VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS INSTITUTAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Greta Mazuraitė

Universalumo teoremos Rymano dzeta funkcijai apibendrinimas

A generalization of the universality theorem for the Riemann zeta-function

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ....

Darbo vadovas **prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas**

Vilnius 2019

Turinys

1 Įvadas **3**

2 Pagalbiniai tikimybiniai rezultatai **6**

3 Vidurkiniai įverčiai **11**

4 Aproksimavimo lema **14**

5 Ribinė teorema **17**

6 Universalumo teoremos įrodymas **20**

Summary **22**

Literatūra **23**

1 Įvadas

Tarkime, kad $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra kompleksinių skaičių seka. Tuomet eilutė

$$\sum_{m=l}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}$$

yra vadinama Dirchlė eilute. Jos konvergavimo sritis yra pusplokštumė.

Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirchlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=l}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Funkciją $\zeta(s)$ srityje $\sigma > 1$ galima apibrėžti ir Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Nors funkciją $\zeta(s)$ žinojo jau Oileris 18 amžiaus viduryje, tačiau jis laikė, kad kintamasis s yra realus. Tuo tarpu Rymanas 1859 m. pradėjo nagrinėti $\zeta(s)$ kaip kompleksinio kintamojo funkciją ir pritaikė ją pirminių skaičių pasiskirstymo tyrimui. Funkcija $\zeta(s)$ yra labai idomus ir svarbus analizinis objektas, ji naudojama sprendžiant ne tik matematikos, bet ir kitų gamtos mokslų uždavinius. Ši funkcija iki šiol slepia daug paslapčių, ypač daug problemų siejasi su jos nulių išsidėstymu. Žinoma, kad $\zeta(-2k) = 0$, kai $k \in \mathbb{N}$. Nuliai $s = -2k$ yra vadinami trivialiaisiais nuliais, jie yra neįdomūs. Tačiau yra žinoma, kad funkcija $\zeta(s)$ turi be galo daug netrivialiųjų kompleksinių nulių, gulinčių kritinėje juostoje $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < 1\}$. Garsioji Rymano hipotezė tvirtina, kad visi šie nuliai yra kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$.

Be kitų įdomių savybių funkcija $\zeta(s)$ turi labai įdomią universalumo savybę, kurią 1975 m. atrado S. M. Voroninas (Voronin). Jis įrodė [11], kad jei $0 < r < \frac{1}{4}$, o funkcija $f(s)$ yra tolydi ir nevirsta nuliu skritulyje $|\, s \,| \leqslant r$, bei analizinė to skritulio viduje, tai $\forall \varepsilon > 0$ atitinka toks realusis skaičius $\tau = \tau(\varepsilon)$, kad

$$\sup_{|s| \leqslant r} \left| \zeta(s + \frac{3}{4} + i\tau) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Voronino teorema yra įdomus rezultatas. Ji buvo pastebėta analizinės skaičių teorijos specialistų, kurie šią teoremą patikslino ir sustiprino. Galutinio Voronino teoremos varianto formulavimui paprastai yra naudojami tokie žymenys. Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, $\mathcal{K}$ yra juostos D kompaktinių aibių, turinčių jungiuosius papildinius, klasė, o $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, yra funkcijų, tolydžių ir neturinčių nulių aibėje K, ir analizinių aibės K viduje, klasė. Be to, $measA$ tegul žymi mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą. Naudojant šiuos žymenis yra teisinga tokia Voronino teoremos versija [1],[5].

1.1 teorema. *Trakime, kad $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0. \tag{1.1}$$

Iš teoremos nelygybės išplaukia, kad postūmių $\zeta(s+i\tau)$, aproksimuojančių duotą analizinę funkciją, yra be galo daug, kadangi jų aibė turi teigiamą apatinį tankį. 1.1 teorema yra tolydaus tipo, nes τ postūmiuose $\zeta(s+i\tau)$ gali įgyti bet kurias realias reikšmes. Kai τ įgyja reikšmes iš kurios nors diskrečios aibės, tai 1.1 teoremos analogai yra vadinami diskrečiomis universalumo teoremomis. Pirmąją diskretaus tipo universalumo teoremą įrodė [9] A. Reichas (Reich), naudodamas aritmetinę progresiją $\{kh : k = 0, 1, ...\}$, kai $h > 0$ yra fiksuotas skaičius. Tegul $\#A$ žymi aibės A elementų skaičių. Tuomet Reicho teorema yra toks tvirtinimas.

