VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

Komonotoniški suderintieji ir iškilieji rizikos matai

Comonotonic coherent and convex risk measures

Jovilė Palubinskaitė

VILNIUS 2020

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas doc. dr. Martynas Manstavičius

Darbo recenzentas ______________________________________

Darbas apgintas ______________

Darbas įvertintas ______________

Registravimo NR. ______________

2020-01-06

Komonotoniški suderintieji ir iškilieji rizikos matai

Santrauka

Finansų rinkoje didesnė grąža yra siejama su didesne rizika, todėl finansinių portfelių rizikos įvertinimas yra viena iš pagrindinių rizikos valdymo užduočių. Paprastai rizika yra vertinama pelną ar nuostolį nagrinėjant kaip atsitiktinį dydį, kuriam taikoma tam tikra funkcija.

Šiame magistro baigiamajame darbe yra aprašomi komonotoniški atsitiktiniai dydžiai ir nagrinėjami komonotoniški suderintieji bei iškilieji rizikos matai. Darbo pradžioje pateikiama teorinė dalis apie suderintuosius ir iškiluosius bei komonotoniškus suderintuosius ir komonotoniškus iškiluosius rizikos matus. Nagrinėjamas ryšys tarp komonotoniškų suderintųjų bei komonotoniškų iškilųjų rizikos matų ir pasiūloma nauja rizikos matų klasė – indukuoti komonotoniški suderintieji rizikos matai. Darbe yra suformuluojama ir įrodoma teorema, kuria remiantis komonotoniški suderintieji rizikos matai gali būti išreiškiami per komonotoniškus iškiluosius rizikos matus. Taip pat pateikiamas praktinio pritaikymo pavyzdys ir apžvelgiami gauti rezultatai.

Raktiniai žodžiai : Komonotoniškumas, suderintasis rizikos matas, iškilusis rizikos matas, komonotoniškas suderintasis rizikos matas, komonotoniškas iškilusis rizikos matas, indukuotas komonotoniškas suderintasis rizikos matas.

Comonotonic coherent and convex risk measures

Abstract

In financial markets higher return is associated with higher risk, which is why quantifying the risk of financial portfolios is one of the key tasks of risk management. Usually risk is measured by modeling the uncertain payoff as a random variable to which a certain function is applied.

This thesis studies comonotonic random variables and comonotonic coherent and convex risk measures. Some theory about coherent and convex risk measures, as well as comonotonic coherent and comonotonic convex risk measures is provided. The relationship between comonotonic coherent and comonotonic convex risk measures is studied and induced comonotonic coherent risk measures are proposed. A representation theorem for this induced comonotonic coherent risk measure is proved. An example of practical implementation is also provided.

Key words : Comonotonicity, coherent risk measure, convex risk measure, comonotonic coherent risk measure, comonotonic convex risk measure, induced comonotonic coherent risk measure.

Turinys

1 Įvadas

Rizika – tai sąvoka, turinti keletą skirtingų reikšmių, todėl yra labai svarbu tiksliai apibrėžti, kas slypi po šiuo žodžiu. Dažniausiai rizika yra apibūdinama kaip neužtikrintumas dėl laukiamos grąžos, atsirandantis dėl priimtų investavimo sprendimų [15].

Bazelio III-ame susitarime (ang. Basel III Accord) yra išskiriamos 4 pagrindinės rizikos rūšys [1]:

1. Kredito rizika – tai rizika, jog skolininkas, kitaip tariant sandorio šalis, nepajėgs įvykdyti įsipareigojimų (sumokėti palūkanas ar grąžinti pasiskolintą sumą) pagal sutartas sąlygas. Tai didžiausia rizika su kuria susiduria dauguma bankų ir kuri atsiranda dėl neužtikrintumo, jog obligacijos bus išpirktos, o išduotos paskolos bus grąžintos.

2. Rinkos rizika – tai rizika patirti nuostolių, kylanti dėl kainų pokyčių rinkoje, t.y. palūkanų normų, užsienio valiutos kurso, žaliavų ar vertybinių popierių kainų pokyčiai.

3. Operacinė rizika – tai nuostolių rizika, atsirandanti dėl netinkamų vidaus kontrolės procesų, darbuotojų klaidų ar sistemų sutrikimo atveju. Lyginant su kredito, rinkos ar likvidumo rizika, operacinė rizika yra sunkiausiai išmatuojama.

4. Likvidumo rizika – tai įsipareigojimų neįvykdymo rizika, atsirandanti dėl lėšų trūkumo.

Kadangi finansų rinkoje didesnė grąža yra siejama su didesne rizika, vienas iš svarbiausių klausimų, kylančių rinkos dalyviams – „kokia yra rinkos rizika?“ Paprastai rizika yra vertinama pelną ar nuostolį nagrinėjant kaip atsitiktinį dydį, kuriam taikoma tam tikra funkcija. Artzner, Delbaen, Eber ir Heath [2] buvo pirmieji, kurie rizikos vertinimui pasiūlė naudoti suderintuosius rizikos matus ir apibrėžė keturias aksiomas, kurias turi tenkinti rizikos matas: monotoniškumą, invariantiškumą poslinkiams, teigiamą homogeniškumą ir subadityvumą. Remiantis teigiamo homogeniškumo aksioma yra daroma prielaida, jog finansinės pozicijos rizika yra tiesiškai priklausoma nuo pozicijos dydžio, t.y. jei portfelis yra padidinamas du kartus, rizikos vertė taip pat turėtų padidėti du kartus. Laikui bėgant ši prielaida sulaukė nemažai kritikos, nes tokiu būdu yra ignoruojama likvidumo rizika. Todėl Föllmer ir Schied [11] pristatė dar vieną rizikos matų klasę – iškiluosius rizikos matus. Apibrėžiant iškiluosius rizikos matus, teigiamo homogeniškumo ir subadityvumo aksiomos susilpninamos ir pakeičiamos iškilumo aksioma.

Nepaisant naujų rizikos matų klasių atsiradimo, Assa [3] savo darbe teigia, jog visi rizikos matai, kurie iki tol buvo aprašomi literatūroje, turi du trūkumus: jie negali būti apibrėžti didelei atsitiktinių dydžių aibei ir negali tinkamai įvertinti rizikos dėl paties modelio neapibrėžtumo. Dėl šių priežasčių buvo pristatyta nauja rizikos matų klasė – komonotoniški suderintieji rizikos matai. Šią rizikos matų klasę savo darbe nagrinėjo ir Heyde kartu su bendraautoriais [12]. Priešingai negu suderintųjų rizikos matų atveju, komonotoniški suderintieji rizikos matai reikalauja subadityvumo tik komonotoniškiems atsitiktiniams dydžiams.

Įkvėpti Heyde ir Artzner darbų, Tian ir Suo [17] pateikė komonotoniškų iškilųjų rizikos matų apibrėžimą, kuriame iškilumas yra reikalaujamas tik komonotoniškiems dydžiams.

Remiantis komonotoniškų suderintųjų ir iškilųjų rizikos matų apibrėžimais, nesunku pastebėti, jog komonotoniškas suderintasis rizikos matas yra komonotoniškas iškilusis rizikos matas, papildomai tenkinantis teigiamo homogeniškumo aksiomą. Todėl galima sakyti, jog bet kuris komonotoniškas suderintasis rizikos matas tuo pačiu yra ir komonotoniškas iškilusis rizikos matas, bet ne atvirkščiai. Taigi pagrindinis šio darbo tikslas yra surasti sąryšį tarp komonotoniškų suderintųjų ir iškilųjų rizikos matų ir pabandyti komonotonišką suderintąjį rizikos matą išreikšti per komonotonišką iškilųjį rizikos matą.

Kadangi nagrinėjami rizikos matai yra komonotoniški, darbo pradžioje yra trumpai apžvelgiama komonotoniškumo sąvoka, padedanti geriau suprasti, kokius atsitiktinius dydžius nagrinėjame. Toliau darbe pateikiami jau žinomų rizikos matų klasių apibrėžimai bei reprezentacinės teoremos ir suformuluojama pagrindinė šio darbo teorema, siejanti komonotoniškus suderintuosius ir iškiluosius rizikos matus, bei pateikiamas jos įrodymas. Taip pat apžvelgiama naujai apibrėžta indukuotų komonotoniškų suderintųjų rizikos matų klasė. Praktinėje darbo dalyje finansinio portfelio rizika yra įvertinama naudojant komonotoniškus rizikos matus ir pateikiamos įžvalgos apie gautus rezultatus.

2 Komonotoniškumas

Visa pagrindinė informacija apie atsitiktinį dydį X slypi jo pasiskirstymo funkcijoje F_X. Todėl natūralu, jog priimant sprendimą, susijusį su a.d. X, yra atsižvelgiama į jo pasiskirstymo funkciją ir pagrindine užduotimi tampa apskaičiuoti arba įvertinti šią funkciją. Nepaisant to, daugelyje finansinių situacijų yra susiduriama su atsitiktiniu dydžiu, kuris gali būti išreiškiamas kaip atskirų a.d. suma $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Kadangi ryšys tarp a.d. X_i nėra žinomas, sunku rasti S pasiskirstymo funkciją, o juk rizikos įvertinimui dažnai yra svarbu žinoti tokius dydžius kaip ES, TCE ar VaR, kuriems apskaičiuoti reikalinga pasiskirstymo funkcija. Tokiais atvejais naudinga nagrinėti komonotoniškus atsitiktinius dydžius, todėl šiame skyriuje, remdamiesi [8] ir [9] šaltiniais, trumpai apžvelgsime komonotoniškumo sąvoką.

2.1 Aibių komonotoniškumas

Iš pradžių, apibrėšime komonotoniškumą vektorių aibei erdvėje $\mathbb{R}^n$. Šiame skyriuje vektorius $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bus žymimas $\bar{x}$, o žymėjimas $\bar{x} \leq \bar{y}$ reikš, jog $x_i \leq y_i$ $\forall i = 1,2,\ldots,n$.

2.1.1 Apibrėžimas. Sakysime, jog aibė $A \subseteq \mathbb{R}^n$ yra komonotoniška, jeigu bet kuriai porai $\bar{x}, \bar{y} \in A$ galioja sąryšis $\bar{x} \leq \bar{y}$ arba $\bar{y} \leq \bar{x}$.

Panagrinėkime pavyzdį, kuris iliustruoja, ką reiškia aibės komonotoniškumas. Tarkime, turime aibę

$$A = \{(x_1,x_2) \mid x_2 = x_1 + 5, 0 \leq x_1 \leq 10\}.$$

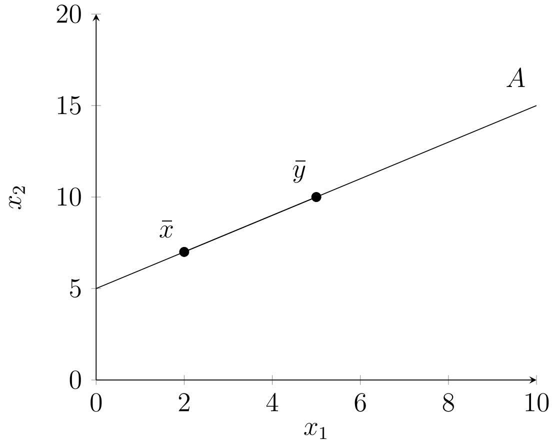
Pažvelgus į 1 pav. nesunku pastebėti, jog aibė A yra komonotoniška. Tuo tarpu aibė $A \cup \{\bar{z}\}$ nėra komonotoniška, nes, pavyzdžiui, pasirinkę $\bar{y} \in A$ gauname, jog $y_1 > z_1$, o $y_2 < z_2$.

