VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

DISKONTUOTAS BANKROTO LAIKAS TRIJŲ SEZONŲ RIZIKOS MODELYJE

DISCOUNTED RUIN TIME IN THREE-SEASONAL DISCRETE TIME RISK MODEL

Asta Bilaišytė

VILNIUS 2020

Matematinės analizės katedra

Darbo vadovas Prof. Dr. (HP) Jonas Šiaulys

Darbo recenzentas ______________________________

Darbas apgintas ____________

Darbas įvertintas ____________

Registravimo NR. ____________

Atidavimo į katedrą data _________________

Diskontuotas bankroto laikas trijų sezonų rizikos modelyje

Santrauka

Šiame darbe nagrinėjamas nehomogeninis diskretaus laiko rizikos modelis. Laikome, kad žalos kartojasi kas tris laiko vienetus, t.y. žalų skirstinys sutampa laiko momentais $\{1, 4, 7, \dots\}$, taip pat laiko momentais $\{2, 5, 8, \dots\}$ ir $\{3, 6, 9, \dots\}$. Darbe yra rastas algoritmas atskiro Gerber-Shiu funkcijos atvejo tiksliems reikšmėms skaičiuoti. Atskiru atveju Gerber-Shiu funkcija turi pavidalą $\psi_\delta = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\delta T}\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\right)$, čia T bankroto laikas, o δ yra neneigiama palūkanų galia. Gautas algoritmas ir teoriniai rezultatai iliustruojami skaitiniais pavyzdžiais.

Raktiniai žodžiai: nehomogeninis modelis, trijų sezonų modelis, Gerber-Shiu funkcija, bankroto laikas.

Discounted Ruin Time in Three-Seasonal Discrete Time Risk Model

Abstract

In this work, a nonhomogeneus discrete time risk model is considered. We assume that claims repeat every three time units, i.e. claims distributions coincide at times $\{1, 4, 7, \dots\}$, at times $\{2, 5, 8, \dots\}$ as well as $\{3, 6, 9, \dots\}$. An algorithm for calculating the exact values of a separate case of Gerber-Shiu function is found in this work. In a separate case, Gerber-Shiu function has the form $\psi_\delta = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\delta T}\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\right)$, where T is the time of ruin and δ is a nonnegative force of interest. Proposed algorithm and theoretical results are illustrated by numerical examples.

Key words: nonhomogeneous model, three-seasonal model, Gerber-Shiu function, ruin time.

Turinys

1 Įvadas

Nuo devinto dešimtmečio pradžios smarkiai išaugo susidomėjimas rizikos teorija. Imta tyrinėti įvairių dydžių rekursinius sąryšius, kurti jų skaičiavimo algoritmus, bandyti juos įvertinti. Pagrindinės tiriamos modelių charakteristikos yra bankroto laikas, baigtinio ar begalinio laiko bankroto tikimybė, turtas prieš įvykstant bankrotui bei kapitalo trūkumas bankroto metu.

Vienas iš rizikos teorijoje nagrinėjamų modelių yra diskretaus laiko rizikos modelis skirtas analizuoti draudiko turto kitimą laike. Modelyje laikomasi prielaidos, kad kiekvienu laiko momentu draudiko turtas priklauso nuo pradinio kapitalo, gaunamų įmokų ir patiriamų žalų. Įprasta modelyje laikytis prielaidos, kad draudiko patiriamos žalos yra nepriklausomos ir vienodai pasiskirsčiusios. Tokį modelį plačiai nagrinėjo Dickson [9], Pichard ir Lefèvre [16], Shiu [17], Leipus ir Šiaulys [13] ir kt.

Plačiai išnagrinėjus modelį su vienodai pasiskirsčiusiomis žalomis natūraliai imta ieškoti apibendrinimų, kadangi vienodai pasiskirsčiusių žalų prielaida yra dažnai netenkinama net ir nagrinėjant trumpą laikotarpį. Vienas iš akivaizdžių apibendrinimų – modelis su vis dar nepriklausomomis, bet nevienodai pasiskirsčiusiomis žalomis. Tokį modelį vadinsime nehomogeniniu rizikos modeliu. Įvairius sąryšius, savybes, rekursines formules bankroto tikimybėms skaičiuoti nehomogeniniame modelyje išvedė DeVylder ir Goovaerts [8], Blaževičius ir kt.[4], Castañer ir kt. [5], Lefèvre ir Pichard [12]. Modelius su sezoniškomis žalomis nagrinėjo Damarackas ir Šiaulys [7], Grigutis ir kt. [11].

Gerber ir Shiu 1998 metais [10] darbe pasiūlė riziką vertinti ne per bankroto tikimybę, o analizuoti diskontuotą baudos funkciją ψ_δ, kuri rodo dabartinę būsimų nuostolių vertę. Po to, kai buvo pristatyta ši funkcija, pavadinta autorių Gerber-Shiu vardu, imta plačiai nagrinėti jos savybes skirtingiems rizikos modeliams. Gerber-Shiu funkcijos savybes diskretaus laiko rizikos modelyje nagrinėjo Bao ir Liu [2], Cheng ir kt. [6], Li ir Wu [14], Bieliauskienė ir Šiaulys [3] ir kiti. Rekursinė formulė Gerber-Shiu funkcijos reikšmių skaičiavimui dviejų sezonų modeliui buvo pristatyta Navickienės ir kt. [15].

Šiame darbe nagrinėsime atskirą Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos atvejį trijų sezonų diskretaus laiko rizikos modeliui. Antrame skyriuje apibrėšime pagrindines sąvokas ir žymėjimus. Trečiame skyriuje pristatysime gautus rezultatus, išvesime rekursinę lygybę šios funkcijos reikšmėms rasti. Ketvirtame skyriuje naudojantis gautais rezultatais, sudarysime algoritmą ir apskaičiuosime Gerber-Shiu funkcijos reikšmes keliems atskiriems pavyzdžiams. Pagrindiniai šio darbo rezultatai remiasi idėjomis iš Navickienės ir kt.[15] bei Grigučio ir kt. [11] straipsnių.

2 Sąvokos ir apibrėžimai

Diskretaus laiko rizikos modelis – tai paprasčiausias draudimo rizikos modelis, aprašantis draudiko kapitalo kitimą bėgant laikui.

Apibrėžimas 2.1. Sakysime, kad draudiko turtas W_u kinta pagal trijų sezonų diskretaus laiko rizikos modelį, jei bet kuriam $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$W_u(n) = u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

ir tenkinami šie apribojimai:

- pradinis draudiko turtas yra neneigiamas sveikasis skaičius, t.y. $u \in \mathbb{N}_0$;
- žalos $\{Z_1, Z_2, Z_3, \ldots\}$ yra neneigiami sveikareikšmiai nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai;
- egzistuoja atsitiktiniai dydžiai X, Y ir H tokie, kad $Z_{3k+1} \stackrel{d}{=} X$, $Z_{3k+2} \stackrel{d}{=} Y$ ir $Z_{3k+3} \stackrel{d}{=} H$ kiekvienam $k \in \mathbb{N}_0$.

Jeigu $X \stackrel{d}{=} Y \stackrel{d}{=} H$, tada nagrinėjamas trijų sezonų modelis yra įprastas homogeninis diskretaus laiko rizikos modelis. Iš trijų sezonų modelio dviejų sezonų modelio paprastai gauti negalime.

Kiekvienu laiko momentu draudiko turtas kinta, todėl svarbu įvertinti, kada turtas pasieks nulį ar taps neigiamas, t.y. įvyks bankrotas.