1.2 teorema. *Tarkime, kad $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su $\forall h > 0$ ir $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\Big\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0. \tag{1.2}$$

Šiek tiek vėliau 1.2 teoremą kitokiu metodu įrodė B.Bagčis (Bagchi)[1]. Aritmetinė progresija $\{kh\}$ yra labai paprasta diskrečioji aibė. Kyla klausimas, ar negalima ją pakeisti sudėtingesne diskrečiąja aibe. Magistro darbo tikslas yra įrodyti 1.2 teoremos analogą, naudojant postūmius $\zeta(s+i\varphi(k))$ kuriai nors pakankamai plačiai funkcijų $\varphi(t)$ klasei. Iš vienos pusės aišku, kad funkcija $\varphi(t)$ turi būti tam tikra prasme reguliari. Iš kitos pusės, ji turi tenkinti kai kuriuos įverčius, nes universalumo teoremų įrodymas dzeta funkcijoms glaudžiai siejasi su šių funkcijų kvadratų vidurkiais, funkcijos $\zeta(s)$ atveju su

$$\int_0^T |\zeta(\sigma+it)|^2 dt, \quad \sigma > \frac{1}{2}. \tag{1.3}$$

Apibrėžiame klasę funkcijų U (nes kalbama apie universalumą), kurios funkcijos $\varphi(t)$ tenkina sąlygas :

1. $\varphi(t)$ yra reali teigiama neaprėžtai didėjanti funkcija intervale $\left[\frac{1}{2}, \infty\right]$;

2. $\varphi(t)$ turi išvestinę $\varphi'(t)$ intervale $\left[\frac{1}{2}, \infty\right]$, tenkinančią įvertį

$$\varphi(2t)\big(\max_{t\leqslant u\leqslant 2t}(\varphi'(u))^{-1} + \max_{t\leqslant u\leqslant 2t}\varphi'(u)\big) \ll t;$$

3. Seka $\{a\varphi(k) : k \in \mathbb{N}\}$ su kiekvienu realiuoju $a \neq 0$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1.

Primename, kad seka $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ yra vadinama tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1, jeigu su kiekvienu intervalu $[a, b) \subset [0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_{[a,b)}\left(\{x_k\}\right) = b - a,$$

čia $\{u\}$ žymi realaus skaičiaus u trupmeninę dalį, o $\chi_{[a,b)}$ yra aibės $[a, b)$ indikatorius, t.y.,

$$\chi_{[a,b)}(t) = \begin{cases} 1, \text{jei } t \in [a, b), \\ 0, \text{jei } t \notin [a, b). \end{cases} \tag{1.4}$$

Dabar formuluojame pagrindinį magistro darbo rezultatą.

1.3 teorema. *Tarkime, kad $\varphi \in U$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su $\forall\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\left\{1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\varphi(k)) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0. \tag{1.5}$$

2 Pagalbiniai tikimybiniai rezultatai

Įvade suformuotos universalumo teoremos įrodymas remiasi ribinėmis teoremomis apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą. Todėl mes priminsime bei gausime kai kuriuos tikimybinio pobūdžio rezultatus.

Tegul $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ yra erdvės $\mathbb{X}$ Borelio aibių klasė, t.y., mažiausias σ kūnas, kuriam priklauso erdvės $\mathbb{X}$ atvirųjų aibių sistema. Tarkime, kad P ir P_n, $n \in \mathbb{N}$, yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Yra sakoma, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, jei su kiekviena realia aprėžta tolydžia funkcija g erdvėje $\mathbb{X}$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} g dP_n = \int_{\mathbb{X}} g dP.$$

Šis silpnojo tikimybinių matų konvergavimo apibrėžimas turi keletą ekvivalentų įvairių tipų aibių terminais. Mums bus reikalingas toks ekvivalentas atvirųjų aibių terminais, kurį formuluojame atskira lema.

