	*
ltby.14	-0.0123152	0.0013390	-9.197	< 2e-16	***
ltru.14	-0.0215195	0.0031594	-6.811	1.03e-11	***
ltse4.14	-0.0009221	0.0008693	-1.061	0.288854	
ltpl.14	-0.0040749	0.0009538	-4.272	1.96e-05	***
price.15	-0.1645564	0.0106911	-15.392	< 2e-16	***
ltlv.15	-0.0018965	0.0009191	-2.063	0.039108	*
ltby.15	-0.0057708	0.0011017	-5.238	1.66e-07	***
ltru.15	-0.0156864	0.0028956	-5.417	6.21e-08	***
ltse4.15	0.0004438	0.0007398	0.600	0.548636	
ltpl.15	-0.0018724	0.0007825	-2.393	0.016742	*
const	-0.0016764	0.0878888	-0.019	0.984782	

---  
Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

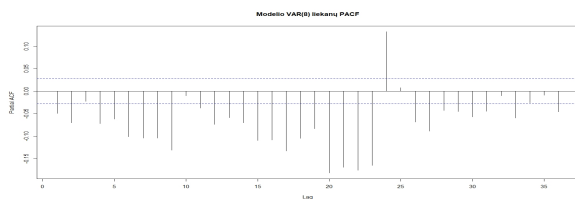
5.12 pav.: (e) VAR(5) koeficientai



(a) VAR(8) prognozė



(b) VAR(8) liekanų ACF grafikas



(b) VAR(8) liekanų PACF grafikas

5.13 pav.: Modelio VAR(8) grafikai. Į tyrimą neįtraukiami LT-LV mainų duomenys.

Koeficientas	Koeficiento reikšmė	s.e.	Reikšmingumo ženklas
price.l1	-8.541e-01	1.081e-02	***
ltby.l1	-1.199e-02	1.073e-03	***
ltru.l1	-4.226e-02	2.858e-03	***
ltse4.l1	-3.096e-03	6.469e-04	***
ltpl.l1	-4.111e-03	6.802e-04	***
price.l2	-8.067e-01	1.411e-02	***
ltby.l2	-2.084e-02	1.379e-03	***
ltru.l2	-3.893e-02	3.207e-03	***
ltse4.l2	-3.488e-03	8.155e-04	***
ltpl.l2	-6.344e-03	8.986e-04	***
price.l3	-7.203e-01	1.615e-02	***
ltby.l3	-2.307e-02	1.595e-03	***
ltru.l3	-3.076e-02	3.522e-03	***
ltse4.l3	-1.788e-03	9.291e-04	.
ltpl.l3	-6.935e-03	1.050e-03	***
price.l4	-6.854e-01	1.728e-02	***
ltby.l4	-2.003e-02	1.731e-03	***
ltru.l4	-2.705e-02	3.687e-03	***
ltse4.l4	-2.411e-04	9.919e-04	
ltpl.l4	-6.018e-03	1.128e-03	***
price.l5	-5.631e-01	1.783e-02	***
ltby.l5	-1.625e-02	1.784e-03	***
ltru.l5	-2.564e-02	3.702e-03	***
ltse4.l5	1.639e-03	1.008e-03	
ltpl.l5	-3.454e-03	1.144e-03	**
price.l6	-4.598e-01	1.731e-02	***
ltby.l6	-1.209e-02	1.756e-03	***
ltru.l6	-1.596e-02	3.671e-03	***
ltse4.l6	2.285e-03	9.954e-04	*
ltpl.l6	-9.407e-04	1.110e-03	
price.l7	-3.778e-01	1.615e-02	***
ltby.l7	-9.291e-03	1.642e-03	***
ltru.l7	-7.250e-03	3.474e-03	*
ltse4.l7	3.025e-03	9.387e-04	**
ltpl.l7	2.455e-03	1.026e-03	*
price.l8	-2.525e-01	1.402e-02	***
ltby.l8	-5.767e-03	1.430e-03	***
ltru.l8	3.376e-05	3.157e-03	
ltse4.l8	2.581e-03	8.256e-04	**
ltpl.l8	2.731e-03	8.785e-04	**
price.l9	-1.403e-01	1.071e-02	***
ltby.l9	-3.582e-03	1.101e-03	**
ltru.l9	4.918e-03	2.830e-03	.
ltse4.l9	1.272e-03	6.519e-04	.
ltpl.l9	1.760e-03	6.698e-04	**
const	-3.295e-03	8.353e-02	

5.3 lentelė: VAR(9) modelio koeficientai, į tyrimą neįtraukiant LT-LV mainų duomenų.