Apibrėžimas 2.2. Bankroto laikas T_u – tai laiko momentas n, kai draudiko turtas $W_u(n)$ pirmą kartą pasiekė nulį arba tapo neigiamas, t.y.

$$T_u = \begin{cases} \min\{n \geqslant 1 : W_u(n) \leqslant 0\} \\ \infty, \text{ jeigu } W_u(n) > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Viena iš pagrindinių bet kokio rizikos modelio charakteristikų yra banktoto tikimybė.

Apibrėžimas 2.3. Bet kokiam $u \in \mathbb{N}_0$ ir bet kokiam laiko momentui $T \in \mathbb{N}$

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(T_u \leqslant T)$$

vadinama diskretaus laiko rizikos modelio baigtinio laiko bankroto tikimybe.

Bet kokiam $u \in \mathbb{N}_0$

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T_u < \infty)$$

vadinama begalinio laiko bankroto tikimybe.

Gerber ir Shiu 1998 metais [10] pasiūlė riziką vertinti ne per bankroto tikimybę, o analizuoti diskontuotą baudos funkciją, kuri rodo dabartinę būsimų nuostolių vertę.

Apibrėžimas 2.4. Remiantis apibrėžimu, pateiktu Gerber ir Shiu [10], diskretaus laiko rizikos modeliui baudos funkcija nusakoma lygybe

$$\psi_{\delta,w}(u) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\delta T_u} w(W_u(T_u - 1), |W_u(T_u)|)\mathbb{1}_{\{T_u<\infty\}}\right),$$

čia $\delta \geqslant 0$ yra palūkanų galia, $w(x, y)$ dviejų neneigiamų argumentų funkcija, o T_u – bankroto laikas.

Šiame darbe nagrinėsime atvejį, kai $w(x, y) = 1$ visiems neneigiamiems x ir y, tada

$$\psi_\delta(u) = \psi_{\delta,1}(u) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\delta T_u}\mathbb{1}_{\{T_u<\infty\}}\right).$$

Taip pat pastebime, jei $\delta = 0$, tada Gerber-Shiu funkcija yra lygi banktoto tikimybei, t.y.

$$\psi(u) = \psi_0(u) = \mathbb{P}(T_u < \infty).$$

Nagrinėjame trijų sezonų diskretaus laiko rizikos modelį generuotą atsitiktinių dydžių X, Y ir H. Kiekvienam $k \in \mathbb{N}_0$ pažymime

$$x_k = \mathbb{P}(X = k), \quad y_k = \mathbb{P}(Y = k), \quad h_k = \mathbb{P}(H = k),$$
$$r_k = \mathbb{P}(R = k) = \mathbb{P}(X + Y = k), \quad q_k = \mathbb{P}(Q = k) = \mathbb{P}(X + Y + H = k)$$

atsitiktinių dydžių X, Y, H, $R = X + Y$ ir $Q = X + Y + H$ lokalias tikimybes. Atitinkamai kiekvienam $u \in \mathbb{R}$ apibrėžiame šių atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijas

$$F_X(u) = \mathbb{P}(X \leqslant u) = \sum_{k=0}^{\lfloor u\rfloor} x_k,\ F_Y(u) = \mathbb{P}(Y \leqslant u) = \sum_{k=0}^{\lfloor u\rfloor} y_k,\ F_H(u) = \mathbb{P}(H \leqslant u) = \sum_{k=0}^{\lfloor u\rfloor} h_k,$$
$$F_R(u) = \mathbb{P}(R \leqslant u) = \sum_{k=0}^{\lfloor u\rfloor} r_k,\ F_Q(u) = \mathbb{P}(Q \leqslant u) = \sum_{k=0}^{\lfloor u\rfloor} q_k.$$

3 Pagrindiniai rezultatai

Šiame skirsnyje suformuluoti teiginiai, leidžiantys suskaičiuoti funkcijos $\psi_\delta(u)$ reikšmes trijų sezonų diskretaus laiko rizikos modelyje, bei pateikiami jų įrodymai.

Teiginys 3.1. *Tegul dviejų sezonų diskretaus laiko rizikos modelį generuoja trys neneigiami nepriklausomi sveikieji atsitiktiniai dydžiai X, Y ir H. Jeigu $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y + \mathbb{E}H < 3$, tada $\lim_{u\to\infty} \psi_\delta(u) = 0$ bet kokiam fiksuotam $\delta \geqslant 0$. Be to, jei max$\{\mathbb{E}\mathrm{e}^{\Delta X}, \mathbb{E}\mathrm{e}^{\Delta Y}, \mathbb{E}\mathrm{e}^{\Delta H}\} < \infty$ kažkokiam $\Delta > 0$ tada $\sum_{l=0}^{\infty} \psi_\delta(l) < \infty$ kiekvienam fiksuotam $\delta \geqslant 0$.*

Įrodymas. Remiantis 4 teorema iš [11] turime, kad

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0.$$

Todėl ir $\lim_{u\to\infty} \psi_\delta(u) = 0$ bet kokiam fiksuotam $\delta \geqslant 0$, nes $0 \leqslant \psi_\delta(u) \leqslant \psi(u)$ visiems $\delta, u \geqslant 0$. Toliau pažymėkime $\eta_i = Z_i - 1, \forall i \in \mathbb{N}$. Iš sąlygos išplaukia, kad

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\Delta\eta_i}\right) = \max\{\mathbb{E}\mathrm{e}^{\Delta X}, \mathbb{E}\mathrm{e}^{\Delta Y}, \mathbb{E}\mathrm{e}^{\Delta H}\} < \infty,$$

Taip pat

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(|\eta_i| \mathbb{1}_{\{\eta_i \leqslant -u\}}\right) \\
&= \lim_{u\to\infty} \max\{\mathbb{E}\left((1-X)\mathbb{1}_{\{X\leqslant 1-u\}}\right), \mathbb{E}\left((1-Y)\mathbb{1}_{\{Y\leqslant 1-u\}}\right), \mathbb{E}\left((1-H)\mathbb{1}_{\{H\leqslant 1-u\}}\right)\} = 0
\end{aligned}$$

ir

$$\lim_{u\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\eta_i = \frac{\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y + \mathbb{E}H - 3}{3} < 0.$$

Remiantis 1 lema iš [1] turime

$$\psi_\delta(u) \leqslant \psi(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{k\geqslant 1} \sum_{i=1}^{k} \eta_i > u\right) \leqslant c_1 \mathrm{e}^{-c_2 u}, \quad u \geqslant 0, \quad c_1 \text{ ir } c_2 \text{ teigiamos konstantos.}$$

Todėl bet kuriam $\delta \geqslant 0$ turime

$$\sum_{l=0}^{\infty} \psi_\delta(l) \leqslant c_1 \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-c_2 l} < \infty.$$