2.1 lema. *P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, tada ir tik tada, kai su kiekviena erdvės $\mathbb{X}$ atvirąja aibe G galioja nelygybė*

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geqslant P(G).$$

Lema yra dalies 2.1 teoremos iš [2] atskiras atvejis.

Ribinių teoremų formulavimui ir įrodymui yra reikalinga viena topologinė struktūra. Tegul γ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje, t.y., $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Apibrėžkime aibę

$$\Omega = \prod_{p\in\mathbb{P}} \gamma_p,$$

čia $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais p, o $\mathbb{P}$ žymi visų pirminių skaičių aibę. Pagal Dekarto sandaugos apibrėžimą aibę Ω sudaro visos funcijos $\omega : \mathbb{P} \to \gamma$. Aibėje Ω galima apibrėžti pataškinės daugybos operaciją: jei

$$\omega_1 = (\omega_1(p) : p \in \mathbb{P}), \omega_2 = (\omega_2(p) : p \in \mathbb{P}), \quad \text{tai}$$

$$\omega_1\omega_2 = (\omega_1(p)\omega_2(p) : p \in \mathbb{P}).$$

Su šia operacija aibė Ω, kuri dažnai vadinama toru, tampa grupe. Be to, aibėje Ω pagal Tichonovo teoremą [8] galima apibrėžti sandaugos topologiją. Taigi, grupė Ω tampa topologine Abelio grupe. Pagal klasikinę Tichonovo teoremą ši grupė yra kompaktinė aibė. Yra žinoma [5], kad kompaktinėje grupėje galima apibrėžti tikimybinį Haro matą. Taigi, mūsų atveju erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas m_H. Jis išsiskiria iš kitų tikimybinių matų invariantiškumo savybe, kuri reiškia, kad su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ ir kiekvienu $\omega \in \Omega$ yra teisingos lygybės

$$m_H(A) = m_H(\omega A) = m_H(A\omega).$$

Dabar įrodysime ribinę teoremą tikimybiniams matams erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. Aibėms $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ apibėžiame

$$Q_N(A) = \frac{1}{N}\#\{1 \leqslant k \leqslant N : (p^{-i\varphi(k)} : p \in \mathbb{P}) \in A\}.$$

Kadangi $|p^{-i\varphi(k)}| = 1$, tai $(p^{-i\varphi(k)} : p \in \mathbb{P})$ yra toro Ω elementas.

2.2 lema. *Tarkime, kad seka $\{a\varphi(k) : k \in \mathbb{N}\}$ su kiekvienu realiuoju $a \neq 0$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1. Tuomet Q_N, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.*

2.2 lemos įrodymui mums bus reikalingas Veilio kriterijus apie tolygiai pasiskirsčiusias moduliu 1 realiųjų skaičių sekas $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

2.3 lema. *Seka $\{\varphi(k) : k \in \mathbb{N}\}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1 tada ir tik tada, kai su kiekvienu $m \in \mathbb{Z}\diagdown\{0\}$ yra teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i m x_k} = 0.$$

Lemos įrodymą galima rasti, pavyzdžiui, [4] monografijoje.

2.2 lemos įrodymas. Įrodymui naudosime Furjė transformacijų metodą, kurio esmė yra tokia: jei mato Q_N Furjė tranformacija konverguoja į mato m_H Furjė transformaciją, tai iš to išplaukia mato Q_N, kai $N \to \infty$, silpnasis korvergavimas į matą m_H.