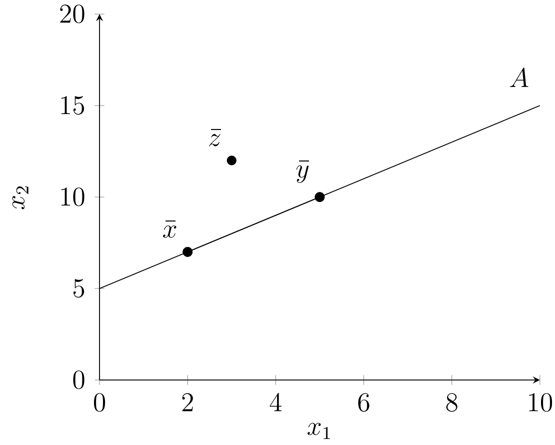
2.1.1 Lema ([8]). *Aibė $A \subseteq \mathbb{R}^n$ yra komonotoniška tada ir tik tada, jei $A_{k,l}$ yra komonotoniška $\forall k,l = 1,2,\ldots,n,\ k \neq l$, čia $A_{k,l}$ yra aibės $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (k,l)-projekcija, kuri apibrėžiama kaip*

$$A_{k,l} = \{(x_k,x_l) \mid \bar{x} \in A\}.$$

Įrodymas.
„$\Longrightarrow$“ (Būtinumas)

Tarkime, jog aibė $A \subseteq \mathbb{R}^n$ yra komonotoniška. Tada bet kuriai porai $\bar{x}, \bar{y} \in A$ galioja sąryšis $\bar{x} \leq \bar{y}$ arba $\bar{y} \leq \bar{x}$, o tai reiškia, jog $x_i \leq y_i$ arba $y_i \leq x_i$ $\forall i = 1,2,\ldots,n$. Kadangi nelygybės yra teisingos visiems $i = 1,2,\ldots,n$, tuo pačiu jos teisingos ir bet kurioms poroms (x_k, x_l) ir (y_k, y_l), kur $k,l = 1,2,\ldots,n,\ k \neq l$. Kadangi $(x_k, x_l), (y_k, y_l) \in A_{k,l}$, gauname, jog





Šaltinis: parengta autorės

1 pav.: Komonotoniška ir nekomonotoniška aibės.

$A_{k,l}$ yra komonotoniška $\forall k,l = 1,2,\dots,n,\ k \neq l$.

„$\Longleftarrow$“ (Pakankamumas)

Tarkime, jog aibė $A_{k,l}$ yra komonotoniška $\forall k,l = 1,2,\dots,n,\ k \neq l$. Tada bet kuriai porai $(x_k, x_l), (y_k, y_l) \in A_{k,l}$ yra teisinga $x_i \leq y_i$ arba $y_i \leq x_i$ $\forall i = k,l$. Kadangi nelygybės yra teisingos $\forall k,l = 1,2,\dots,n,\ k \neq l$, tai gauname, jog teisinga $x_i \leq y_i$ arba $y_i \leq x_i$ $\forall i = 1,2,\dots,n$. Tai reiškia, kad bet kokiems $\bar{x}, \bar{y} \in A$ galioja sąryšis $\bar{x} \leq \bar{y}$ arba $\bar{y} \leq \bar{x}$. Taigi gauname, kad aibė $A \subseteq \mathbb{R}^n$ yra komonotoniška. $\square$

Pastaba. [8] šaltinyje 2.1.1 lema pateikta be įrodymo, teigiant, kad jis yra elementarus.

Svarbu pastebėti, jog aibės $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $(i,i+1)$-projekcijų $A_{i,i+1}$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$ komonotoniškumas nebūtinai parodo aibės A komonotoniškumą. Iš tiesų, jei turime aibę

$$A = \{(x_1,1,x_3) \mid 0 < x_1,x_3 < 1\},$$

projekcijos $A_{1,2}$ ir $A_{2,3}$ yra komonotoniškos, tačiau pati aibė A nėra komonotoniška.

2.2 Vektorių komonotoniškumas

Toliau pateiksime keletą apibrėžimų apie n-mačių vektorių $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ komonotoniškumą.

2.2.1 Apibrėžimas. Bet kokia aibė $A \subseteq \mathbb{R}^n$ yra vadinama n-mačio vektoriaus $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ atrama (ang. support), jeigu yra teisinga lygybė $\mathbb{P}\left(\bar{X} \in A\right) = 1$.

2.2.2 Apibrėžimas. Atsitiktinis vektorius $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ yra komonotoniškas, jeigu jis turi komonotonišką atramą.

Remiantis 2.2.2 apibrėžimu, galima daryti išvadą, jog komonotoniškumas yra labai stipri priklausomumo struktūra. Iš tiesų, jeigu $\bar{x}$ ir $\bar{y}$ yra elementai iš $\bar{X}$ komonotoniškos atramos, t.y. jei $\bar{x}$ ir $\bar{y}$ yra galimos atsitiktinio vektoriaus $\bar{X}$ reikšmės, tai jų atitinkamos komponentės turi būti išsidėstę nemažėjančia arba nedidėjančia tvarka. Tai paaiškina terminą „komonotoniškumas" – bendras monotoniškumas.

2.2.1 Teorema ([8]). *Atsitiktinis vektorius $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ yra komonotoniškas tada ir tik tada, jei teisinga kuri nors iš ekvivalenčių sąlygų:*

(1) $\bar{X}$ turi komonotonišką atramą.

(2) Visiems $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, turime

$$F_{\bar{X}}(\bar{x}) = \min\left\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \ldots, F_{X_n}(x_n)\right\}.$$

(3) Jei $U \sim U(0,1)$, t.y. a.d. U yra tolygiai pasiskirstęs intervale $(0,1)$, tada

$$\bar{X} \overset{d}{=} \left(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(U)\right), \tag{1}$$

čia žymėjimas $\overset{d}{=}$ reiškia lygybę „pagal skirstinį".

(4) Egzistuoja atsitiktinis dydis Z ir nemažėjančios funkcijos f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, tokie kad

$$\bar{X} \overset{d}{=} (f_1(Z), f_2(Z), \ldots, f_n(Z)).$$

Įrodymas. „(1)$\Longrightarrow$(2)". Tarkime, kad $\bar{X}$ turi komonotonišką atramą B. Imkime $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ir pažymėkime

$$A_j = \{\bar{y} \in B \mid y_j \leq x_j\}, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dėl aibės B komonotoniškumo, $\exists i$ toks, kad $A_i = \bigcap_{j=1}^n A_j$.

Įsitikinkime, kad $A_i \subset \bigcap_{j=1}^n A_j$. Įrodysime prieštaros būdu. Tarkime, kad $\forall i \ \exists \bar{y}^{(i)} \in A_i \setminus \bigcap_{j=1}^n A_j$. Tada, pasinaudoję aibės B komonotoniškumu, iš aibės $\left\{\bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(n)}\right\}$ galime išrinkti mažiausią $\bar{y}^{(k)}$ tokį, kad $\bar{y}^{(k)} \leq \bar{y}^{(i)}$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Tokiu būdu gauname, kad $\bar{y}^{(k)} \in B \cap \bigcap_{j=1}^n A_j$. Prieštara!

Taigi gauname

$$F_{\bar{X}}(\bar{x}) = \mathbb{P}\left(\bar{X} \in \bigcap_{j=1}^n A_j\right) = \mathbb{P}\left(\bar{X} \in A_i\right) = F_{X_i}(x_i) = \min\left\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \ldots, F_{X_n}(x_n)\right\}.$$

Paskutinė lygybė išplaukia iš to, kad $F_{X_i}(x_i) \leq F_{X_j}(x_j)$ $\forall j$, nes $A_i \subset A_j$.

„(2)$\Longrightarrow$(3)“. Iš pradžių, apibrėžkime kvantilių funkciją [8]. Pagal apibrėžimą, tai nemažėjanti ir tolydi iš kairės funkcija $F_X^{-1}(p)$, kuri užrašoma kaip

$$F_X^{-1}(p) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq p\right\}, \ p \in (0{,}1).$$

Tada $\forall x \in \mathbb{R}$ ir $p \in (0{,}1)$ turime

$$F_X^{-1}(p) \leq x \Longrightarrow p \leq F_X(x).$$

Tarkime, kad

$$F_{\bar{X}}\left(\bar{x}\right) = \min\left\{F_{X_1}\left(x_1\right), F_{X_2}\left(x_2\right), \ldots, F_{X_n}\left(x_n\right)\right\}, \ \forall \bar{x} = \left(x_1{,}x_2, \ldots{,}x_n\right).$$

Tada, pasinaudodami kvantilių funkcijos apibrėžimu, gauname

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(F_{X_1}^{-1}(U) \leq x_1, \ldots{,}F_{X_n}^{-1}(U) \leq x_n\right) &= \mathbb{P}\left(U \leq F_{X_1}\left(x_1\right), \ldots, U \leq F_{X_n}\left(x_n\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(U \leq \min_{j=1,\ldots,n}\left\{F_{X_j}\left(x_j\right)\right\}\right) \\ &= \min_{j=1,\ldots,n}\left\{F_{X_j}\left(x_j\right)\right\}.\end{aligned}$$

„(3)$\Longrightarrow$(4)“. Tarkime, kad $\bar{X} \overset{d}{=} \left(F_{X_1}^{-1}(U){,}F_{X_2}^{-1}(U), \ldots{,}F_{X_n}^{-1}(U)\right)$, čia $U \sim U(0{,}1)$. Imdami $Z = U$, gauname

$$\bar{X} \overset{d}{=} \left(F_{X_1}^{-1}(U){,}F_{X_2}^{-1}(U), \ldots{,}F_{X_n}^{-1}(U)\right) \overset{d}{=} \left(F_{X_1}^{-1}(Z){,}F_{X_2}^{-1}(Z), \ldots{,}F_{X_n}^{-1}(Z)\right).$$

Pagal apibrėžimą, kvantilių funkcija yra nemažėjanti, todėl pažymėję $f_i = F_{X_i}^{-1}\ \forall i = 1{,}2, \ldots{,}n$, turime

$$\bar{X} \overset{d}{=} \left(f_1(Z){,}f_2(Z), \ldots{,}f_n(Z)\right).$$

„(4)$\Longrightarrow$(1)“. Imkime bet kokį a.d. Z, turintį atramą B. Taip pat tarkime, jog egzistuoja nemažėjančios funkcijos f_i $(i = 1{,}2, \ldots{,}n)$, tokios kad

$$\bar{X} \overset{d}{=} \left(f_1(Z){,}f_2(Z), \ldots{,}f_n(Z)\right).$$

Galimų $\bar{X}$ reikšmių aibė yra $B_1 \subset B_0 = \{(f_1(z){,}f_2(z), \ldots{,}f_n(z)) \mid z \in B\}$, kuri yra komonotoniška, nes f_i $(i = 1{,}2, \ldots{,}n)$ yra nemažėjančios funkcijos. O tai reiškia, jog $\bar{X}$ taip pat yra komonotoniškas, nes turi komonotonišką atramą. $\square$

Pastaba. [8] šaltinyje 2.2.1 teoremos įrodymo „(3)$\Longrightarrow$(4)“ dalis nedetalizuojama, teigiant, kad ji yra akivaizdi.