$\triangle$

Teiginys 3.2. *Tarkime, tenkinamos visos teiginio 3.1 sąlygos. Laikykime, kad $\delta > 0$ ir ψ_δ žymi Gerber-Shiu funkcją su $w(x,y) = 1$ visiems neneigiamiems x ir y. Taip pat, pažymėkime $S_\delta := \sum_{l=0}^{\infty} \psi_\delta(l)$. Jei $q_0 = \mathbb{P}(X+Y+H=0) > 0$, tai*

$$\psi_\delta(n) = a_n \psi_\delta(0) + b_n \psi_\delta(1) + c_n S_\delta + d_n \tag{1}$$

kiekvienam $n \in \mathbb{N}_0$, kur a_n, b_n, c_n ir d_n yra realiųjų skaičių sekos apibrėžtos rekursiškai pagal šias lygtis:

$$\begin{aligned}
&a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{y_0 h_0},\\
&a_n = \frac{1}{q_0}\left(\mathrm{e}^{3\delta} a_{n-3} - \sum_{l=1}^{n-2} q_l a_{n-l} - x_{n-2}\right), \quad n \in \{3,4,\dots\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{1}{h_0}\left(x_0 h_1 - h_1 - \frac{1}{y_0}\right),\\
&b_n = \frac{1}{q_0}\left(\mathrm{e}^{3\delta} b_{n-3} - \sum_{l=1}^{n-2} q_l b_{n-l} - x_{n-2}(1 - x_0 y_0 h_1)\right), \quad n \in \{3,4,\dots\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{y_0 h_0}(1 - \mathrm{e}^{3\delta}),\\
&c_n = \frac{1}{q_0}\left(\mathrm{e}^{3\delta} c_{n-3} - \sum_{l=1}^{n-2} q_l c_{n-l} + x_{n-2}(1 - \mathrm{e}^{3\delta})\right), \quad n \in \{3,4,\dots\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&d_0 = 0, \quad d_1 = 0,\\
&d_2 = \frac{1}{y_0 h_0}(\mathrm{e}^{2\delta}\mathbb{E}X + \mathrm{e}^{\delta}(\mathbb{E}Y - 1 + y_0) + \mathbb{E}H + h_0 - 1 - y_0(1 - h_0 - h_1)),\\
&d_n = \frac{1}{q_0}\Bigg(\mathrm{e}^{3\delta} d_{n-3} - \mathrm{e}^{2\delta}\overline{F}_X(n-3) - \mathrm{e}^{\delta}\sum_{l=0}^{n-3} x_l \overline{F}_Y(n-2-l) - \sum_{l=0}^{n-3} r_l \overline{F}_H(n-1-l)\\
&\quad - \sum_{l=1}^{n-2} q_l d_{n-l} + x_{n-2}(\mathrm{e}^{2\delta}\mathbb{E}X + \mathrm{e}^{\delta}(\mathbb{E}Y - 1 + y_0) + \mathbb{E}H + h_0 - 1)\\
&\quad - r_{n-2}(1 - h_0 - h_1)\Bigg), \quad n \in \{3,4,\dots\}.
\end{aligned}$$

Įrodymas. Tarkime, kad $\delta > 0$ ir $u \in \mathbb{N}_0$. Pagal funkcijos ψ_δ apibrėžimą turime

$$\begin{aligned}
\psi_\delta(u) &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\delta T_u}\mathbb{1}_{\{T_u<\infty\}}\right)\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-\delta m}\mathbb{1}_{\{T_u=m\}}\right)\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\delta m}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}Z_i < u+n, n\in\{1,2,...,m-1\} \text{ ir} \sum_{i=1}^{m}Z_i \geqslant m+u\right)\\
&= \mathrm{e}^{-\delta}\mathbb{P}(Z_1 \geqslant 1+u) + \mathrm{e}^{-2\delta}\mathbb{P}(Z_1 < 1+u,\, Z_1+Z_2 \geqslant 2+u)\\
&+ \mathrm{e}^{-3\delta}\mathbb{P}(Z_1 < 1+u,\, Z_1+Z_2 < 2+u,\, Z_1+Z_2+Z_3 \geqslant 3+u)\\
&+ \sum_{m=4}^{\infty}\mathrm{e}^{-\delta m}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}Z_i < u+n,\, n\in\{1,2,...,m-1\} \text{ ir} \sum_{i=1}^{m}Z_i \geqslant m+u\right).
\end{aligned}$$

Kadangi $X \stackrel{d}{=} Z_1 \stackrel{d}{=} Z_4 \stackrel{d}{=} Z_7 \stackrel{d}{=} \dots$, $Y \stackrel{d}{=} Z_2 \stackrel{d}{=} Z_5 \stackrel{d}{=} Z_8 \stackrel{d}{=} \dots$ ir $H \stackrel{d}{=} Z_3 \stackrel{d}{=} Z_6 \stackrel{d}{=} Z_9 \stackrel{d}{=} \dots$, gauname

$$\begin{aligned}
\psi_\delta(u) &= \mathrm{e}^{-\delta}\sum_{l\geqslant 1+u}x_l + \mathrm{e}^{-2\delta}\sum_{l\leqslant u}\sum_{k\geqslant 2+u-l}x_l y_k + \mathrm{e}^{-3\delta}\sum_{l\leqslant u}\sum_{k\leqslant 1+u-l}\sum_{j\geqslant 3+u-k-l}x_l y_k h_j\\
&+ \sum_{m=4}^{\infty}\mathrm{e}^{-\delta m}\mathbb{P}\Big(Z_1 \leqslant u,\, Z_1+Z_2 \leqslant 1+u,\, Z_1+Z_2+Z_3 \leqslant 2+u,\\
&Z_1+Z_2+Z_3+\sum_{i=4}^{n}Z_i < u+n,\, n\in\{4,\dots,m-1\}\\
&\text{ ir } Z_1+Z_2+Z_3+\sum_{i=4}^{m} \geqslant m+u\Big)\\
&= \mathrm{e}^{-\delta}\overline{F}_X(u) + \mathrm{e}^{-2\delta}\sum_{l=0}^{u}x_l\overline{F}_Y(1+u-l) + \mathrm{e}^{-3\delta}\sum_{l=0}^{u}\sum_{k=0}^{1+u-l}x_l y_k\overline{F}_H(2+u-k-l)\\
&+ \sum_{l=0}^{u}\sum_{k=0}^{1+u-l}\sum_{j=0}^{2+u-l-k}x_l y_k h_j\sum_{m=4}^{\infty}\mathrm{e}^{-\delta m}\mathbb{P}\Big(\sum_{i=4}^{n}Z_i < n+u-l-k-j,\\
&n\in\{4,\dots,m-1\} \text{ ir}\sum_{i=4}^{m}Z_i \geqslant m+u-l-k-j\Big)\\
&= \mathrm{e}^{-\delta}\overline{F}_X(u) + \mathrm{e}^{-2\delta}\sum_{l=0}^{u}x_l\overline{F}_Y(1+u-l) + \mathrm{e}^{-3\delta}\sum_{l=0}^{u}\sum_{k=0}^{1+u-l}x_l y_k\overline{F}_H(2+u-k-l)\\
&+ \mathrm{e}^{-3\delta}\sum_{l=0}^{u}\sum_{k=0}^{1+u-l}\sum_{j=0}^{2+u-l-k}x_l y_k h_j\psi_\delta(3+u-l-k-j). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Kiekvienam $m \in \mathbb{N}_0$ pažymime

$$r_m = \mathbb{P}(R=m) = \mathbb{P}(X+Y=m) = \sum_{l=0}^{m}x_l y_{m-l}$$

ir

$$q_m = \mathbb{P}(Q=m) = \mathbb{P}(X+Y+H=m) = \sum_{l=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-l} x_l y_j h_{m-l-j}.$$

Priešpaskutinę sumą (2) lygybėje galima perrašyti tokiu būdu

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{u+1}\sum_{k=0}^{1+u-l} x_l y_k \overline{F}_H(2+u-(k+l)) - x_{u+1}y_0\overline{F}_H(1)\\
&\quad= \sum_{l=0}^{u+1} r_l \overline{F}_H(2+u-l) - x_{u+1}y_0\overline{F}_H(1)\\
&\quad= \sum_{l=0}^{u} r_l \overline{F}_H(2+u-l) + r_{u+1}\overline{F}_H(1) - x_{u+1}y_0\overline{F}_H(1).
\end{aligned} \tag{3}$$