Yra žinoma [3], kad mato Q_N Furjė transformacija $g_N(\underline{k}), \underline{k} = (k_p \in \mathbb{Z} : p \in \mathbb{P})$, turi pavidalą

$$g_N(\underline{k}) = \int_\Omega \Big(\prod_{p\in\mathbb{P}}{}' \omega^{k_p}(p)\Big) dQ_N,$$

čia ženklas $'$ reiškia, jog tik baigtinis sveikųjų skaičių k_p skaičius yra nelygūs 0. Iš čia ir mato Q_N apibrėžimo randame, kad

$$g_N(\underline{k}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \prod_{p\in\mathbb{P}}{}' p^{-ik_p\varphi(k)} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \exp\{-i\varphi(k) \sum_{p\in\mathbb{P}}{}' k_p \log p\}. \tag{2.1}$$

Aišku, kad jei visi $k_p = 0$, tai eksponentė (2.1) formulėje lygi 1. Todėl

$$g_N(\underline{0}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} 1 = 1. \tag{2.2}$$

Yra gerai žinoma, kad aibė $\{\log p : p \in \mathbb{P}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, tai yra

$$\sum_{p\in\mathbb{P}}{}' k_p \log p \neq 0,$$

kai $\underline{k} \neq \underline{0}$. Dabar panaudojame lemos sąlygą, kad seka $\{a\varphi(k)\}, a \neq 0$, yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1. Todėl seka

$$\Big\{ -\frac{\varphi(k)}{2\pi}\sum_{p\in\mathbb{P}}{}' k_p \log p\Big\}$$

yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1, kai $\underline{k} \neq \underline{0}$. Iš čia, 2.3 lemos ir (2.1) lygybės išplaukia, kad

$$\lim_{N\to\infty} g_N(\underline{k}) = 0,$$

kai $\underline{k} \neq \underline{0}$. Pastaroji lygybė kartu su (2.2) lygybe duoda

$$\lim_{N\to\infty} g_N(\underline{k}) = \begin{cases} 1, \text{kai } \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, \text{kai } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Kadangi šios lygybės dešinioji pusė yra Haro mato m_H Furjė transformacija [3], tai iš čia ir išplaukia lemos tvirtinimas.

Perėjimui nuo tikimybinių matų silpnojo konvergavimo erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ prie tikimybinių matų silpnojo konvergavimo analizinių funkcijų erdvėje yra reikalingi kai kurie rezultatai apie atvaizdžius silpnojo tikimybinių matų konvergavimo teorijoje. Tegul $\mathbb{X}_1$ ir $\mathbb{X}_2$ yra dvi metrinės erdvės, o $h : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ yra $(\mathcal{B}(\mathbb{X}_1), \mathcal{B}(\mathbb{X}_2))$ mati funkcija, t.y. su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_2)$

$$h^{-1}A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_1).$$

Tuomet bet kuris tikimybinis matas P erdvėje $(\mathbb{X}_1, \mathcal{B}(\mathbb{X}_1))$ indukuoja (apibrėžia) vienintelį tikimybinį matą Ph^{-1} erdvėje $(\mathbb{X}_2, \mathcal{B}(\mathbb{X}_2))$ lygybės

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_2),$$

pagalba. Gerai žinoma [2], kad kiekviena tolydi funkcija h yra $(\mathcal{B}(\mathbb{X}_1), \mathcal{B}(\mathbb{X}_2))$ mati. Be to, galioja toks tvirtinimas.

2.4 lema. *Tarkime, kad funkcija h yra tolydi ir P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P erdvėje $(\mathbb{X}_1, \mathcal{B}(\mathbb{X}_1))$. Tuomet $P_n h^{-1}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą Ph^{-1} erdvėje $(\mathbb{X}_2, \mathcal{B}(\mathbb{X}_2))$.*

Lemos įrodymą galima rasti [2] knygoje. Primename, kad $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Simboliu $H(D)$ žymėsime funkcijų, analizinių juostoje D, erdvę, kurioje yra apibrėžiama tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Šioje topologijoje $g_n(s) \in H(D)$, kai $n \to \infty$, konverguoja į $g(s) \in H(D)$, jei su kiekviena kompaktine juostos D aibe K yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in K} |g_n(s) - g(s)| = 0.$$