2.2.2 Teorema ([8]). *Atsitiktinis vektorius $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ yra komonotoniškas tada ir tik tada, jei $(X_i{,}X_j)$ yra komomotoniški $\forall i{,}j = 1{,}2, \ldots{,}n,\ i \neq j$.*

Įrodymas.

„$\Longrightarrow$“ (Būtinumas)

Iš pradžių, erdvėje $\mathbb{R}^n$ apibrėžkime aibę A lygybe

$$A = \left\{ \left(F_{X_1}^{-1}(p), F_{X_2}^{-1}(p), \ldots, F_{X_n}^{-1}(p) \right) \Big| \, 0 < p < 1 \right\}.$$

Aibės A (i,j)-projekcijos tuomet bus

$$A_{i,j} = \left\{ \left(F_{X_i}^{-1}(p), F_{X_j}^{-1}(p) \right) \Big| \, 0 < p < 1 \right\}.$$

Jei $\bar{X}$ yra komonotoniškas atsitiktinis vektorius, tai remiantis 2.2.2 apibrėžimu, žinome, jog atsitiktinio vektoriaus $\bar{X}$ atrama $A \subset \mathbb{R}^n$ yra komonotoniška. Tai reiškia, jog $A_{i,j}$ taip pat yra komonotoniška $\forall i,j = 1,2,\ldots,n, \ i \neq j \Longrightarrow (X_i,X_j)$ yra komonotoniškas $\forall i,j = 1,2,\ldots,n, \ i \neq j$.

„$\Longleftarrow$“ (Pakankamumas)

Įvykis „$\bar{X} \in A$“ yra ekvivalentus įvykiui „$(X_i,X_j) \in A_{i,j}$ kiekvienai porai (i,j)“. Dėl porų (X_i,X_j) komonotoniškumo, turime, kad $\mathbb{P}\left((X_i,X_j) \in A_{i,j}\right) = 1 \ \forall i,j = 1,2,\ldots,n, \ i \neq j$, o tai reiškia, kad $\mathbb{P}\left(\bar{X} \in A\right) = 1$. Gauname, jog komonotoniška aibė A yra atsitiktinio vektoriaus $\bar{X}$ atrama. Taigi galime daryti išvadą, kad $\bar{X}$ yra komonotoniškas atsitiktinis vektorius. □

Pastaba. [8] šaltinyje 2.2.2 teoremos būtinumas nedetalizuojamas, todėl šiame darbe šią „spragą“ užpildėme.

Įrodytoji 2.2.2 teorema teigia, jog atsitiktinio vektoriaus komonotoniškumas yra ekvivalentus komonotoniškumui poromis.

Verta atkreipti dėmesį, kad atsitiktinio vektoriaus $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ porų (X_i,X_{i+1}) $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ komonotoniškumas nebūtinai parodo $\bar{X}$ komonotoniškumą. Pavyzdžiui, nagrinėkime atsitiktinį vektorių $(U, 1, V)$, kur U ir V yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai tolygiai pasiskirstę intervale $(0,1)$. Nesunku pastebėti, jog poros $(U,1)$ ir $(1,V)$ yra komonotoniškos, tačiau $(U,1,V)$ nėra komonotoniškas.

2.3 Pavyzdys

Panagrinėkime trumpą pavyzdį, kuris leidžia geriau suprasti, ką reiškia komonotoniškumas. Iš pradžių, svarbu paminėti, jog bet kokiam atsitiktiniam vektoriui $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ žymėjimas $(X_1^c,X_2^c,\ldots,X_n^c)$ yra naudojamas norint nurodyti komonotonišką atsitiktinį vektorių, kurio marginalūs skirstiniai yra tokie patys kaip vektoriaus $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$. Tada remiantis

(1) formule, gauname, kad bet kokiam atsitiktiniam vektoriui $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, jo komonotoniško atitikmens $\bar{X}^c = (X_1^c, X_2^c, \ldots, X_n^c)$ atrama yra apibrėžiama

$$\left\{ \left(F_{X_1}^{-1}(p), F_{X_2}^{-1}(p), \ldots, F_{X_n}^{-1}(p) \right) \Big| \, 0 < p < 1 \right\}.$$

Dabar tarkime, jog turime 2 diskrečius atsitiktinius dydžius: $X \sim U\{0,1,2,3\}$ ir $Y \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$. Šiuo atveju, žymėjimas $U\{0,1,2,3\}$ reiškia, kad a.d. X turi diskretų tolygųjį skirstinį.

Komonotonišką atsitiktinį vektorių pažymėkime (X^c, Y^c). Tada gauname

$$\left(F_X^{-1}(p), F_Y^{-1}(p) \right) = \begin{cases} (0,0), \text{ kai } 0 < p \le \frac{1}{8}; \\ (0,1), \text{ kai } \frac{1}{8} < p \le \frac{2}{8}; \\ (1,1), \text{ kai } \frac{2}{8} < p \le \frac{4}{8}; \\ (2,2), \text{ kai } \frac{4}{8} < p \le \frac{6}{8}; \\ (3,2), \text{ kai } \frac{6}{8} < p \le \frac{7}{8}; \\ (3,3), \text{ kai } \frac{7}{8} < p < 1. \end{cases}$$

Taigi matome, jog komonotoniško atsitiktinio vektoriaus (X^c, Y^c) atramą sudaro tik 6 aukščiau išvardinti taškai.

3 Rizikos matai

Viena iš pagrindinių rizikos valdymo užduočių yra įvertinti būsimos portfelio vertės neapibrėžtumo riziką. Paprastai rizika yra vertinama pelną ar nuostolį nagrinėjant kaip atsitiktinį dydį, kuriam taikoma tam tikra funkcija. Tokia funkcija vadinama rizikos matu. Finansuose ir ekonomikoje yra žinoma ne viena rizikos matų klasė:

- suderintieji rizikos matai (ang. coherent risk measures) [2];
- iškilieji rizikos matai (ang. convex risk measures) [11];
- komonotoniški suderintieji rizikos matai (ang. comonotonic coherent risk measures) [3], [12];
- komonotoniški iškilieji rizikos matai (ang. comonotonic convex risk measures) [14], [17];
- spektriniai rizikos matai (ang. spectral risk measures) [10];

- deformaciniai rizikos matai (ang. distortion risk measures) [4];

Taigi tolimesniuose skyreliuose apžvelgsime keletą iš aukščiau paminėtų rizikos matų klasių ir pateiksime apibrėžimus.

3.1 Suderintieji rizikos matai

Apibrėžkime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, kur Ω yra visų galimų būsenų aibė nagrinėjamo laikotarpio pabaigoje. Tarkime, kad atsitiktinis dydis $\mathcal{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ žymi galimą finansinės pozicijos pelną arba nuostolį per tam tikrą laikotarpį. Visų rizikų aibę žymėsime $\mathbb{X} = \{\mathcal{X} : \Omega \to \mathbb{R}\}$. Tarsime, kad dydžiai jau yra diskontuoti, t.y. nerizikinga palūkanų norma yra lygi 0.

3.1.1 Apibrėžimas. Funkcija $\rho : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ yra vadinama rizikos matu.

Jei $\rho(\mathcal{X})$ reikšmė, gauta rizikai $\mathcal{X}$ pritaikius funkciją ρ, yra teigiama, tai $\rho(\mathcal{X})$ gali būti interpretuojama kaip minimali pinigų suma, kurią reikia pridėti prie pozicijos $\mathcal{X}$, investuojant į nerizikingą turtą, kad pozicija taptų priimtina. Priešingu atveju, jei $\rho(\mathcal{X})$ reikšmė yra neigiama, tada suma $-\rho(\mathcal{X})$ be jokios rizikos gali būti išimta iš dabartinės pozicijos.

Remiantis [2] šaltiniu, apibrėšime keturias aksiomas, kurias turi tenkinti suderintasis rizikos matas.

Aksioma T. (Invariantiškumas poslinkiams) (ang. Translation invariance): $\forall \mathcal{X} \in \mathbb{X}$ ir bet kokiam $\alpha \in \mathbb{R}$ teisinga lygybė

$$\rho(\mathcal{X} + \alpha) = \rho(\mathcal{X}) - \alpha.$$

Prisiminkime $\rho(\mathcal{X})$ interpretaciją kaip papildomo kapitalo reikalavimą, t.y. pinigų suma, kurią reikia pridėti prie pozicijos $\mathcal{X}$, kad ji taptų priimtina priežiūros institucijų atžvilgiu. Taigi aksioma T teigia, jog prie rizikingos pozicijos $\mathcal{X}$ pridėjus deterministinį dydį α, reikalaujama papildomo kapitalo suma sumažėja lygiai tokiu pačiu dydžiu.

Aksioma S. (Subadityvumas) (ang. Subadditivity): $\forall \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathbb{X}$ teisinga nelygybė

$$\rho(\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2) \leq \rho(\mathcal{X}_1) + \rho(\mathcal{X}_2).$$

Ši aksioma teigia, jog rizikų sujungimas nesukuria papildomos rizikos. Kita vertus, subadityvumo aksiomos negaliojimas gali sukelti tam tikras pasekmes [10]:

- Jei priežiūros institucijų naudojami rizikos matai netenkina subadityvumo aksiomos kapitalo reikalavimui, tai gali paskatinti įmones pasidalinti į mažesnes struktūras ir tokiu būdu išvengti didelio kapitalo reikalavimo. Tokiu atveju, reikalaujamo kapitalo suma atskiroms struktūroms būtų mažesnė negu visai įmonei.
- Naudodami subadityvius rizikos matus, sudėjus rizikas pervertiname sujungtų rizikų vertę, todėl, šiuo atveju, rizikų suma gali būti naudojama kaip diversifikuotų rizikų įvertis. Priešingu atveju, kai rizikos matas nėra subadityvus, sudėjus atskiras rizikas nepakankamai įvertiname bendrą riziką ir toks įvertis tampa nenaudingas.

Aksioma PH. (Teigiamas homogeniškumas) (ang. Positive homogeneity): $\forall \mathcal{X} \in \mathbb{X}$ ir bet kokiam $\lambda \geqslant 0$ teisinga lygybė

$$\rho(\lambda \mathcal{X}) = \lambda \rho(\mathcal{X}).$$

Aksiomą PH galima lengvai paaiškinti, remiantis subadityvumo aksioma. Pagal S aksiomą turime, jog $\rho(n\mathcal{X}) \leqslant n\rho(\mathcal{X})$, kai $n = 1,2,\ldots$. Šiuo atveju, PH aksioma atspindi situaciją, kai nėra rizikos diversifikacijos, o apjungus λ vienodų rizikų bendra rizikos vertė λ kartų padidėja.