Tuo tarpu paskutinė suma (2) lygybėje gali būti perrašyta taip

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{u+1}\sum_{k=0}^{1+u-l}\sum_{j=0}^{2+u-l-k} x_l y_k h_j \psi_\delta(3+u-(l+k+j)) - (x_{u+1}y_0h_0\psi_\delta(2) + x_{u+1}y_0h_1\psi_\delta(1))\\
&\quad= \sum_{l=0}^{u+1} q_l\psi_\delta(3+u-l) - (x_{u+1}y_0h_0\psi_\delta(2) + x_{u+1}y_0h_1\psi_\delta(1))\\
&\quad= \sum_{l=0}^{u} q_l\psi_\delta(3+u-l) + q_{u+1}\psi_\delta(2) - x_{u+1}y_0h_0\psi_\delta(2) - x_{u+1}y_0h_1\psi_\delta(1)).
\end{aligned} \tag{4}$$

Įstačius gautas (3) ir (4) išraiškas į (2) lygybę, gauname

$$\begin{aligned}
\psi_\delta(u) &= e^{-\delta}\overline{F}_X(u) + e^{-2\delta}\sum_{l=0}^{u} x_l\overline{F}_Y(1+u-l)\\
&\quad+ e^{-3\delta}\sum_{l=0}^{u} r_l\overline{F}_H(2+u-l) + e^{-3\delta}\sum_{l=0}^{u} q_l\psi_\delta(3+u-l)\\
&\quad+ e^{-3\delta}(r_{u+1}\overline{F}_H(1) - x_{u+1}y_0\overline{F}_H(1) + \psi_\delta(2)(q_{u+1} - x_{u+1}y_0h_0) - x_{u+1}y_0h_1\psi_\delta(1)).
\end{aligned} \tag{5}$$

Gautą lygybę sumuojame nuo $u=0$ iki $u=N\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{u=0}^{N}\psi_\delta(u) &= e^{-\delta}\sum_{u=0}^{N}\overline{F}_X(u) + e^{-2\delta}\sum_{u=0}^{N}\sum_{l=0}^{u} x_l\overline{F}_Y(1+u-l)\\
&\quad+ e^{-3\delta}\sum_{u=0}^{N}\sum_{l=0}^{u} r_l\overline{F}_H(2+u-l) + e^{-3\delta}\sum_{u=0}^{N}\sum_{l=0}^{u} q_l\psi_\delta(3+u-l)\\
&\quad+ e^{-3\delta}\Bigg(\overline{F}_H(1)\sum_{u=0}^{N} r_{u+1} - y_0\overline{F}_H(1)\sum_{u=0}^{N} x_{u+1} + \psi_\delta(2)\sum_{u=0}^{N} q_{u+1}\\
&\quad-y_0h_0\psi_\delta(2)\sum_{u=0}^{N} x_{u+1} - y_0h_1\psi_\delta(1)\sum_{u=0}^{N} x_{u+1}\Bigg).
\end{aligned} \tag{6}$$

Pastebime, kad pakeitę sumavimo tvarką turime

$$\sum_{u=0}^{N}\sum_{l=0}^{u} x_l \overline{F}_Y(1+u-l) = \sum_{u=1}^{N+1} \overline{F}_Y(u) F_X(N+1-u),$$
$$\sum_{u=0}^{N}\sum_{l=0}^{u} r_l \overline{F}_H(2+u-l) = \sum_{u=2}^{N+2} \overline{F}_H(u) F_R(N+2-u),$$
$$\sum_{u=0}^{N}\sum_{l=0}^{u} q_l \psi_\delta(3+u-l) = \sum_{u=3}^{N+3} \psi_\delta(u) F_Q(N+3-u).$$

Vadinasi, įstačius gautas išraiškas į (6) ir sutraukus panašius narius, gauname

$$\begin{aligned}
&\sum_{u=0}^{N+3} \psi_\delta(u)(1-e^{-3\delta}F_Q(N+3-u)) \\
&\quad = e^{-\delta}\sum_{u=0}^{N}\overline{F}_X(u) + e^{-2\delta}\sum_{u=1}^{N+1}\overline{F}_Y(u)F_X(N+1-u) \\
&\quad + e^{-3\delta}\sum_{u=2}^{N+2}\overline{F}_H(u)F_R(N+2-u) + e^{-3\delta}\Bigg(\overline{F}_H(1)\sum_{u=0}^{N} r_{u+1} - y_0\overline{F}_H(1)\sum_{u=0}^{N} x_{u+1} \\
&\quad + \psi_\delta(2)\sum_{u=0}^{N} q_{u+1} - y_0 h_0 \psi_\delta(2)\sum_{u=0}^{N} x_{u+1} - y_0 h_1 \psi_\delta(1)\sum_{u=0}^{N} x_{u+1}\Bigg) \\
&\quad - e^{-3\delta}\left(\psi_\delta(0)F_Q(N+3) + \psi_\delta(1)F_Q(N+2) + \psi_\delta(2)F_Q(N+1)\right) \\
&\quad + \psi_\delta(N+1) + \psi_\delta(N+2) + \psi_\delta(N+3).
\end{aligned} \tag{7}$$

Paskutinėje lygybėje pereiname prie ribos, kai $N \to \infty$. Akivaizdu, kad

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{u=0}^{N}\overline{F}_X(u) = \mathbb{E}X, \quad \lim_{N\to\infty} F_Q(N+3) = \lim_{N\to\infty} F_Q(N+2) = \lim_{N\to\infty} F_Q(N+1) = 1, \tag{8}$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{u=0}^{N} q_{u+1} = 1-q_0, \quad \lim_{N\to\infty}\sum_{u=0}^{N} x_{u+1} = 1-x_0, \quad \lim_{N\to\infty}\sum_{u=0}^{N} r_{u+1} = 1-r_0. \tag{9}$$

Iš 3.1 teiginio turime, kad

$$\lim_{N\to\infty}\psi_\delta(N+3) = \lim_{N\to\infty}\psi_\delta(N+2) = \lim_{N\to\infty}\psi_\delta(N+1) = 0. \tag{10}$$

Toliau nagrinėjame antrą narį iš (7) lygybės dešinės pusės. Aišku, kad

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{u=1}^{N+1}\overline{F}_Y(u)F_X(N+1-u) \leqslant \sum_{u=1}^{\infty}\overline{F}_Y(u).$$

Įvertinti iš kitos pusės imkime bet kokį $M \in \mathbb{N}$. Tada

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{u=1}^{N+1}\overline{F}_Y(u)F_X(N+1-u) \geqslant \lim_{N\to\infty} F_X(N+1-M)\sum_{u=1}^{M}\overline{F}_Y(u) = \sum_{u=1}^{M}\overline{F}_Y(u).$$

Taigi

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\sum_{u=1}^{N+1}\overline{F}_Y(u)F_X(N+1-u) &= \sum_{u=1}^{\infty}\overline{F}_Y(u) = y_2+2y_3+3y_4+\dots\\ &= y_1+2y_2+3y_3+4y_4+\dots\\ &- (y_1+y_2+y_3+y_4+\dots)\\ &= \mathbb{E}Y - 1 + y_0. \qquad (11)\end{aligned}$$

Analogiškai įvertiname trečią narį iš (7) lygybės dešinės pusės:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{u=2}^{N+2}\overline{F}_H(u)F_R(N+2-u) \leqslant \sum_{u=2}^{\infty}\overline{F}_H(u).$$