Koeficientas	Koeficiento reikšmė	s.e.	Reikšmingumo ženklas
price.l1	-0.8291863	0.0108117	***
ltby.l1	-0.0122093	0.0010699	***
ltrū.l1	-0.0434657	0.0028595	***
ltse4.l1	-0.0032373	0.0006490	***
ltpl.l1	-0.0042853	0.0006792	***
price.l2	-0.7602353	0.0139036	***
ltby.l2	-0.0207706	0.0013632	***
ltrū.l2	-0.0395687	0.0031789	***
ltse4.l2	-0.0035942	0.0008106	***
ltpl.l2	-0.0063252	0.0008875	***
price.l3	-0.6634373	0.0157790	***
ltby.l3	-0.0221206	0.0015613	***
ltrū.l3	-0.0313919	0.0034583	***
ltse4.l3	-0.0015854	0.0009173	.
ltpl.l3	-0.0062431	0.0010243	***
price.l4	-0.6149539	0.0166041	***
ltby.l4	-0.0186159	0.0016687	***
ltrū.l4	-0.0275394	0.0035890	***
ltse4.l4	0.0000218	0.0009651	
ltpl.l4	-0.0051261	0.0010753	***
price.l5	-0.4729237	0.0166271	***
ltby.l5	-0.0138153	0.0016842	***
ltrū.l5	-0.0251395	0.0035787	***
ltse4.l5	0.0020593	0.0009659	*
ltpl.l5	-0.0023134	0.0010670	*
price.l6	-0.3620570	0.0157603	***
ltby.l6	-0.0094155	0.0016056	***
ltrū.l6	-0.0155588	0.0034344	***
ltse4.l6	0.0023977	0.0009223	**
ltpl.l6	-0.0003016	0.0010064	
price.l7	-0.2701890	0.0138381	***
ltby.l7	-0.0062590	0.0014149	***
ltrū.l7	-0.0062583	0.0031313	*
ltse4.l7	0.0030326	0.0008190	***
ltpl.l7	0.0024799	0.0008697	**
price.l8	-0.1399406	0.0107279	***
ltby.l8	-0.0020408	0.0011022	.
ltrū.l8	0.0018309	0.0028242	
ltse4.l8	0.0025266	0.0006534	***
ltpl.l8	0.0023356	0.0006684	***
const	-0.0025776	0.0846281	

5.4 lentelė: Modelio VAR(8) koeficientai. Į tyrimą neįtraukiami LT-LV mainų duomenys.



Koeficientas	$\tau = 0.05$		$\tau = 0.10$		$\tau = 0.15$	
	Koeficiento reikšmė	s.e.	Koeficiento reikšmė	s.e.	Koeficiento reikšmė	s.e.
$\beta_0$	25.01843	1.08140	27.78802	0.73371	28.26031	0.84803
$\beta_1$	4.91817	0.94371	4.02931	0.74799	6.03867	0.94586
$\beta_2$	13.61237	0.93097	11.81432	0.88047	8.72892	0.93974
$\beta_3$	-1.58366	1.53987	2.46044	1.34124	9.91176	1.41168
$\beta_4$	-0.80043	0.90177	0.32641	0.70204	1.65743	0.75373
$\beta_5$	-0.83948	1.08643	1.23616	0.91902	2.59923	0.91626

Koeficientas	$\tau = 0.20$		$\tau = 0.25$		$\tau = 0.30$	
	Koeficiento reikšmė	s.e.	Koeficiento reikšmė	s.e.	Koeficiento reikšmė	s.e.
$\beta_0$	29.04060	0.71002	30.12818	0.49667	30.27348	0.40435
$\beta_1$	6.18463	0.78478	6.01978	0.59242	6.42554	0.58264
$\beta_2$	5.90219	0.76665	3.48649	0.58284	2.97150	0.57362
$\beta_3$	14.96133	1.14425	18.17942	0.95190	21.00131	0.75644
$\beta_4$	4.05249	0.58938	5.10091	0.44469	6.73488	0.46257
$\beta_5$	2.78359	0.70771	2.04934	0.55856	2.23757	0.60669

Koeficientas	$\tau = 0.35$		$\tau = 0.40$		$\tau = 0.45$	
	Koeficiento reikšmė	s.e.	Koeficiento reikšmė	s.e.	Koeficiento reikšmė	s.e.
$\beta_0$	29.68143	0.54388	29.10538	0.57741	28.75086	0.58056
$\beta_1$	7.57238	0.64416	9.28565	0.66559	11.18346	0.66952
$\beta_2$	2.62847	0.69420	2.33626	0.75256	2.18837	0.79140
$\beta_3$	24.77738	0.96607	27.77341	1.02131	30.13519	1.04897
$\beta_4$	8.22793	0.52381	9.68253	0.55448	11.01379	0.56933
$\beta_5$	2.62211	0.68703	3.53074	0.72345	4.22204	0.74455