Aksioma M. (Monotoniškumas) (ang. Monotonicity): $\forall \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathbb{X}$, tokiems kad $\mathcal{X}_1 \leq \mathcal{X}_2$, teisinga nelygybė

$$\rho(\mathcal{X}_2) \leq \rho(\mathcal{X}_1).$$

Finansine prasme šią aksiomą galima interpretuoti labai paprastai. Pozicijai, kurios rizika yra didesnė, reikalaujamas kapitalas taip pat yra didesnis negu kapitalas, susijęs su mažiau rizikinga pozicija.

3.1.2 Apibrėžimas. Funkcija $\rho : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ yra vadinama suderintuoju rizikos matu, jeigu ji tenkina invariantiškumo poslinkiams (T), subadityvumo (S), teigiamo homogeniškumo (PH) ir monotoniškumo (M) aksiomas.

3.2 Iškilieji rizikos matai

Teigiamo homogeniškumo aksioma sulaukė nemažai kritikos, kadangi daugeliu atvejų, pozicijos rizika gali didėti netiesiškai, lyginant su pačios pozicijos dydžiu [11]. Tai reiškia, jog padauginus iš didelio koeficiento λ, papildomai gali atsirasti likvidumo rizika. Būtent ši priežastis paskatino iškiliųjų rizikos matų apibrėžimo atsiradimą. Apibrėžiant iškiliuosius rizikos matus, subadityvumo ir teigiamo homogeniškumo aksiomos yra pakeičiamos iškilumo aksioma.

Aksioma C. (Iškilumas) (ang. Convexity): $\forall \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathbb{X}$ ir bet kokiam $\lambda \in [0,1]$ teisinga nelygybė

$$\rho\left(\lambda\mathcal{X}_1 + (1-\lambda)\mathcal{X}_2\right) \leqslant \lambda\rho\left(\mathcal{X}_1\right) + (1-\lambda)\rho\left(\mathcal{X}_2\right).$$

Iškilumo aksioma teigia, jog rizikos diversifikacija nesukuria papildomos rizikos. Tai reiškia, kad diversifikuotos pozicijos $\rho\left(\lambda\mathcal{X}_1 + (1-\lambda)\mathcal{X}_2\right)$ rizika yra mažesnė arba lygi atskirų rizikų svertiniam vidurkiui.

Taip pat svarbu pastebėti, jog iškilumas yra ekvivalentus subadityvumui, jei tenkinama teigiamo homogeniškumo aksioma.

3.2.1 Apibrėžimas. Funkcija $\rho : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ yra vadinama iškiluoju rizikos matu, jeigu ji tenkina iškilumo (C), monotoniškumo (M), invariantiškumo poslinkiams (T) aksiomas ir yra normalizuota, t.y. $\rho(0) = 0$.

3.3 Komonotoniški suderintieji rizikos matai

Ankstesniuose skyreliuose apibrėžti suderintieji ir iškilieji rizikos matai buvo pasiūlyti naudoti norint užtikrinti, jog diversifikacija sumažina galimą riziką. Nepaisant to, šaltinių [3], [12] autoriai teigia, jog suderintieji ir iškilieji rizikos matai turi labai didelį trūkumą – jie negali būti apibrėžti didelei atsitiktinių dydžių aibei. Dėl šios priežasties buvo pasiūlyta apibrėžti aksiomų rinkinį, charakterizuojantį komonotoniškus suderintuosius rizikos matus, dar kitaip vadinamus natūraliaisiais rizikos matais. Priešingai negu suderintieji rizikos matai, šie matai reikalauja subadityvumo tik komonotoniškiems atsitiktiniams dydžiams. Tad remdamiesi [12] šaltiniu, šiame skyrelyje apibrėšime komonotoniškus suderintuosius rizikos matus.

Tarkime, jog turime atsitiktinio dydžio X stebėjimų rinkinį $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Šiuo atveju rizikos matas yra apibrėžiamas kaip funkcija $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Aksioma T1. (Invariantiškumas poslinkiams) (ang. Translation invariance): $\forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ir bet kokiam $c \in \mathbb{R}$ teisinga lygybė

$$\rho\left(\hat{x} + c\mathbb{I}\right) = \rho\left(\hat{x}\right) - c,$$

čia $\mathbb{I} = (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n$.

Aksioma PH1. (Teigiamas homogeniškumas) (ang. Positive homogeneity): $\forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ir bet kokiam $\lambda \geq 0$ teisinga lygybė

$$\rho(\lambda \hat{x}) = \lambda \rho(\hat{x}).$$

Aksioma M1. (Monotoniškumas) (ang. Monotonicity): $\forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$, tokiems kad $\hat{x} \leq \hat{y}$ (t.y. $x_i \leq y_i,\ i = 1,2,\ldots,n$), teisinga nelygybė

$$\rho(\hat{y}) \leq \rho(\hat{x}).$$

Aksioma S1. (Komonotoniškas subadityvumas) (ang. Comonotonic subadditivity): $\forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ tokiems, kad $\hat{x}$ ir $\hat{y}$ yra komonotoniški, teisinga nelygybė

$$\rho(\hat{x} + \hat{y}) \leq \rho(\hat{x}) + \rho(\hat{y}).$$

Vektoriai $\hat{x}$ ir $\hat{y}$ yra komonotoniški $\iff (x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0$, kai $i,j = 1,2,\ldots,n,\ i \neq j$.

Pastaba. Jei a.d. X reikšmių aibė yra $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, o Y reikšmių aibė atitinkamai yra $\hat{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, tai vektoriai $\hat{x}$ ir $\hat{y}$ yra komonotoniški $\iff$ atsitiktinis vektorius (X,Y) yra komonotoniškas.

Aksioma P1. (Invariantiškumas perstatų atžvilgiu) (ang. Permutation invariance): Bet kokiai $(1,2,\ldots,n)$ perstatai $(i_1, \ldots, i_n)$ teisinga lygybė

$$\rho((x_1, \ldots, x_n)) = \rho((x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})).$$

3.3.1 Apibrėžimas. Komonotonišku suderintuoju rizikos matu yra vadinama funkcija $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tenkinanti T1, PH1, M1, S1 ir P1 aksiomas.

3.3.1 Teorema ([12]). *Tegu $x_{(1)},x_{(2)},\ldots,x_{(n)}$ – stebėto $\hat{x}$ pozicinės statistikos, čia $x_{(1)}$ yra mažiausias, o $x_{(n)}$ – didžiausias iš $\hat{x}$ koordinačių. Rizikos matas $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yra komonotoniškas suderintasis rizikos matas tada ir tik tada, jei egzistuoja diskrečių tikimybinių matų aibė $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_1 = \{\hat{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots,\omega_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \omega_i = 1,\ \omega_i \geq 0, \forall i = 1,2,\ldots,n\}$ tokia, kad*

$$\rho(\hat{x}) = \sup_{\hat{\omega} \in \mathcal{W}} \left\{ -\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_{(i)} \right\},\ \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

3.4 Komonotoniški iškilieji rizikos matai

Komonotoniškų suderintųjų rizikos matų apibrėžimas [12] šaltinyje paskatino kitos rizikos matų klasės – komonotoniškų iškilųjų rizikos matų atsiradimą [17]. Komonotoniški iškilieji rizikos matai yra komonotoniškų suderintųjų rizikos matų apibendrinimas, kadangi šiuo atveju susilpninama iškilumo aksioma ir ji taikoma tik komonotoniškoms rizikoms.

Aksioma C1. (Komonotoniškas iškilumas) (ang. Comonotonic convexity): $\forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ tokiems, kad $\hat{x}$ ir $\hat{y}$ yra komonotoniški, ir bet kokiam $\lambda \in [0,1]$ teisinga nelygybė

$$\rho\left(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)\hat{y}\right) \leqslant \lambda\rho\left(\hat{x}\right) + (1-\lambda)\rho\left(\hat{y}\right).$$

Aksioma N1. (Normalizavimas) (ang. Normalization): $\rho(0) = 0$.

Nors daugelyje šaltinių ši aksioma yra praleidžiama, tačiau būtent dėl normalizavimo reikalavimo dydis $\rho\left(\hat{x}\right)$ gali būti interpretuojamas kaip mažiausia pinigų suma, kurią reikia pridėti prie rizikingos pozicijos $\hat{x}$, kad pozicija taptų priimtina [16].

3.4.1 Apibrėžimas. Komonotonišku iškiluoju rizikos matu yra vadinama funkcija $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tenkinanti T1, M1, P1, C1 ir N1 aksiomas.

3.4.1 Teorema ([14]). *Tegu $x_{(1)},x_{(2)},\ldots,x_{(n)}$ – stebėto $\hat{x}$ pozicinės statistikos, čia $x_{(1)}$ yra mažiausias, o $x_{(n)}$ – didžiausias iš $\hat{x}$ koordinačių. Rizikos matas $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yra komonotoniškas iškilusis rizikos matas tada ir tik tada, jei egzistuoja:*

- *diskrečių tikimybinių matų aibė* $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_1 = \left\{\hat{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i = 1,\ \omega_i \geq 0, \forall i = 1,2,\ldots,n\right\}$,
- *baudos funkcija* $\alpha : \mathcal{W} \to [0,\infty]$, *tenkinanti* $\inf_{\hat{\omega}\in\mathcal{W}} \alpha\left(\hat{\omega}\right) = 0$,

tokie, kad

$$\rho\left(\hat{x}\right) = \sup_{\hat{\omega}\in\mathcal{W}} \left\{-\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_{(i)} - \alpha\left(\hat{\omega}\right)\right\},\ \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

4 Komonotoniški suderintieji rizikos matai indukuoti komonotoniškais iškilaisiais rizikos matais

Komonotoniški suderintieji ir komonotoniški iškilieji rizikos matai tenkina 4 tas pačias aksiomas: invariantiškumą poslinkiams, monotoniškumą, iškilumą ir invariantiškumą perstatų atžvilgiu. Komonotoniški iškilieji rizikos matai yra komonotoniški suderintieji tada ir tik tada, jei tenkina teigiamo homogeniškumo aksiomą. Todėl kyla natūralus klausimas, ar turint komonotonišką iškilųjį rizikos matą, kuris netenkina teigiamo homogeniškumo aksiomos, galima sukurti komonotonišką suderintąjį rizikos matą? Taip pat, ar komonotoniškas iškilusis rizikos matas gali būti išreikštas per kokį nors komonotonišką suderintąjį rizikos matą?

Norėdami atsakyti į aukščiau pateiktus klausimus, analogiškai kaip [7] šaltinyje yra apibrėžiami indukuoti suderintieji rizikos matai, šiame darbe suformuluosime teoremą, kuria remiantis komonotonišką suderintąjį rizikos matą galima išreikšti naudojant komonotonišką iškilųjį rizikos matą, t.y. apibrėšime indukuotą komonotonišką suderintąjį rizikos matą.

4.1 Pagrindinė teorema ir jos įrodymas

Šioje dalyje suformuluosime pagrindinę darbo teoremą ir įrodysime, kad komonotoniški iškilieji rizikos matai gali būti išreiškiami per komonotoniškus suderintuosius rizikos matus, kurie yra indukuoti komonotoniškais iškilaisiais rizikos matais.