Iš kitos pusės imdami bet kokį $M \in \mathbb{N}$ gauname

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{u=2}^{N+2}\overline{F}_H(u)F_R(N+2-u) \geqslant \lim_{N\to\infty} F_R(N+2-M)\sum_{u=2}^{M}\overline{F}_H(u) = \sum_{u=2}^{M}\overline{F}_H(u).$$

Taigi

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\sum_{u=2}^{N+2}\overline{F}_H(u)F_R(N+2-u) &= \sum_{u=2}^{\infty}\overline{F}_H(u) = h_3+2h_4+3h_5+\dots\\ &= h_1+2h_2+3h_3+4h_4+\dots\\ &- (h_1+2h_2+2h_3+2h_4+\dots)\\ &= \mathbb{E}H + h_1 + 2h_0 - 2. \qquad (12)\end{aligned}$$

Liko išnagrinėti kairę (7) lygybės pusę. Pasinaudoję teiginiu 3.1 gauname

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{u=0}^{N+3}\psi_\delta(u) = S_\delta < \infty.$$

Taip pat ir

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{u=0}^{N+3}\psi_\delta(u)F_Q(N+3-u) \leqslant \sum_{u=0}^{\infty}\psi_\delta(u) = S_\delta < \infty.$$

Iš kitos pusės, imkime bet kokį $M \in \mathbb{N}$. Tada

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{u=0}^{N+3} \psi_\delta(u) F_Q(N+3-u) \geqslant \lim_{N\to\infty} F_Q(N+3-M) \sum_{u=0}^{M} \psi_\delta(u)$$

Todėl kairėje (7) lygybės pusėje gauname

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{u=0}^{N+3} \psi_\delta(u)(1-\mathrm{e}^{-3\delta} F_Q(N+3-u)) = (1-\mathrm{e}^{-3\delta}) S_\delta. \tag{13}$$

Taigi sustačius visas gautas (8)-(13) išraiškas į (7) lygybę gauname

$$\begin{aligned}(1-\mathrm{e}^{-3\delta})S_\delta &= \mathrm{e}^{-\delta}\mathbb{E}X + \mathrm{e}^{-2\delta}(\mathbb{E}Y - 1 + y_0) + \mathrm{e}^{-3\delta}(\mathbb{E}H + 2h_0 + h_1 - 2) \\ &\quad - \mathrm{e}^{-3\delta}\psi_\delta(2) y_0 h_0 - \mathrm{e}^{-3\delta}\psi_\delta(1)(y_0h_1 - x_0y_0h_1 + 1) - \mathrm{e}^{-3\delta}\psi_\delta(0) \\ &\quad + \mathrm{e}^{-3\delta}(1-h_0-h_1)(1-y_0). \end{aligned} \tag{14}$$

Pagal teiginio prielaidą nagrinėjame atvejį, kai $q_0 > 0$. Šiuo atveju $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ ir $h_0 \neq 0$. Iš (14) lygybės turime, kad

$$\begin{aligned}&\psi_\delta(2) = a_2\psi_\delta(0) + b_2\psi_\delta(1) + c_2 S_\delta + d_2, \text{ kur} \\ &a_2 = -\frac{1}{y_0h_0}, \quad b_2 = \frac{1}{h_0}\left(x_0h_1 - h_1 - \frac{1}{y_0}\right), \quad c_2 = \frac{1}{y_0h_0}(1-\mathrm{e}^{3\delta}), \\ &d_2 = \frac{1}{y_0h_0}(\mathrm{e}^{2\delta}\mathbb{E}X + \mathrm{e}^{\delta}(\mathbb{E}Y - 1 + y_0) + \mathbb{E}H + h_0 - 1 - y_0(1-h_0-h_1)).\end{aligned}$$

Taigi teiginio 3.2. (1) lygybė galioja, kai $n = 2$. Dabar indukcijos būdu įrodysime, kad tokia lygybė galioja visiems $n \in \mathbb{N}$. Tarkime, kad lygybė (1) galioja visiems $n \in \{0, 1, \ldots, K\}$ su apibrėžtomis sekomis a_n, b_n, c_n ir d_n. Pasinaudodami indukcijos hipoteze ir lygybe (5) su $u = K-1$, turime

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{3\delta}\psi_\delta(K-1) &= \mathrm{e}^{3\delta}(a_{K-1}\psi_\delta(0) + b_{K-1}\psi_\delta(1) + c_{K-1}S_\delta + d_{K-1}) \\ &= \mathrm{e}^{2\delta}\overline{F}_X(K-1) + \mathrm{e}^{\delta}\sum_{l=0}^{K-1} x_l \overline{F}_Y(K-l) + \sum_{l=0}^{K-1} r_l \overline{F}_H(K+1-l) \\ &\quad + q_0\psi_\delta(K+2) + \sum_{l=1}^{K-1} q_l\psi_\delta(K+2-l) + q_K\psi_\delta(2) - \psi_\delta(2)x_Ky_0h_0 \\ &\quad - \psi_\delta(1)x_Ky_0h_1 + r_K\overline{F}_H(1) - x_Ky_0\overline{F}_H(1).\end{aligned}$$

Taigi,

$$
\begin{aligned}
q_0\psi_\delta(K+2) = \psi_\delta(0)&\left(\mathrm{e}^{3\delta}a_{K-1} - \sum_{l=1}^{K} q_l a_{K+2-l} + a_2 x_K y_0 h_0\right)\\
&+\psi_\delta(1)\left(\mathrm{e}^{3\delta}b_{K-1} - \sum_{l=1}^{K} q_l b_{K+2-l} + b_2 x_K y_0 h_0 + x_K y_0 h_1\right)\\
&+S_\delta\left(\mathrm{e}^{3\delta}c_{K-1} - \sum_{l=1}^{K} q_l c_{K+2-l} + c_2 x_K y_0 h_0\right)\\
&+\Bigg(\mathrm{e}^{3\delta}d_{K-1} - \mathrm{e}^{2\delta}\overline{F}_X(K-1) - \mathrm{e}^{\delta}\sum_{l=0}^{K-1} x_l \overline{F}_Y(K-l)\\
&- \sum_{l=0}^{K-1} r_l \overline{F}_H(K+1-l) - \sum_{l=1}^{K} q_l d_{K+2-l} + d_2 x_K y_0 h_0 - \overline{F}_H(1)(r_K - x_K y_0)\Bigg)
\end{aligned}
$$

arba

$$
\psi_\delta(K+2) = a_{K+2}\psi_\delta(0) + b_{K+2}\psi_\delta(1) + c_{K+2}S_\delta + d_{K+2},
$$

kur $a_{K+2}, b_{K+2}, c_{K+2}$ ir d_{K+2} yra sekos apibrėžtos teiginio formuluotėje. Pagal indukcijos principą gauname, kad (1) lygybė teisinga visiems n. Teiginys 3.2 įrodytas.

$\triangle$

4 Funkcijos ψ_δ reikšmių skaičiavimas

Šiame skirsnyje aprašomas algoritmas funkcijos ψ_δ reikšmėms skaičiuoti nagrinėjamame trijų sezonų rizikos modelyje bei pateikiami skačiavimų pavyzdžiai. Visi skaičiavimai buvo atliekami *R* programa, naudojant padidinto skaičiavimų tikslumo paketą *Rmpfr*. Skaičiavimo algoritmas remiasi (2) formule iš teiginio 3.2 ir teiginio 3.1 rezultatais.