Erdvę $H(D)$ galima metrizuoti. Yra žinoma [5], kad egzistuoja tokia kompaktinių aibių seka $\{K_l : l \in \mathbb{N}\} \subset D$, kad

$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$

$K_l \subset K_{l+1}, \forall l \in \mathbb{N}$ ir, jei $K \subset D$ yra kompaktinė aibė, tai $K \subset K_l$ su kuriuo nors $l \in \mathbb{N}$. Apibrėžiame

$$\rho(g_1, g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup_{s\in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}{1 + \sup_{s\in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|},$$

$g_1, g_2 \in H(D)$, tuomet ρ yra metrika erdvėje $H(D)$, indukuojanti jos tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologiją.

Remdamiesi 2.2 lema, įrodysime ribinę teoremą tikimybiniams matams erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$, kurie yra apibrėžti, naudojant absoliučiai konverguojančią Dirichlė eilutę, susijusią su Rymano dzeta funkcija.

Tegul $\hat{\sigma} > \dfrac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius, o

$$v_n(m) = \exp\left\{ - \left(\frac{m}{n}\right)^{\hat{\sigma}} \right\}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Apibrėžiame funkcijas

$$\zeta_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_n(m)}{m^s}$$

ir

$$\zeta_n(s, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega(m) v_n(m)}{m^s}, \quad \omega \in \Omega.$$

Čia funkcija $\omega(p), p \in \mathbb{P}$ yra pratęsiama į visą aibę $\mathbb{N}$, naudojant formulę

$$\omega(m) = \prod_{p^l | m, p^{l+1} \nmid m} \omega^l(p).$$

Tuomet yra žinoma [5], kad Dirichlė eilutės, apibrėžiančios funkcijas $\zeta_n(s)$ ir $\zeta_n(s,\omega)$, konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Aibėms $A \in \mathcal{B}(H(D))$ apibrėžiame

$$P_{N,n}(A) = \frac{1}{N}\#\Big\{1 \leqslant k \leqslant N : \zeta_n(s + i\varphi(k)) \in A\Big\}.$$

Įrodysime, kad $P_{N,n}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į tam tikrą tikimybinį matą erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$. Apibrėžiame funkciją $h_n : \Omega \to H(D)$ formule

$$h_n(\omega) = \zeta_n(s,\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Tegul $V_n = m_H h_n^{-1}$, čia m_H yra Haro matas erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$.

2.5 lema. *$P_{N,n}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į matą V_n.*

Įrodymas. Tegul Q_N yra matas iš 2.2 lemos. Tuomet iš matų Q_N ir $P_{N,n}$ bei funkcijos h_n apibrėžimų turime, kad su kiekvienu $A \in \mathcal{B}(H(D))$

$$P_{N,n}(A) = \frac{1}{N}\#\{1 \leqslant k \leqslant N : (p^{-i\varphi(k)} : p \in \mathbb{P}) \in h_n^{-1}A\},$$

nes pagal h_n apibrėžimą

$$h_n(p^{-i\varphi(k)} : p \in \mathbb{P}) = \zeta_n(s + i\varphi(k)).$$

Taigi, turime, kad $P_{N,n}(A) = Q_N(h_n^{-1}A)$ su kiekviena $A \in \mathcal{B}(H(D))$. Naudojant 2.3 lemos žymenis, gauname, kad

$$P_{N,n} = Q_N h_n^{-1}. \tag{2.4}$$

Kadangi eilutė, apibrėžianti funkciją $\zeta_n(s,\omega)$, konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$, tai žinoma [5], kad funkcija h_n yra tolydi. Todėl iš (2.4) ir 2.2 ir 2.3 lemų gauname, kad $P_{N,n}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $m_H h_n^{-1}$. Lema įrodyta.