4.1.1 Teorema. *Bet kokiam komonotoniškam iškilajam rizikos matui* $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, egzistuoja indukuotų komonotoniškų suderintųjų rizikos matų šeima* $\{\rho_{\pi,c}\}_{c\geq 0}$ *tokia, kad*

$$\pi(\hat{x}) = \sup_{c\geq 0} \{\rho_{\pi,c}(\hat{x}) - c\}, \ \hat{x} \in \mathbb{R}^n,$$

kur $\forall c \geq 0$*, funkcija* $\rho_{\pi,c} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *yra apibrėžiama kaip*

$$\rho_{\pi,c}(\hat{x}) = \inf_{t>0} \left\{ t\pi\left(t^{-1}\hat{x}\right) + tc \right\}, \ \hat{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Norint įrodyti 4.1.1 teoremą, reikalinga pagalbinė lema. Lemos įrodyme naudosime funkciją $F : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, kuri apibrėžiama kaip $F(\hat{x},t) = t\pi(t^{-1}\hat{x})$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

4.1.2 Lema. *Jeigu funkcija* $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tenkina komonotoniško iškilumo aksiomą, tada funkcija* $F(\hat{x},t)$ *taip pat pasižymi komonotonišku iškilumu kintamųjų poros* $(\hat{x},t)$ *atžvilgiu (ang. jointly comonotonically convex).*

Įrodymas. Bet kokiems $t_1, t_2 > 0$, $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ tokiems, kad $\hat{x}$ ir $\hat{y}$ yra komonotoniški, ir bet kokiam $\lambda \in [0,1]$, pažymėkime $t = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$.
Tada

$$\begin{aligned}
F(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)\hat{y}, t) &= t\pi\left(\frac{\lambda\hat{x} + (1-\lambda)\hat{y}}{t}\right) \\
&= t\pi\left(\frac{\lambda}{t}\hat{x} + \frac{1-\lambda}{t}\hat{y}\right) \\
&= t\pi\left(\frac{\lambda t_1}{t}\frac{\hat{x}}{t_1} + \frac{(1-\lambda)t_2}{t}\frac{\hat{y}}{t_2}\right) \\
&\leq t\left(\frac{\lambda t_1}{t}\pi\left(\frac{\hat{x}}{t_1}\right) + \frac{(1-\lambda)t_2}{t}\pi\left(\frac{\hat{y}}{t_2}\right)\right) \\
&= t\frac{\lambda t_1}{t}\pi\left(\frac{\hat{x}}{t_1}\right) + t\frac{(1-\lambda)t_2}{t}\pi\left(\frac{\hat{y}}{t_2}\right) \\
&= \lambda F(\hat{x}, t_1) + (1-\lambda)F(\hat{y}, t_2),
\end{aligned}$$

čia nelygybė atsiranda dėl funkcijos π komonotoniško iškilumo. □

Turėdami pagalbinę 4.1.2 lemą, galime pereiti prie pagrindinės teoremos įrodymo.

4.1.1. teoremos įrodymas.

Iš pradžių, įrodysime, jog funkcija $\rho_{\pi,c}$ yra komonotoniškas suderintasis rizikos matas. Taigi parodysime, jog $\rho_{\pi,c}$ tenkina invariantiškumo poslinkiams (T1), teigiamo homogeniškumo (PH1), monotoniškumo (M1), komonotoniško iškilumo (C1) ir invariantiškumo perstatų atžvilgiu (P1) aksiomas.

Aksioma T1. Kadangi π yra komonotoniškas iškilusis rizikos matas, jis tenkina invariantiškumo poslinkiams aksiomą. Tada bet kokiam $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\rho_{\pi,c}\left(\hat{x}+a\mathbb{I}\right) &= \inf_{t>0}\left\{t\pi\left(t^{-1}\left(\hat{x}+a\mathbb{I}\right)\right)+tc\right\}\\ &= \inf_{t>0}\left\{t\left[\pi\left(t^{-1}\hat{x}\right)-t^{-1}a\right]+tc\right\}\\ &= \inf_{t>0}\left\{t\pi\left(t^{-1}\hat{x}\right)-a+tc\right\}\\ &= \rho_{\pi,c}\left(\hat{x}\right)-a.\end{aligned}$$

Aksioma PH1. Bet kokiam $\lambda > 0$, turime

$$\begin{aligned}\rho_{\pi,c}\left(\lambda\hat{x}\right) &= \inf_{t>0}\left\{t\pi\left(\lambda t^{-1}\hat{x}\right)+tc\right\}\\ &= \inf_{t>0}\lambda\left\{\lambda^{-1}t\pi\left(\lambda t^{-1}\hat{x}\right)+\lambda^{-1}tc\right\}\\ &= \lambda\cdot\inf_{\lambda^{-1}t>0}\left\{\lambda^{-1}t\pi\left(\lambda t^{-1}\hat{x}\right)+\lambda^{-1}tc\right\}\\ &= \lambda\rho_{\pi,c}\left(\hat{x}\right).\end{aligned}$$

Kadangi komonotoniškas iškilusis rizikos matas π yra normalizuotas, imdami $\lambda = 0$, gauname

$$\rho_{\pi,c}(0) = \inf_{t>0}\left\{t\pi\left(t^{-1}\cdot 0\right)+tc\right\} = \inf_{t>0}\{tc\} = 0.$$

Taigi gauname, jog bet kokiam $\lambda \geq 0$, teisinga lygybė $\rho_{\pi,c}\left(\lambda\hat{x}\right) = \lambda\rho_{\pi,c}\left(\hat{x}\right)$.

Aksioma M1. Funkcijos $\rho_{\pi,c}$ monotoniškumas tiesiogiai seka iš funkcijos π monotoniškumo.

Aksioma C1. Imkime $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ tokius, kad $\hat{x}$ ir $\hat{y}$ yra komonotoniški, ir bet kokį $\lambda \in [0,1]$. Pažymėkime $\hat{z} = \lambda\hat{x} + (1-\lambda)\,\hat{y}$ ir $t = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$. Tada turime

$$\begin{aligned}\rho_{\pi,c}\left(\hat{z}\right) &= \inf_{t>0}\left\{F\left(\hat{z},t\right)+tc\right\}\\ &= \inf_{t_1>0,t_2>0}\left\{F\left(\hat{z},\lambda t_1+(1-\lambda)\,t_2\right)+\left(\lambda t_1+(1-\lambda)\,t_2\right)c\right\}.\end{aligned}$$

Remiantis 4.1.2 lema žinome, jog funkcija $F(\hat{x},t)$ yra komonotoniškai iškila kintamųjų $\hat{x}$ ir t poros atžvilgiu. Taigi gauname

$$\begin{aligned}\rho_{\pi,c}(\hat{z}) &\leq \inf_{t_1>0,t_2>0}\{\lambda F(\hat{x},t_1)+(1-\lambda)F(\hat{y},t_2)+(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)c\}\\ &=\inf_{t_1>0}\{\lambda F(\hat{x},t_1)+\lambda t_1 c\}+\inf_{t_2>0}\{(1-\lambda)F(\hat{y},t_2)+(1-\lambda)t_2 c\}\\ &=\lambda\rho_{\pi,c}(\hat{x})+(1-\lambda)\rho_{\pi,c}(\hat{y}).\end{aligned}$$

Aksioma P1. Kadangi funkcija π yra komonotoniškas iškilusis rizikos matas, tai ji tenkina invariantiškumo perstatų atžvilgiu aksiomą (P1), t.y. bet kokiai $(1,2,\ldots,n)$ perstatai $(i_1,\ldots,i_n)$ teisinga lygybė

$$\pi(\hat{x})=\pi(\tilde{x}),$$

kur $\hat{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ ir $\tilde{x}=(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})$.
Pasinaudodami tuo, gauname

$$\rho_{\pi,c}(\hat{x})=\inf_{t>0}\left\{t\pi\left(t^{-1}\hat{x}\right)+tc\right\}=\inf_{t>0}\left\{t\pi\left(t^{-1}\tilde{x}\right)+tc\right\}=\rho_{\pi,c}(\tilde{x}).$$

Taigi įsitikinome, jog rizikos matas $\rho_{\pi,c}$ tenkina invariantiškumo poslinkiams, teigiamo homogeniškumo, monotoniškumo, komonotoniško iškilumo bei invariantiškumo perstatų atžvilgiu aksiomas, o tai reiškia, kad $\rho_{\pi,c}$ yra komonotoniškas suderintasis rizikos matas bet kokiam $c\geq 0$.

Toliau įrodysime, kad

$$\pi(\hat{x})=\sup_{c\geq 0}\{\rho_{\pi,c}(\hat{x})-c\}.$$

Kadangi

$$\rho_{\pi,c}(\hat{x})=\inf_{t>0}\left\{t\pi\left(t^{-1}\hat{x}\right)+tc\right\},$$

gauname, jog

$$\rho_{\pi,c}(\hat{x})\leq\pi(\hat{x})+c,$$

bet kokiam fiksuotam $\hat{x}\in\mathbb{R}^n$.
Kitaip tariant,

$$\pi(\hat{x})\geq\rho_{\pi,c}(\hat{x})-c.$$

Iš to išplaukia, kad

$$\pi(\hat{x})\geq\sup_{c\geq 0}\{\rho_{\pi,c}(\hat{x})-c\}. \tag{5}$$

Stebėjimų rinkiniui $\hat{x}\in\mathbb{R}^n$ apibrėžkime funkciją $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tokią, kad

$$g(t)=\begin{cases}t\pi\left(t^{-1}\hat{x}\right), & t>0;\\ \lim\limits_{t\downarrow 0}t\pi\left(t^{-1}\hat{x}\right), & t=0.\end{cases}$$

Parodysime, kad funkcija $g(t)$ yra nedidėjanti, uždara (žr. A.1 priedą) ir iškila. Taip pat įsitikinsime, jog $\lim_{t\downarrow 0} t\pi\left(t^{-1}\hat{x}\right)$ egzistuoja.

Visų pirma, remiantis [14] šaltinyje įrodyta 3.4.1 teorema, žinome, kad komonotoniškas iškilusis rizikos matas gali būti užrašomas kaip

$$\pi\left(\hat{x}\right) = \sup_{\hat{\omega}\in\mathcal{W}} \left\{ -\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_{(i)} - \alpha\left(\hat{\omega}\right) \right\}, \ \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

čia $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_1 = \{\hat{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1,\, \omega_i \geq 0, \forall i = 1,2,\ldots,n\}$ yra diskrečių tikimybinių matų aibė, o α yra baudos funkcija $\alpha : \mathcal{W} \to [0,\infty]$, tenkinanti $\inf_{\hat{\omega}\in\mathcal{W}} \alpha\left(\hat{\omega}\right) = 0$.

Baudos funkcija α gali būti apibrėžiama kaip

$$\alpha\left(\hat{\omega}\right) = \sup_{\hat{x}\in\mathcal{B}} \left\{ -\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i - \pi\left(\hat{x}\right) \right\}, \ \forall \hat{\omega} \in \mathcal{W},$$

čia $\mathcal{B}$ yra komonotoniškų rizikų aibė, t.y. $\mathcal{B} = \{\hat{y} \in \mathbb{R}^n : y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n\}$.