Koeficientas	$\tau = 0.50$		$\tau = 0.55$		$\tau = 0.60$	
	Koeficiento reikšmė	s.e.	Koeficiento reikšmė	s.e.	Koeficiento reikšmė	s.e.
$\beta_0$	28.47733	0.38881	28.77090	0.75691	29.61986	0.80660
$\beta_1$	13.67543	0.59937	28.77090	0.75691	17.51915	0.78135
$\beta_2$	2.61839	0.77742	2.26035	0.93059	2.30227	0.91384
$\beta_3$	31.47818	0.87344	32.81885	1.30158	33.16197	1.34076
$\beta_4$	12.56748	0.50133	13.34969	0.67555	13.59122	0.66626
$\beta_5$	5.25227	0.72194	5.09255	0.88372	4.47825	0.88961

Koeficientas	$\tau = 0.65$		$\tau = 0.70$		$\tau = 0.75$	
	Koeficiento reikšmė	s.e.	Koeficiento reikšmė	s.e.	Koeficiento reikšmė	s.e.
$\beta_0$	31.50736	0.80677	35.23461	0.54824	38.03985	0.98712
$\beta_1$	18.87590	0.76268	19.35167	0.58330	19.63567	0.90393
$\beta_2$	2.65662	0.89126	1.34455	0.65041	1.94718	1.05988
$\beta_3$	32.21303	1.29326	29.77218	0.85448	28.56501	1.58226
$\beta_4$	12.64644	0.59224	9.86445	0.43617	8.10222	0.72768
$\beta_5$	2.61056	0.79301	-1.47999	0.64951	-3.90987	0.94708

Koeficientas	$\tau = 0.80$		$\tau = 0.85$		$\tau = 0.90$		$\tau = 0.95$	
	Koeficiento reikšmė	s.e.	Koeficiento reikšmė	s.e.	Koeficiento reikšmė	s.e.	Koeficiento reikšmė	s.e.
$\beta_0$	42.26787	0.95448	48.85463	1.27937	59.48873	1.44917	70.99504	1.40124
$\beta_1$	19.53991	0.89611	19.39115	0.79689	16.98083	1.12264	17.59105	0.88334
$\beta_2$	1.96488	1.06199	2.78900	1.08555	2.21426	1.29435	-0.92003	1.32334
$\beta_3$	24.17491	1.57773	16.37777	1.96114	4.37943	2.20690	-9.09930	2.13052
$\beta_4$	6.57210	0.68847	3.26792	0.91163	-1.57480	1.01542	-4.98574	0.81792
$\beta_5$	-6.07936	0.92101	-7.35836	0.92530	-6.29879	1.22216	-2.63130	0.93771

5.5 lentelė: Kvantilio  $\tau$  eilės regresijos modelių koeficientai



# Literatūra

- [1] R. LEIPUS *Laiko eilutės*, Vilnius, 2019.
- [2] R. J. HYNDMAN, G. ATHANASOPOULOS, *Forecasting: Principles and Practice*, Monash University, Australia, (<https://otexts.com/fpp2/?fbclid=IwAR1nGz1LNqSgBrE085TVt8ppDImBHdoZoFPONKUGYDRfEctGQ8QeTmk53RU>.)
- [3] M. VERBEEK *A guide to modern econometrics*, West Sussex, 2000.
- [4] R. H. SHUMWAY, D. S. STOFFER *Time Series Analysis and its Applications*, Springer, 2011.
- [5] N. H. CHAN *Time Series. Application to Finance with R and S-Plus*, Wiley, New Jersey, 2010.
- [6] R. S. TSAY *Analysis of Financial Time Series*, Wiley, New Jersey, 2005.
- [7] P. J. BROCKWELL, R. A. DAVIS *Time Series: Theory and Methods*, Springer, New York, 1998.
- [8] R. F. ENGLE *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation*, *Econometrica* 50, 1982.
- [9] V. ČEKANAVIČIUS, G. MURAUSKAS *Taikomoji regresinė analizė socialiniuose tyrimuose*, Vilniaus universiteto leidykla, Vilnius, 2014.
- [10] R. KOENKER *Quantile regression*, International Encyclopedia of the Social Sciences, 2000. (<http://www.econ.uiuc.edu/~roger/research/rq/QRJEP.pdf>)
- [11] R. N. RODRIGUEZ AND Y. YAO *Five things you should know about quantile regression*, SAS Institute Inc., Paper SAS525-2017, 2017.

(<https://support.sas.com/resources/papers/proceedings17/SAS0525-2017.pdf>)

- [12] R. KOENKER, J. A. F. MACHADO, *Goodness of Fit and Related Inference Processes for Quantile Regression*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 94, Nr. 448, 1999.
- [13] *Energetikos abc*, Valstybinės energetikos reguliavimo tarybos parengtas interneto puslapis. (<http://energetikosabc.lt/lt/elektra/kokios-elektros-energetikos-veiklos/elektros-energijos-gamyba/90>)
- [14] *Litgrid*, Lietuvos elektros perdavimo operatoriaus interneto puslapis. (<https://www.litgrid.eu/index.php/energetikos-sistema/elektros-energetikos-sistemas-informacija/elektros-gamybos-ir-vartojimo-balanso-duomenys/2287>)