3 Vidurkiniai įverčiai

Universalumo teoremų dzeta funkcijoms įrodymas remiasi šių funkcijų antrojo momento įverčiais, todėl šiame skyrelyje pateiksime tokius įverčius, susijusius su mūsų nagrinėjama funkcijų klase U. Pradėsime antrojo momento Rymano dzeta funkcijai įverčiu. Sakome, kad $f(x) \ll_a g(x)$, $g(x) > 0$, $x \in X$, jeigu egzistuoja tokia konstanta $C = C(a) > 0$, kad su visais $x \in X$ yra teisinga nelygybė

$$|f(x)| \leqslant Cg(x).$$

Taigi, $f(x) \ll_a g(x)$ yra įverčio $f(x) = O_a(g(x))$ sinonimas ir yra patogus, kai yra vertinami sudėtingi reiškiniai.

3.1 lema. *Tarkime, kad* $\varphi \in U$, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ *ir* $\tau \in \mathbb{R}$. *Tuomet yra teisingas įvertis*

$$\int_1^T |\zeta(\sigma + i\tau + i\varphi(t))|^2 dt \ll_\sigma T(1 + |\tau|).$$

Įrodymas. Su visais $V > 1$, remdamiesi klasės U funkcijų savybe gauname, kad

$$\begin{aligned}\int_V^{2V} |\zeta(\sigma + i\tau + i\varphi(t))|^2 dt &= \int_V^{2V} \frac{1}{\varphi'(t)} |\zeta(\sigma + i\tau + i\varphi(t))|^2 d\varphi(t) \\ &\ll_\sigma \max_{V \leqslant t \leqslant 2V} \frac{1}{\varphi'(t)} \int_V^{2V} d\Big(\int_1^{|\tau| + \varphi(t)} |\zeta(\sigma + i\tau + iu)|^2 du \Big) \\ &\ll_\sigma \max_{V \leqslant t \leqslant 2V} \frac{1}{\varphi'(t)} \int_1^{|\tau| + \varphi(t)} |\zeta(\sigma + i\tau + iu)|^2 du \Big|_V^{2V}.\end{aligned}$$

Pasinaudoję gerai žinomu klasikiniu įverčiu [10]

$$\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt \ll_\sigma T,$$

kuris yra teisingas su kiekvienu fiksuotu σ, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, iš čia randame, kad

$$\begin{aligned}\int_V^{2V} |\zeta(\sigma + i\tau + i\varphi(t))|^2 dt &\ll_\sigma V + |\tau| \max_{V \leqslant t \leqslant 2V} (\varphi'(t))^{-1} \\ &\ll_\sigma V + \frac{|\tau|}{\varphi(2V)} \varphi(2V) \max_{V \leqslant t \leqslant 2V} (\varphi'(t))^{-1} \\ &\ll_\sigma V + V \frac{|\tau|}{\varphi(2V)} \ll_\sigma V + V|\tau|.\end{aligned}$$

Dabar laikome, kad $V = 2^{-k-1}T$ ir ankstesnę lygybę sumuojame pagal visus $k = 0, 1, \ldots$. Iš integralo adityvumo, kairėje pusėje gauname lemos įverčio kairiąją pusę, o dešinėje pusėje lieka $T(1 + |\tau|)$, nes eilutė

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}$$

konverguoja kaip geometrinė progresija. 3.1 lemos įvertis yra pakankamas, tačiau mums reikalingas šio įverčio diskretusis variantas. Perėjimui nuo tolydžiojo antrojo momento įverčio prie diskretaus yra naudojamas toks tvirtinimas.

3.2 lema. *Tarkime, kad T_0 ir $T \geqslant \delta > 0$ yra realieji skaičiai, o A yra baigtinė aibė iš intervalo* $\left[T_0 + \dfrac{\delta}{2}, T_0 + T - \dfrac{\delta}{2}\right]$. *Tegul*

$$N_\delta(x) = \sum_{t \in A, |t-x|<\delta} 1,$$

o $f(x)$ yra kompleksines reikšmes įgyjanti tolydi funkcija intervale $[T_0, T + T_0]$ ir turinti tolydžią išvestinę atvirame intervale $(T_0, T + T_0)$. Tuomet yra teisinga nelygybė

$$\sum_{t \in A} N_\delta^{-1}(t)|f(t)|^2 \leqslant \frac{1}{\delta}\int_{T_0}^{T_0+T} |f(x)|^2 dx + \Big(\int_{T_0}^{T_0+T} |f(x)|^2 dx \int_{T_0}^{T_0+T} |f'(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemos tvirtinimas yra vadinamas Galacherio lema. Jos įrodymas yra [7] monografijoje. Dabar formuluojame lemą apie Rymano dzeta funkcijos antro diskretaus momento įvertį.