Remiantis (6) formule, gauname, jog $\forall t > 0$ yra teisinga

$$\begin{aligned} g(t) &= t\pi\left(t^{-1}\hat{x}\right) \\ &= t \cdot \sup_{\hat{\omega}\in\mathcal{W}} \left\{ -\sum_{i=1}^{n} t^{-1}\omega_i x_{(i)} - \alpha\left(\hat{\omega}\right) \right\} \\ &= \sup_{\hat{\omega}\in\mathcal{W}} \left\{ -\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_{(i)} - t\alpha\left(\hat{\omega}\right) \right\}, \ \hat{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{7}$$

Imdami $\hat{x} = 0$, gauname, jog $\alpha\left(\hat{\omega}\right) \geq -\sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot 0 - \pi(0) = 0, \ \forall \hat{\omega} \in \mathcal{W}$. Taigi gauname, jog funkcija $g(t)$ yra nedidėjanti kintamojo t atžvilgiu.

Taip pat įsitikinkime, jog egzistuoja $\lim_{t\downarrow 0} t\pi\left(t^{-1}\hat{x}\right)$. Remiantis (7) išraiška, nesunku pastebėti, jog

$$g(t) \leq \sup_{\hat{\omega}\in\mathcal{W}} \left\{ -\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_{(i)} \right\}, \ \hat{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Kadangi $g(t)$ yra nedidėjanti funkcija intervale $(0, +\infty)$ ir $g(t)$ yra aprėžta iš viršaus, tai reiškia, jog $\lim_{t\downarrow 0} g(t)$ egzistuoja.

Dabar patikrinsime ar funkcija $g(t)$ yra iškila. Pagal 4.1.2 lemą, funkcija $g(t) = F\left(\hat{x}, t\right)$, kai $t > 0$, yra iškila intervale $(0, +\infty)$. Lieka tik patikrinti, ar funkcija $g(t)$ yra iškila ir intervale $[0,a)$ bet kokiam $a > 0$.

Tegul $\{t_n\}$ yra seka, kuri konverguoja į 0, kai $n \to +\infty$. Nagrinėkime $s_n = \lambda t_n + (1-\lambda)\, t_0$ bet kokiems $t_0 > 0$ ir $t_n \leq t_0\, \forall n \in \mathbb{N}$. Remdamiesi funkcijos $g(t)$ iškilumu, kai $t > 0$, gauname

$$g\left(s_n\right) \leq \lambda g\left(t_n\right) + (1-\lambda)\, g\left(t_0\right).$$

Pereidami prie ribos, kai $n \to +\infty$, turime

$$g\left(0+(1-\lambda)\, t_0\right) \leq \lambda g\left(0\right)+(1-\lambda)\, g\left(t_0\right).$$

Taigi gavome, jog funkcija $g(t)$ yra iškila pustiesėje $[0,+\infty)$.

Remdamiesi A.1 priede pateikiamais apibrėžimais ir teiginiu, ir žinodami, jog funkcija $g(t)$ yra tolydi, galime daryti išvadą, jog funkcija $g(t)$ yra pustolydė iš apačios, o tuo pačiu $g(t)$ yra uždara.

Funkcijos $g(t)$ jungtinė funkcija (ang. conjugate function) (žr. A.2 priedą) $h : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$, yra apibrėžiama kaip

$$h(d) = \sup_{t\geq 0} \left\{td - g(t)\right\}.$$

Žinodami, jog funkcija $g(t)$ yra nedidėjanti kintamojo t atžvilgiu, gauname, kad $h(d) = +\infty$, kai $d > 0$, tad funkcija $h(d)$ yra apibrėžta pustiesėje $(-\infty, 0]$.

Kadangi funkcija $g(t)$ yra iškila ir uždara, tai jos jungtinės funkcijos $h(d)$ jungtinė funkcija yra pati funkcija $g(t)$ (žr. A.2 priedą). Todėl turime

$$g(t) = \sup_{d\leq 0} \left\{dt - h(d)\right\}.$$

Galime pastebėti, kai $c = -d$, tai

$$\begin{aligned} h(-c) &= \sup_{t\geq 0} \left\{-tc - g(t)\right\} = \sup_{t\geq 0} \left\{-\left(g(t)+tc\right)\right\} \\ &\geq -\left(g(t)+tc\right). \end{aligned}$$

Kadangi $g(t) = t\pi\left(t^{-1}\hat{x}\right)$, $t > 0$, tai

$$h(-c) \geq -\rho_{\pi,c}\left(\hat{x}\right).$$

Todėl

$$g(t) \leq \sup_{c\geq 0} \left\{-ct + \rho_{\pi,c}\left(\hat{x}\right)\right\}.$$

Kadangi $g(1) = \pi\left(\hat{x}\right)$, gauname

$$\pi\left(\hat{x}\right) \leq \sup_{c\geq 0} \left\{\rho_{\pi,c}\left(\hat{x}\right) - c\right\}. \tag{8}$$

Taigi remiantis (5) ir (8) nelygybėmis, gauname

$$\pi\left(\hat{x}\right) = \sup_{c\geq 0} \left\{\rho_{\pi,c}\left(\hat{x}\right) - c\right\}.$$

$\square$

4.1.1 teorema atskleidžia svarbų ryšį tarp komonotoniškų iškilųjų ir komonotoniškų suderintųjų rizikos matų, t.y. komonotoniški iškilieji rizikos matai gali būti išreiškiami per komonotoniškus suderintuosius rizikos matus, kurie yra indukuoti komonotoniškais iškilaisiais rizikos matais.

Pagrindinis skirtumas tarp komonotoniškų iškilųjų ir suderintųjų rizikos matų yra tas, jog komonotoniški suderintieji rizikos matai turi tenkinti teigiamo homogeniškumo aksiomą. Būtent tuo 4.1.1 teorema yra reikšminga, nes ji parodo būdą, kaip galima pakoreguoti komonotonišką iškilųjį rizikos matą, jog jis tenkintų teigiamo homogeniškumo aksiomą ir tuo pačiu būtų laikomas komonotonišku suderintuoju rizikos matu.

4.2 Indukuoti komonotoniški suderintieji rizikos matai

Šiame skyrelyje apžvelgsime komonotoniškų suderintųjų rizikos matų klasę, kurią indukuoja komonotoniški iškilieji rizikos matai.

Kaip jau buvo minėta 4.1 skyrelyje, viena iš pagrindinių charakteristikų, apibūdinančių komonotonišką suderintąjį rizikos matą, yra teigiamo homogeniškumo aksioma. Teigiamo homogeniškumo aksiomos tenkinimas reiškia, jog likvidumo rizika neegzistuoja ir padauginus poziciją iš neneigiamo faktoriaus λ, galima rizika padidėja tiek pat kartų. Teigiamo homogeniškumo privalumas yra tas, jog jis užtikrina invariantiškumą daugiklio atžvilgiu, tai reiškia, kad rezultatas nepriklauso nuo naudojamos valiutos. Tuo tarpu, naudojant komonotoniškus iškiluosius rizikos matus, kurie netenkina teigiamo homogeniškumo aksiomos, rizikos vertė labai stipriai priklauso nuo pasirinktų matavimo vienetų. Šiuo atžvilgiu, komonotoniški suderintieji rizikos matai yra pranašesni už komonotoniškus iškiluosius rizikos matus.

Nepaisant to, komonotoniški iškilieji rizikos matai atsižvelgia į likvidumo riziką. Kaip jau įrodėme 4.1.1 teoremoje, turėdami komonotonišką iškilųjį rizikos matą $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, galime sukonstruoti komonotoniškų suderintųjų rizikos matų šeimą $\rho_{\pi,c} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kuri apibrėžiama kaip

$$\rho_{\pi,c}(\hat{x}) = \inf_{t>0} \left\{ t\pi\left(t^{-1}\hat{x}\right) + tc \right\}, \ \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \ c \geq 0.$$

Tokie indukuoti komonotoniški suderintieji rizikos matai gali atsižvelgti į likvidumo riziką. Kitaip tariant, šie rizikos matai yra pranašesni tiek už komonotoniškus suderintuosius, tiek už komonotoniškus iškiluosius rizikos matus.

Funkcijų šeimos $\rho_{\pi,c}$ apibrėžime konstanta c gali būti interpretuojama kaip fiksuotas likvidumo mokestis. Tarkime, pasirenkame rizikos matą π, jog nustatytume rizikos vertę, ir perskaičiuojame poziciją $\hat{x}$, padidindami t kartų. Tuomet gauname, jog rizikos vertė yra

$$\frac{\pi(t\hat{x}) + c}{t}.$$

Pagal 4.1.1 teoremą, indukuotas komonotoniškas suderintasis rizikos matas yra

$$\rho_{\pi,c}(\hat{x}) = \inf_{t>0} \frac{\pi(t\hat{x}) + c}{t}.$$

Taigi finansiniu atžvilgiu $\rho_{\pi,c}$ gali būti interpretuojamas kaip aukščiau minėtos rizikos vertės infimumas. Kai $\rho_{\pi,c}(\hat{x}) < \pi(\hat{x})$, tai reiškia, jog perskaičiavus portfelį rizika yra mažesnė, negu pradinio portfelio.

Komonotoniškam iškilajam rizikos matui π teisingos nelygybės:

$$\begin{cases} \pi(t\hat{x}) \leq t\pi(\hat{x}), & 0 \leq t < 1, \\ \pi(t\hat{x}) \geq t\pi(\hat{x}), & t \geq 1. \end{cases}$$

Tada absoliuti reikšmė $|\, t\pi(\hat{x}) - \pi(t\hat{x}) \,|$ gali būti interpretuojama kaip likvidumo rizika, kai portfelis yra perskaičiuojamas naudojant faktorių t. Tarkime t^* yra optimalus perskaičiavimo faktorius, o tai reiškia, kad rizikos matas $\rho_{\pi,c}(\hat{x})$ pasiekia infimumą taške t^*. Tada turime

$$\rho_{\pi,c}(\hat{x}) = \frac{\pi(t^*\hat{x}) + c}{t^*}.$$

Tada likvidumo rizika yra

$$t^*\pi(\hat{x}) - \pi(t^*\hat{x}) = t^*[\pi(\hat{x}) - \rho_{\pi,c}(\hat{x})] + c, \text{ jei } 0 < t^* < 1$$

arba

$$\pi(t^*\hat{x}) - t^*\pi(\hat{x}) = t^*[\rho_{\pi,c}(\hat{x}) - \pi(\hat{x})] - c, \text{ jei } t^* \geq 1. \tag{9}$$

Remiantis aukščiau pateikta analize, žinome, jog indukuoti komonotoniški suderintieji rizikos matai gali būti naudojami nustatyti, ar naudinga perskaičiuoti portfelį, ar ne, t.y. jeigu indukuotas komonotoniškas suderintasis rizikos matas yra mažesnis už jį generuojantį komonotonišką iškilųjį matą, tuomet siūloma portfelį perskaičiuoti. Taip pat svarbu nepamiršti, jog skirtumas tarp indukuoto komonotoniško suderintojo ir komonotoniško iškilojo rizikos mato, $\pi(\hat{x}) - \rho_{\pi,c}(\hat{x})$, gali būti naudojamas likvidumo rizikos vertinimui.