Tarkime, kad turime teigiamą palūkanų galią $\delta > 0$, o modelį generuoja trys nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X, Y ir H, kaip apibrėžta 2.1 apibrėžime, tenkinantys visas teiginio 3.2 sąlygas. Remiantis pagrindine lygybe (1) sudarome lygčių sistemą

$$
\begin{cases}
a_{N-K_1}\psi_\delta(0) + b_{N-K_1}\psi_\delta(1) + c_{N-K_1}S_\delta + d_{N-K_1} = \psi_\delta(N-K_1),\\
a_{N-K_2}\psi_\delta(0) + b_{N-K_2}\psi_\delta(1) + c_{N-K_2}S_\delta + d_{N-K_2} = \psi_\delta(N-K_2),\\
a_N\psi_\delta(0) + b_N\psi_\delta(1) + c_N S_\delta + d_N = \psi_\delta(N).
\end{cases}
$$

Kadangi remiantis teiginiu 3.1 $\psi_\delta(N-K_1)$, $\psi_\delta(N-K_2)$ ir $\psi_\delta(N)$ artėja į nulį, kai N artėja į begalybę, tai ankstesnę lygčių sistemą galime pakeisti artima lygčių sistema

$$\begin{cases} a_{N-K_1}\hat{\psi}_\delta(0)+b_{N-K_1}\hat{\psi}_\delta(1)+c_{N-K_1}\hat{S}_\delta+d_{N-K_1}=0, \\ a_{N-K_2}\hat{\psi}_\delta(0)+b_{N-K_2}\hat{\psi}_\delta(1)+c_{N-K_2}\hat{S}_\delta+d_{N-K_2}=0, \\ a_N\hat{\psi}_\delta(0)+b_N\hat{\psi}_\delta(1)+c_N\hat{S}_\delta+d_N=0. \end{cases} \tag{15}$$

Toliau pateikiame pavyzdžius. Visuose pavyzdžiuose nagrinėjama funkcija ψ_δ su trimis skirtingais parametrais $\delta \in \{0,005; 0,01; 0,1\}$. Gautos funkcijos ψ_δ reikšmės pateikiamos lentelėje su skirtingomis pradinio draudiko turto reikšmėmis $u \in \{0, 1, \ldots, 20\}$. Kadangi funkcija ψ_δ mažėja eksponentiškai, grafikuose pavaizduotos logaritmuotos funkcijos reikšmės. Toliau pateikti rezultatai gauti pasirinkus parametrus $N = 100$, $K_1 = 2$ ir $K_2 = 5$.

Pavyzdys 4.1. Tarkime, kad diskretaus laiko rizikos modelis generuojamas trijų nepriklausomų atsitiktinių dydžių X, Y ir H

X	0	1	2
$\mathbb{P}$	0,6	0,2	0,2

;

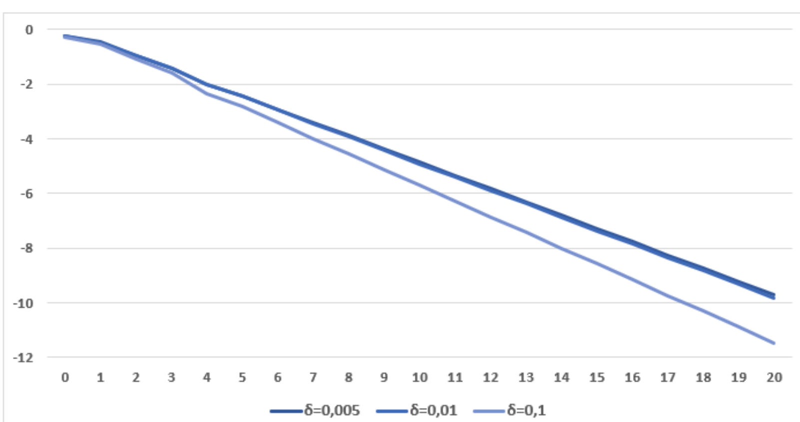
Y	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	0,5	0,2	0,2	0,1

;

H	0	1
$\mathbb{P}$	0,7	0,3

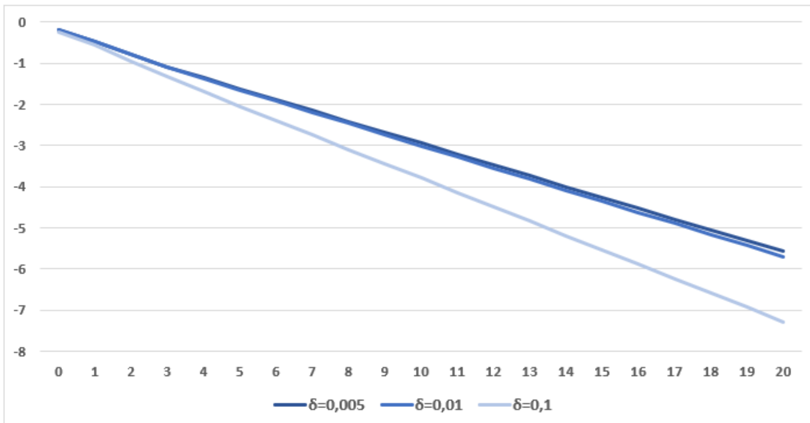
.

Įsitikiname, kad modelis tenkina visas teiginio 3.2 sąlygas, t.y. $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y + \mathbb{E}H = 1,8 < 3$ ir $q_0 \neq 0$. Sprendžiant lygčių sistemą (15) randame $\psi_\delta(u)$ reikšmes, kurios pateiktos lentelėje bei pavaizduotos grafike (1 pav).



1 pav.: $\log\psi_\delta$ reikšmės 4.1 pavyzdžio modeliui

Pavyzdys 4.2. Dabar tarkime, kad modelis generuojamas trijų atsitiktinių dydžių X, Y ir H pasiskirsčiusių pagal Puasono skirstinį su atitinkamais parametrais $\lambda_1 = 0,8, \lambda_2 = 0,5$ ir $\lambda_3 = 0,9$. Modelis tenkina visas teiginio 3.2 sąlygas. Gautos funkcijos ψ_δ reikšmės pateikiamos lentelėje ir grafike (2 pav).



2 pav.: $\log\psi_\delta$ reikšmės 4.2 pavyzdžio modeliui

	Pavyzdys 4.1			Pavyzdys 4.2		
u	$\delta = 0,005$	$\delta = 0,01$	$\delta = 0,1$	$\delta = 0,005$	$\delta = 0,01$	$\delta = 0,1$
0	0,593409646865	0,588949589447	0,517512229608	0,643200800000	0,638637100000	0,568001300000
1	0,338775474447	0,335714895655	0,289025388515	0,338332700000	0,333550400000	0,271525400000
2	0,111224602204	0,109243179933	0,082045280717	0,165304300000	0,161112500000	0,113809300000
3	0,039360705062	0,038377819959	0,026054549797	0,083004580000	0,079751280000	0,047022850000
4	0,009738796039	0,009307719331	0,004532362081	0,043678810000	0,041346270000	0,020115490000
5	0,003768066946	0,003573972208	0,001564177363	0,023610480000	0,022028000000	0,008880854000
6	0,001192071881	0,001115753328	0,000397408295	0,012873430000	0,011841670000	0,003976683000
7	0,000386277870	0,000356740137	0,000102087484	0,007027263000	0,006373714000	0,001786224000
8	0,000128569209	0,000117369508	0,000028195609	0,003834333000	0,003429080000	0,000801902500
9	0,000041866492	0,000037729390	0,000007381044	0,002091471000	0,001844212000	0,000359716900
10	0,000013739345	0,000012228154	0,000001965055	0,001140705000	0,000991742700	0,000161305400
11	0,000004508427	0,000003963039	0,000000524823	0,000622148200	0,000533317700	0,000072329270
12	0,000001477001	0,000001282103	0,000000139201	0,000339327400	0,000286799300	0,000032433470
13	0,000000484374	0,000000415243	0,000000037066	0,000185074300	0,000154231300	0,000014544020
14	0,000000158802	0,000000134446	0,000000009862	0,000100942500	0,000082940660	0,000006521983
15	0,000000052061	0,000000043528	0,000000002622	0,000055055590	0,000044602820	0,000002924656
16	0,000000017069	0,000000014094	0,000000000698	0,000030028170	0,000023985960	0,000001311503
17	0,000000005596	0,000000004563	0,000000000186	0,000016377830	0,000012898870	0,000000588117
18	0,000000001835	0,000000001478	0,000000000049	0,000008932720	0,000006936597	0,000000263729
19	0,000000000602	0,000000000478	0,000000000013	0,000004872044	0,000003730278	0,000000118264
20	0,000000000197	0,000000000155	0,000000000003	0,000002657288	0,000002006023	0,000000053033