5 Praktinis pritaikymas

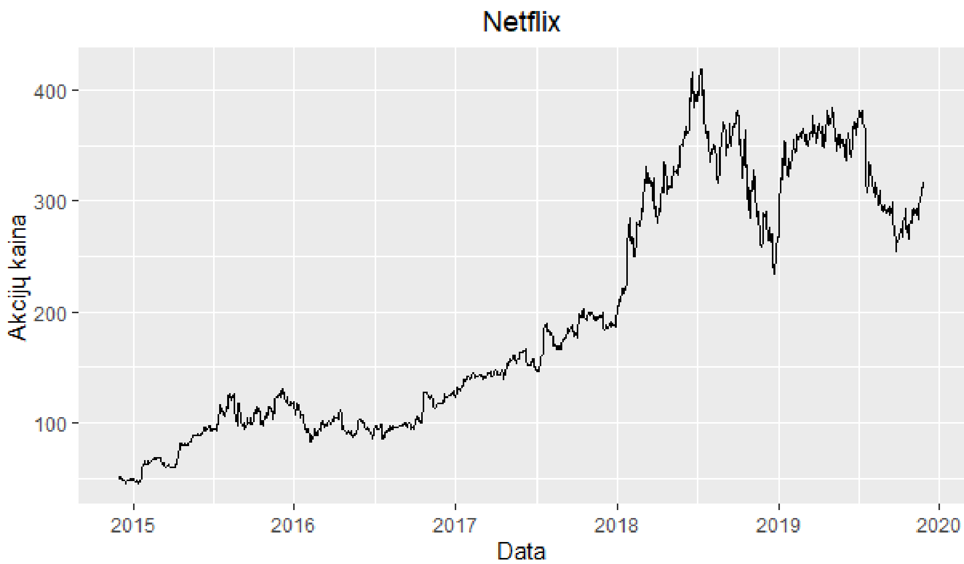
Šioje dalyje praktiškai pabandysime pritaikyti komonotonišką suderintąjį, komonotonišką iškilųjį ir indukuotą komonotonišką suderintąjį rizikos matus. Skaičiavimams naudosime

Yahoo Finance pateikiamą informaciją apie „Netflix“ (NFLX) kompaniją. Nagrinėsime NFLX akcijų kainų istorinius 2014–2019 m. duomenis. Skaičiavimai bus atliekami naudojantis statistinių duomenų apdorojimo programa RStudio ir skaičiuoklės programa Microsoft Excel.

5.1 Duomenų aprašymas

„Netflix“ – JAV kompanija, teikianti pasaulines vaizdo formato transliavimo internetu, DVD ir Blu-ray diskų nuomos internete paslaugas. „Netflix“ akcijos yra kotiruojamos JAV „Nasdaq“ biržoje.

Apibrėžkime akcijų kainų vektorių $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, čia x_i – akcijų kaina laiko momentu $i = 1,2,\ldots,n$. Kadangi skaičiavimams pasirinkome istorinius 5 metų (nuo 2014–12–01 iki 2019–12–01) „Netflix“ akcijų duomenis, o istorinės kainos yra pateikiamos kiekvienai dienai, tai mūsų atveju $n = 1259$. Istorinės NFLX akcijų kainos pavaizduotos 2 pav.



Šaltinis: parengta autorės, R programos kodas pateiktas B.1 priede

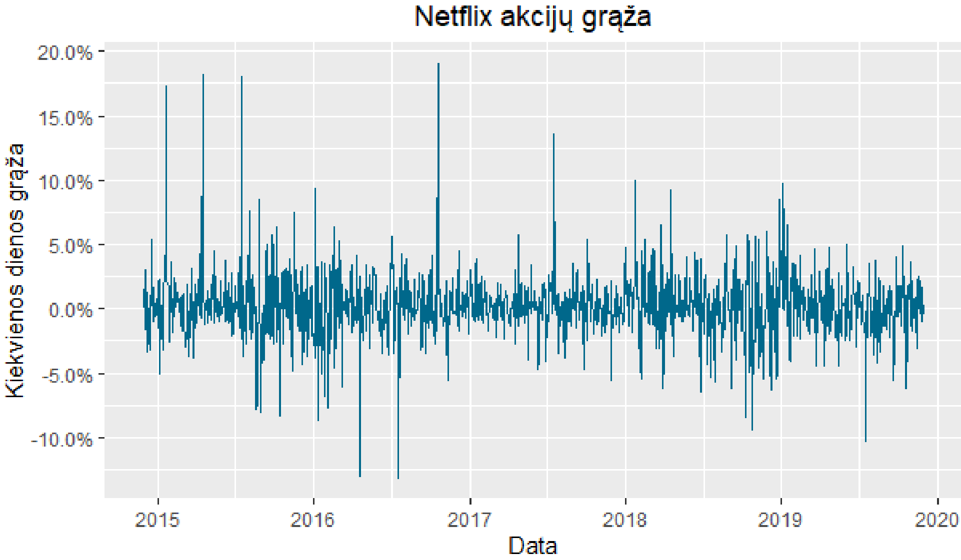
2 pav.: 2014–2019 m. istoriniai „Netflix“ akcijų duomenys.

Norėdami įvertinti riziką, pritaikydami rizikos matus, iš pradžių, turime apskaičiuoti investicijos į akcijas grąžas. Grąžų vektorių pažymėkime $\hat{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, čia r_i – investicijos grąža nuo momento $i-1$ iki momento i. Grąža apskaičiuojama pagal formulę

$$r_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}} = \frac{x_i}{x_{i-1}} - 1, \ \ i = 1,2,\ldots,n,$$

t.y. skirtumas tarp akcijų vertės periodo pabaigoje ir periodo pradžioje, padalintas iš vertės periodo pradžioje.

Nagrinėjamų NFLX akcijų grąžos yra pavaizduotos 3 pav, o pagrindinės skaitinės charakteristikos pateiktos 1 lentelėje. Pažvelgę į „Netflix“ grąžų grafiką, galime daryti išvadą, kad grąža yra gana nestabili, o akcijų kainos bet kurią dieną gali pakisti $+5\%$ arba -5%.



Šaltinis: parengta autorės, R programos kodas pateiktas B.2 priede

3 pav.: „Netflix“ akcijų grąža apskaičiuota kiekvienai dienai.

Vidurkis	Mediana	Standartinis nuokrypis	Didžiausia reikšmė	Mažiausia reikšmė
0,0018212	0,0004457	0,0262719	0,1902805	$-0{,}1312620$

1 lentelė: Pagrindinės skaitinės NFLX akcijų grąžos charakteristikos.

5.2 Rizikos matų skaičiavimas

Šioje dalyje, naudodami „Netflix“ akcijų grąžų duomenis, įvertinsime riziką remdamiesi teorinėje dalyje įrodyta indukuoto komonotoniško suderintojo rizikos mato (4) išraiška. Taip pat apskaičiuosime riziką pagal komonotoniško suderintojo bei komonotoniško iškilojo rizikos matų (2) ir (3) išraiškas ir palyginsime gautus rezultatus.

Skaičiavimams naudosime NFLX akcijų grąžų, apskaičiuotų kas mėnesį, vektorių $\hat{r} = \left(r_{(1)}, r_{(2)}, \ldots, r_{(n)}\right)$, $n = 60$, kurio elementai yra išrikiuoti nemažėjančia tvarka.

Tarsime, jog diskrečių tikimybinių matų aibė

$$\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_1 = \left\{\hat{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1,\ \omega_i \geq 0, \forall i = 1,2,\ldots,n, n = 60\right\}$$

yra sudaryta iš atsitiktinai sudarytų svorių rinkinių, t.y. svorių rinkinius sudarysime generuodami atsitiktinį skaičių rinkinį ir tada kiekvieną gautą skaičių padalinsime iš visų gautų skaičių sumos. Taip pat tarsime, jog tik 10% „Netflix“ akcijų grąžų yra suteikiami nenuliniai svoriai.

Skaičiavimams naudosime žemiau pateiktus svorių rinkinius:

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}^1 &= (0{,}0316285, 0{,}2819650, 0{,}2012113, 0{,}0531629, 0{,}2025572, 0{,}2294751, 0, \ldots, 0)\,,\\
\hat{\omega}^2 &= (0{,}2215470, 0{,}1939227, 0{,}1138122, 0{,}1906077, 0{,}2580110, 0{,}0220994, 0, \ldots, 0)\,,\\
\hat{\omega}^3 &= (0{,}1976317, 0{,}1845651, 0{,}1580237, 0{,}2290731, 0{,}1143324, 0{,}1163740, 0, \ldots, 0)\,,\\
\hat{\omega}^4 &= (0{,}2215593, 0{,}1961018, 0{,}1435959, 0{,}2151949, 0{,}1105807, 0{,}1129674, 0, \ldots, 0)\,,\\
\hat{\omega}^5 &= (0{,}1384286, 0{,}2907536, 0{,}2244789, 0{,}0529129, 0{,}0876537, 0{,}2057723, 0, \ldots, 0)\,.
\end{aligned}$$

Baudos funkciją $\alpha : \mathcal{W} \to [0,\infty]$, tenkinančią $\inf_{\hat{\omega}\in\mathcal{W}} \alpha(\hat{\omega}) = 0$, apibrėžiame kaip

$$\alpha(\hat{w}) = -\frac{r_{(1)}}{2}\left(\max_{1\le i\le n}\{\omega_i\} - \min_{1\le i\le n}\{\omega_i\}\right),\ \hat{\omega}\in\mathcal{W}.$$

Atitinkamai kiekvienam pasirinktam svorių rinkiniui gauname:

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\hat{\omega}^1\right) &= 0{,}0246660,\\
\alpha\left(\hat{\omega}^2\right) &= 0{,}0232447,\\
\alpha\left(\hat{\omega}^3\right) &= 0{,}0113055,\\
\alpha\left(\hat{\omega}^4\right) &= 0{,}0109348,\\
\alpha\left(\hat{\omega}^5\right) &= 0{,}0234347.
\end{aligned}$$

Tada taikydami (2), (3) ir (4) rizikos matų formules, gauname komonotoniško suderintojo $\rho(\hat{r})$, komonotoniško iškilojo $\pi(\hat{r})$ ir indukuoto komonotoniško suderintojo $\rho_{\pi,c}(\hat{r})$ rizikos matų reikšmes, kurios pateikiamos 2 lentelėje.

Pastaba. Skaičiuodami indukuotą komonotonišką suderintąjį rizikos matą naudojome komonotoniško iškilojo rizikos mato (3) formulę, todėl indukuoto komonotoniško suderintojo rizikos mato (4) išraiška gali būti perrašyta kaip

$$\rho_{\pi,c}(\hat{r}) = \inf_{t>0}\left\{t\pi\left(t^{-1}\hat{r}\right) + tc\right\} = \inf_{t>0}\left\{t\cdot\sup_{\hat{\omega}\in\mathcal{W}}\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i r_{(i)}}{t} - \alpha(\hat{\omega})\right\} + tc\right\}.$$

Taikydami indukuotą komonotonišką suderintąjį rizikos matą konstantą c pasirinkome atsižvelgdami į baudos funkcijas, t.y. c reikšmė yra šiek tiek didesnė už mažiausią baudos funkcijos reikšmę.

Norėdami palyginti gautus rizikos matus, apskaičiavome absoliučius ir santykinius skirtumus tarp visų trijų rizikos matų, o rezultatus pateikėme 3 lentelėje.