1 lentelė: ψ_δ reikšmės

5 Išvados

Šiame magistriniame darbe išvestas rekursinis diskontuoto bankroto laiko reikšmių skaičiavimo algoritmas atskiram nehomogeninio rizikos modelio atvejui – trijų sezonų modeliui. Gauto algoritmo veikimas iliustruotas skaitiniais pavyzdžiais.

6 Literatūra

[1] Andriulytė, I.M., Bernackaitė, E., Kievinaitė, D., Šiaulys, J. *A Lundberg-type inequality for an inhomogeneous renewal risk model*, Modern Stochastics: Theory and Applications, 2015, 2, p. 173-184.

[2] Bao, Z., Liu, Y. *A discrete-time risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes*, Advances in Difference Equations, 2016, p. 188.

[3] Bieliauskienė, E., Šiaulys, J. *The Gerber-Shiu function for the discrete inhomogeneous claim case*, International Journal of Computer Mathematics, 2012, 89, p. 1617-1630.

[4] Blaževičius, K., Bieliauskienė, E., Šiaulys, J. *Finite time ruin probability in the inhomogeneous claim case*, Lithuanian Mathematical Journal, 2010, 50, p. 260-270.

[5] Castañer, A., Claramunt, M.M., Grathy, M., Lefèvre, Cl., Marmol, M. *Ruin problems for a discrete time risk model with non-homogeneous conditions*, Scandinavian Actuarial Journal, 2013, p. 83-102.

[6] Cheng, S., Gerber, H.U., Shiu, E.S.W *Discounted probabilities and ruin theory in the compound binomial model*, Insurance: Mathematics and Economics, 2000, 26, p. 239-250.

[7] Damarackas, J., Šiaulys, J. *Bi-seasonal discrete time risk model*, Applied Mathematics and Computation, 2014, p. 930-940.

[8] DeVylder, F.E., Goovaerts, M.J. *Recursive calculation of finite-time ruin probabilities*, Insurance: Mathematics and Economics, 1988, 7, p. 1-7.

[9] Dickson, D.C.M. *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

[10] Gerber, H.U., Shiu, E.S.W *On the time value of ruin*, North America Actuarial Journal, 1998, 2, p. 48-78.

[11] Grigutis, A., Korvel, A., Šiaulys, J. *Ruin probability in the three-seasonal discrete-time risk model*, Modern Stochastics: Theory and Applications, 2015, 2, p. 421-441.

[12] Lefèvre, Cl., Pichard, Ph. *A nonhomogeneous risk model for insurance*, Computers & Mathematics with Applications, 2006, 51, p. 325-334.

[13] Leipus, R., Šiaulys, J. *Finite-horizon ruin probability asymptotics in the compound discrete-time risk model*, Lithuanian Mathematical Journal, 2011, 51, p. 207-219.

[14] Li, J.Z., Wu, R. *The Gerber-Shiu discounted penalty function for a compound binomial risk model with by-claims*, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2015, 31, p. 181-190.

[15] Navickienė, O., Sprindys, J., Šiaulys, J. *The Gerber-Shiu Discounted Penalty Function for the Bi-Seasonal Discrete Time Risk Model*, Informatica, 2018, Vol. 29, No.4, p. 733-756.

[16] Pichard, Ph., Lefèvre, Cl. *The probability of ruin in finite time with discrete claim size distribution*, Scandinavian Actuarial Journal, 1997, p. 58-69.

[17] Shiu, E.S.W. *The probability of eventual ruin in the compound binomial model*, Astin Bulletin, 1989, 19, p. 179-190.

A Priedai

R kodas:

```
library(Rmpfr)
# nustatome parametrų reišmes
delta = 0.1; N = 100; K1 = 2; K2 = 5; umax = 20
# apsibrėžiame vektorius
q = numeric(N); r = numeric(N)
a = mpfrArray(0, precBits = 1024, dim = c(N,1))
b = mpfrArray(0, precBits = 1024, dim = c(N,1))
c = mpfrArray(0, precBits = 1024, dim = c(N,1))
d = mpfrArray(0, precBits = 1024, dim = c(N,1))
psi = mpfrArray(0, precBits = 1024, dim = c((umax+1),1))
FX = numeric(N); FY = numeric(N); FH = numeric(N)

# apsibrėžiame žalų skirstinius
x = c(0.6, 0.2, 0.2); y = c(0.5, 0.2, 0.2, 0.1); h= c(0.7, 0.3);
# lambda1 = 0.8; lambda2 = 0.5; lambda3 = 0.9;
x = dpois(c(0:N),lambda1); y = dpois(c(0:N),lambda2); h = dpois(c(0:N),lambda3);

# skaičiuojame reikalingus dydžius
Xmax <- length(x)-1; Ymax <- length(y)-1; Hmax <- length(h)-1
X = 0:Xmax; Y = 0:Ymax; H = 0:Hmax
EX = sum(X * x); EY = sum(Y * y); EH = sum(H * h)
x[(Xmax+2):N] = 0; y[(Ymax+2):N] = 0; h[(Hmax+2):N] = 0
for (i in 0:(Xmax+Ymax+Hmax)) {
  for (k in 1:(i+1)){
    for(j in 1:(i+2-k))
      q[i+1] = q[i+1] + x[k] * y[j] * h[(i+3)-k-j] }}
for (i in 0:(Xmax+Ymax)) {
  for (k in 1:(i+1))
    r[i+1] = r[i+1] + x[k] * y[(i+2) - k] }
FX[1] = x[1]
for (u in 1:(N-1)) {FX[u+1] = FX[u] + x[u+1]}
F_X = 1 - FX
FY[1] = y[1]
```

```
for (u in 1:(N-1)) {FY[u+1] = FY[u] + y[u+1]}
F_Y = 1 - FY
FH[1] = h[1]
for (u in 1:(N-1)) {FH[u+1] = FH[u] + h[u+1]}
F_H = 1 - FH

# skaičiuojame sekų reikšmes
a[1] = mpfr(1,1024)
a[2] = 0
a[3] = mpfr(-1,1024) / mpfr(y[1] * h[1],1024)
for (n in 3:(N-1)) {
  a[n + 1] = mpfr(1,1024)/mpfr(q[1],1024) * (mpfr(exp(3 * delta),1024) *
             mpfr(a[(n + 1) - 3],1024) + mpfr(x[n-1],1024) *
             mpfr(y[1] * h[1],1024) * mpfr(a[3],1024))
  for (i in 2:(n-1))
    a[n + 1] = mpfr(a[n + 1],1024) - (mpfr(1,1024) / mpfr(q[1],1024)) *
              (mpfr(q[i],1024) * mpfr(a[n - i + 2],1024)) }

b[1] = 0
b[2] = mpfr(1,1024)
b[3] = -(mpfr(1 / y[1],1024) + mpfr(h[2],1024) - mpfr(h[2],1024) *
         mpfr(x[1],1024)) / mpfr(h[1],1024)
for (n in 3:(N-1)) {
  b[n + 1] = 1 / mpfr(q[1],1024) * (exp(3 * delta) * mpfr(b[(n + 1) - 3],1024) +
             mpfr(x[n-1],1024) * (mpfr(y[1] * h[1],1024) * mpfr(b[3],1024) +
             mpfr(h[2] * y[1],1024)))
  for (i in 2:(n-1))
    b[n + 1] = mpfr(b[n + 1],1024) - (1 / mpfr(q[1],1024)) *
              (mpfr(q[i],1024) * mpfr(b[n - i + 2],1024)) }

c[1] = 0
c[2] = 0
c[3] = (1 - exp(3 * delta)) / (y[1] * h[1])
for (n in 3:(N-1)) {
  c[n + 1] = 1 / mpfr(q[1],1024) * (exp(3 * delta)* mpfr(c[(n + 1) - 3],1024) +
             mpfr(x[n-1],1024) * (mpfr(y[1] * h[1],1024) * mpfr(c[3],1024)))
```

```
  for (i in 2:(n-1))
    c[n + 1] = mpfr(c[n + 1],1024) - (1 / mpfr(q[1],1024)) * (mpfr(q[i],1024) *
               mpfr(c[n - i + 2],1024)) }

d[1] = 0
d[2] = 0
d[3] = (mpfr(exp(2*delta),1024) * mpfr(EX,1024) + mpfr(exp(delta),1024) *
        mpfr(EY-1+y[1],1024) + mpfr(EH+h[1]-1-y[1]+h[1]*y[1]+h[2]*y[1],1024)) /
        mpfr(y[1]*h[1],1024)
for (n in 3:(N-1)) {
  d[n + 1] = (1 / mpfr(q[1],1024))* (exp(3 * delta)* mpfr(d[(n + 1) - 3],1024) +
              mpfr(x[n-1],1024) * mpfr(exp(2 * delta) * EX,1024) +
              mpfr(exp(delta) * (EY - 1 + y[1]), 1024)
              + mpfr(EH + h[1] - 1,1024) - mpfr(exp(2 * delta) * F_X[n - 2],1024) -
              mpfr(r[n-1],1024) * mpfr((1 - h[1] - h[2]),1024))
   for (i in 2:(n-1))
    d[n + 1] = mpfr(d[n + 1],1024) - (1 / mpfr(q[1],1024))* (mpfr(q[i],1024) *
               mpfr(d[n - i + 2],1024) + mpfr(exp(delta),1024) * mpfr(x[i-1],1024) *
               mpfr(F_Y[n - i + 1],1024) + mpfr(r[i-1],1024) * mpfr(F_H[n-i+2],1024))}

# sprendžiame lygčių sistemą
eqA = array(c(mpfr(a[N - K1],1024), mpfr(a[N - K2],1024), mpfr(a[N],1024),
              mpfr(b[N - K1],1024), mpfr(b[N - K2],1024), mpfr(b[N],1024),
              mpfr(c[N - K1],1024),  mpfr(c[N - K2],1024),mpfr(c[N],1024) ),
              dim = c(3, 3))
eqb = array(c(mpfr(-d[N - K1],1024), mpfr(-d[N - K2],1024), mpfr(-d[N],1024)))

# skaičiuojame atvirkštinę matricą
detA = mpfr(eqA[1,1],1024) * mpfr(eqA[2,2],1024) * mpfr(eqA[3,3],1024) +
       mpfr(eqA[1,2],1024) * mpfr(eqA[2,3],1024) * mpfr(eqA[3,1],1024) +
       mpfr(eqA[1,3],1024) * mpfr(eqA[2,1],1024) * mpfr(eqA[3,2],1024) -
       mpfr(eqA[1,3],1024) * mpfr(eqA[2,2],1024) * mpfr(eqA[3,1],1024) -
       mpfr(eqA[1,2],1024) * mpfr(eqA[2,1],1024) * mpfr(eqA[3,3],1024) -
       mpfr(eqA[1,1],1024) * mpfr(eqA[2,3],1024) * mpfr(eqA[3,2],1024)
eqA_T = array(c(mpfr(eqA[1,1],1024),mpfr(eqA[1,2],1024),mpfr(eqA[1,3],1024),
                mpfr(eqA[2,1],1024),mpfr(eqA[2,2],1024),mpfr(eqA[2,3],1024),
```

```
                mpfr(eqA[3,1],1024),mpfr(eqA[3,2],1024),mpfr(eqA[3,3],1024)),
                dim = c(3, 3))
A11 = mpfr(eqA_T[2,2],1024) * mpfr(eqA_T[3,3],1024) - mpfr(eqA_T[2,3],1024) *
      mpfr(eqA_T[3,2],1024)
A12 = mpfr(eqA_T[2,1],1024) * mpfr(eqA_T[3,3],1024) - mpfr(eqA_T[2,3],1024) *
      mpfr(eqA_T[3,1],1024)
A13 = mpfr(eqA_T[2,1],1024) * mpfr(eqA_T[3,2],1024) - mpfr(eqA_T[3,1],1024) *
      mpfr(eqA_T[2,2],1024)
A21 = mpfr(eqA_T[1,2],1024) * mpfr(eqA_T[3,3],1024) - mpfr(eqA_T[1,3],1024) *
      mpfr(eqA_T[3,2],1024)
A22 = mpfr(eqA_T[1,1],1024) * mpfr(eqA_T[3,3],1024) - mpfr(eqA_T[1,3],1024) *
      mpfr(eqA_T[3,1],1024)
A23 = mpfr(eqA_T[1,1],1024) * mpfr(eqA_T[3,2],1024) - mpfr(eqA_T[1,2],1024) *
      mpfr(eqA_T[3,1],1024)
A31 = mpfr(eqA_T[1,2],1024) * mpfr(eqA_T[2,3],1024) - mpfr(eqA_T[1,3],1024) *
      mpfr(eqA_T[2,2],1024)
A32 = mpfr(eqA_T[1,1],1024) * mpfr(eqA_T[2,3],1024) - mpfr(eqA_T[1,3],1024) *
      mpfr(eqA_T[2,1],1024)
A33 = mpfr(eqA_T[1,1],1024) * mpfr(eqA_T[2,2],1024) - mpfr(eqA_T[1,2],1024) *
      mpfr(eqA_T[2,1],1024)
eqA_inv = 1/detA * array(c(A11,-1*A21,A31,-1*A12,A22,-1*A32,A13,-1*A23,A33),
                         dim = c(3, 3))

# ieškome sprendinių
eqx = mpfr(eqA_inv,1024) %*% mpfr(eqb,1024)
id_mat = eqA_inv %*% eqA
psi[1] = eqx[1]
psi[2] = eqx[2]
S = eqx[3]

# skaičiuojame Gerber-Shiu funkcijos reišmes pagal rekursinę formulę
psi[3] = a[3] * psi[1] + b[3] * psi[2]+ c[3] * S + d[3]
psi[4:(umax + 1)] = a[4:(umax + 1)] * psi[1] + b[4:(umax + 1)] * psi[2] +
                    c[4:(umax + 1)] * S + d[4:(umax + 1)]
psi_num = asNumeric(psi)
```