$\rho(\hat{r})$	$\pi(\hat{r})$	$\rho_{\pi,c}(\hat{r})$, $c = 0{,}0109448$
0,1560840	0,1436592	0,1545952

2 lentelė: Komonotoniški rizikos matai.

	$\rho(\hat{r})$ ir $\pi(\hat{r})$	$\rho(\hat{r})$ ir $\rho_{\pi,c}(\hat{r})$	$\pi(\hat{r})$ ir $\rho_{\pi,c}(\hat{r})$
Absoliutus skirtumas	0,0124249	0,0014888	0,0109360
Santykinis skirtumas	8,65%	0,96%	7,61%

3 lentelė: Komonotoniškų rizikos matų palyginimas.

Pagal gautus rezultatus matome, jog komonotoniškas suderintasis ir indukuotas komonotoniškas suderintasis rizikos matai riziką vertina labai panašiai, o pagal komonotonišką iškilųjį rizikos matą papildomo kapitalo reikalavimas yra žymiai mažesnis. Taip yra dėl to, jog komonotoniškas iškilusis rizikos matas atsižvelgia į baudos funkciją, kuri gali būti interpretuojama kaip tikėtini nuostoliai, kuriuos galima patirti net ir tada, kai pozicija yra priimtina priežiūros institucijų atžvilgiu.

Remdamiesi 4.2 skyrelyje pateikta interpretacija bei gautais komonotoniškų rizikos matų rezultatais, taip pat galime įvertinti likvidumo riziką. Pritaikę (9) išraišką, gauname, jog mūsų nagrinėjamu atveju likvidumo rizika yra 0,0807157. Tačiau svarbu nepamiršti, jog atlikdami skaičiavimus svorių rinkinius bei baudos funkciją pasirinkome laisvai, o tai turi įtakos gautiems rezultatams.

6 Išvados

Magistro baigiamajame darbe yra aprašytas aibių bei vektorių komonotoniškumas, apžvelgtos pagrindinės rizikos matų klasės: suderintieji ir iškilieji rizikos matai bei komonotoniški suderintieji ir komonotoniški iškilieji rizikos matai. Darbe šiek tiek plačiau nagrinėjamas ryšys tarp komonotoniškų suderintųjų bei komonotoniškų iškilųjų rizikos matų ir suformuluota bei įrodyta teorema, kuria remiantis, komonotoniški iškilieji rizikos matai gali būti charakterizuojami komonotoniškų suderintųjų rizikos matų šeima, o tuo pačiu komonotoniškas suderintasis rizikos matas gali būti išreiškiamas per komonotonišką iškilųjį rizikos matą.

Praktinėje dalyje pateikiamas pavyzdys, kaip būtų galima pritaikyti komonotonišką suderintąjį, komonotonišką iškilųjį ir indukuotą komonotonišką suderintąjį rizikos matą realiems rinkoms duomenims. Palyginę gautus rezultatus pastebėjome, jog mažiausias papildomo kapitalo reikalavimas yra gaunamas taikant komonotonišką iškilųjį rizikos matą, o komonotoniški suderintieji ir indukuoti komonotoniški suderintieji rizikos matai riziką vertina panašiai. Tačiau svarbu atsižvelgti į tai, jog gauti rezultatai priklauso nuo baudos funkcijos, kurią pasirinkome laisvai.

Ateityje šiame darbe pateiktą informaciją būtų galima panaudoti indukuoto komonotoniško suderintojo rizikos mato reprezentacinės teoremos suformulavimui ir įrodymui bei skaičiavimams patogesnės formulės išvedimui. Taip pat pasirinkus konkretų komonotonišką iškilųjį rizikos matą, jį būtų galima pritaikyti indukuoto komonotoniško suderintojo rizikos mato skaičiavimui realiems duomenims.

Literatūra

[1] Apostolik R., Donohue C., *Foundations of Financial Risk: An Overview of Financial Risk and Risk-based Financial Regulation*, Hoboken: John Wiley & Sons, 2015, p. 16–27.

[2] Artzner P., Delbaen F., Eber J., Heath D., Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance* [interaktyvus], 1999, vol. 9, issue 3, p. 203–228. Prieiga per internetą: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/1467-9965.00068>. [žiūrėta 2019 m. spalio 11 d.]

[3] Assa H., Natural risk measures, *Mathematics And Financial Economics* [interaktyvus], 2016, vol. 10, issue 4, p. 441–456. Prieiga per internetą: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11579-016-0165-9>. [žiūrėta 2019 m. lapkričio 15 d.]

[4] Balbás A., Garrido J., Mayoral S., Properties of Distortion Risk Measures, *Methodology And Computing In Applied Probability* [interaktyvus], 2009, vol. 11, p. 385–399. Prieiga per internetą: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11009-008-9089-z>. [žiūrėta 2019 m. spalio 25 d.]

[5] Bertsekas D., *Convex optimization theory*, Nashua (New Hampshire): Athena Scientific, 2009, p. 5–11.

[6] Boyd S., Vandenberghe L., *Convex optimization*, Cambridge: Cambridge University Press, 2004, p. 90–95.

[7] Chen Z., Hu Q., On Coherent Risk Measures Induced by Convex Risk Measures, *Methodology And Computing In Applied Probability* [interaktyvus], 2018, vol. 20, issue 2, p. 673–698. Prieiga per internetą: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11009-017-9584-1>. [žiūrėta 2019 m. rugsėjo 18 d.]

[8] Dhaene J., Denuit M., Goovaerts M. J., Kaas R., Vyncke D., The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory, *Insurance: Mathematics And Economics* [interaktyvus], 2002, vol. 31, issue 1, p. 3–33. Prieiga per internetą: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167668702001348>. [žiūrėta 2019 m. rugsėjo 23 d.]

[9] Dhaene J., Kukush A., Linders D., Comonotonic asset prices in arbitrage-free markets, *Journal Of Computational And Applied Mathematics* [interaktyvus], 2020, vol. 364,

Article 112310. Prieiga per internetą: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042719303073>. [žiūrėta 2019 m. lapkričio 12 d.]

[10] Dowd K., *Measuring Market Risk*, 2nd ed., Chichester: John Wiley & Sons, 2005, p. 32–44.

[11] Föllmer H., Schied A., Convex measures of risk and trading constraints, *Finance And Stochastics* [interaktyvus], 2002, vol. 6, issue 4, p. 429–447. Prieiga per internetą: <https://link.springer.com/article/10.1007/s007800200072>. [žiūrėta 2019 m. spalio 11 d.]

[12] Heyde C. C., Kou S. G., Peng X. H., What Is a Good External Risk Measure: Bridging the Gaps between Robustness, Subadditivity, and Insurance Risk Measures [interaktyvus], 2007. Prieiga per internetą: <https://pdfs.semanticscholar.org/a4e0/8c66fac3c66e30db920a3f03fae830c1abb1.pdf>. [žiūrėta 2019 m. lapkričio 5 d.]

[13] Howes N. R., *Modern Analysis and Topology*, New York: Springer-Verlag New York, 1995, p. 258.

[14] Pinikaitė R., *„Geri“ rizikos matai finansuose: Magistro darbas*, Vilnius: Vilniaus universitetas, 2019.

[15] Población García F. J., *Financial Risk Management: Identification, Measurement and Management*, Cham: Palgrave Macmillan, 2017, p. 3–38.

[16] Roccioletti S., *Backtesting Value at Risk and Expected Shortfall*, Wiesbaden: Springer Gabler, 2016, p. 19–23.

[17] Tian D., Suo X., A note on convex risk statistic, *Operations Research Letters* [interaktyvus], 2012, vol. 40, issue 6, p. 551–553. Prieiga per internetą: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167637712001253>. [žiūrėta 2019 m. lapkričio 17 d.]

A Priedas

A.1 Funkcijų uždarumas ir pustolydumas [5], [13]

A.1.1 Apibrėžimas. Funkcijos $f : X \to \mathbb{R}$, kur $X \subset \mathbb{R}^n$, epigrafu yra vadinama aibė

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, \omega) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \omega\}.$$

A.1.2 Apibrėžimas. Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, kur $X \subset \mathbb{R}^n$, yra vadinama uždara, jei epi(f) yra uždara aibė.

A.1.3 Apibrėžimas. Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, kur $X \subset \mathbb{R}^n$, yra pustolydė iš apačios taške $x \in X$, jeigu

$$f(x) \leq \liminf_{k \to +\infty} f(x_k)$$

bet kokiai sekai $\{x_k\} \subset X$, $x_k \to x$.

Funkcija f yra pustolydė iš apačios, jei ji yra pustolydė iš apačios kiekviename taške $x \in X$. Funkcija f yra pustolydė iš viršaus, jei $-f$ yra pustolydė iš apačios.

Pastaba. Funkcija f yra tolydi tada ir tik tada, jeigu ji yra pustolydė iš apačios ir pustolydė iš viršaus [13].

A.1.1 Teiginys ([5]). *Funkcijai $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ žemiau esantys teiginiai yra ekvivalentūs:*

- *Aibė $V_\gamma = \{x \mid f(x) \leq \gamma\}$ yra uždara bet kokiam skaliarui γ.*
- *f yra pustolydė iš apačios.*
- *epi(f) yra uždara aibė.*

A.2 Jungtinė funkcija [6]

A.2.1 Apibrėžimas. Funkcijos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jungtinė funkcija $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yra apibėžiama kaip

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ x^T y - f(x) \right\}, \ y \in \mathbb{R}^n.$$

Jungtinių funkcijų savybės:

- $f^*(y) + f(x) \geq x^T y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
- Jungtinės funkcijos jungtinė funkcija:
  Jeigu funkcija f yra iškila ir uždara, tai $f^{**} = f$.

B Priedas. R programos kodai

B.1 Istorinių kainų kitimo grafikas

Kintamajam priskiriame istorinius NFLX kompanijos akcijų duomenis: datas ir kainas. Istoriniai duomenys paimti iš Yahoo Finance duomenų bazės.

```
library(tidyquant)
library(timetk)
netflix <- tq_get("NFLX",
                  from = "2014-12-01",
                  to = "2019-12-01",
                  get = "stock.prices")
```

Pasinaudoję „ggplot2“ paketu, nubraižome grafiką.

```
library(ggplot2)
ggplot(netflix, aes(x = date, y = adjusted)) +
  geom_line() +
  ggtitle("Netflix") +
  theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5)) +
  scale_x_date(date_breaks = "years", date_labels = "%Y") +
  labs(x = "Data", y = "Akcijų kaina")
```

B.2 Akcijų grąžų grafikas

Apskaičiuojame kiekvienos dienos NFLX akcijų grąžas ir nubraižome grafiką.

```
netflix_daily_returns <-
  tq_transmute(netflix,
               select = adjusted,
               mutate_fun = periodReturn,
               period = "daily",
               col_rename = "daily")

ggplot(netflix_daily_returns, aes(date, daily)) +
  geom_line(color = "deepskyblue4") +
  ggtitle("Netflix akcijų grąža") +
  xlab("Data") + ylab("Kiekvienos dienos grąža") +
  theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5)) +
  scale_x_date(date_breaks = "years", date_labels = "%Y") +
  scale_y_continuous(breaks = seq(-0.5,0.6,0.05),
                     labels = scales::percent)
```