3.3 lema. *Tarkime, kad $\varphi \in U$, $\dfrac{1}{2} < \sigma < 1$ ir $t \in \mathbb{R}$. Tuomet yra teisingas įvertis*

$$\sum_{k=1}^{N} |\zeta(\sigma + it + i\varphi(k))|^2 \ll_\sigma N(1 + |t|).$$

Įrodymas. 3.2 lemoje imame aibę $A = \{k : 1 \leqslant k \leqslant N\}$, o $\delta = 1$, $T_0 = \dfrac{1}{2}$ ir $T = N$. Be to, mūsų atveju

$$f(\tau) = \zeta(\sigma + it + i\varphi(\tau)).$$

Pritaikę 3.2 lemą, gauname įvertį

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} |\zeta(\sigma + it + i\varphi(k))|^2 \ll & \int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} |\zeta(\sigma + it + i\varphi(\tau))|^2 d\tau \\ & + \Big(\int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} |\zeta(\sigma + it + i\varphi(\tau))|^2 d\tau \\ & \times \int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} (\varphi'(\tau))^2 |\zeta'(\sigma + it + i\varphi(\tau))|^2 d\tau\Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Iš 3.1 lemos išplaukia įvertis

$$\int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} |\zeta(\sigma + it + i\varphi(\tau))|^2 d\tau \ll_\sigma N(1 + |t|). \tag{3.2}$$

Integralo su Rymano dzeta funkcijos išvestine įvertinimui pasinaudosime klasikine Koši integraline formule. Turime, kad

$$\zeta'(\sigma + it + i\varphi(\tau)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\sigma|=\delta_1} \frac{\zeta(z + it + i\varphi(\tau))}{(z-\sigma)^2} dz.$$

Iš čia, 3.1 lemos ir Koši nelygybės gauname, kad yra teisingas įvertis

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} |\zeta'(\sigma + it + i\varphi(\tau))|^2 d\tau &\ll \int_{|z-\sigma|=\delta_1} \frac{|dz|}{|z-\sigma|^2} \int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} |\zeta(z + it + i\varphi(\tau))| d\tau \\
&\ll \Big(N \int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} |\zeta(\sigma_1 + it + it_1 + i\varphi(\tau))|^2 d\tau\Big)^2 \qquad (3.3) \\
&\ll_\sigma N(1 + |t + t_1|) \ll N(1 + |t|),
\end{aligned}
$$

jei reikiamai parenkame $\delta_1 > 0$. Čia $\dfrac{1}{2} < \sigma_1 < 1$. Analogiškai 3.1 lemos įrodymui, remdamiesi įverčiu

$$\varphi(2t) \max_{t \leqslant u \leqslant 2t} \varphi'(t) \ll t,$$

iš (3.3) gauname, kad

$$\int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} (\varphi'(t))^2 |\zeta'(\sigma + it + i\varphi(t))| \ll N(1 + |t|).$$

Įrašę šį įvertį ir (3.2) į (3.1), gauname lemos tvirtinimą.

4 Aproksimavimo lema

Šiame skyrelyje įrodysime tvirtinimą apie vidurkinį funkcijos $\zeta(s)$ aproksimavimą $\zeta_n(s)$. Jos formulavimui naudosime 2 skyrelyje apibrėžtą metriką ρ.

4.1 lema. *Tarkime, kad $\varphi \in U$. Tuomet yra teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\rho\Big(\zeta(s+i\varphi(k)),\zeta_n(s+i\varphi(k))\Big)=0.$$

Įrodymas. Tegul

$$l_n(s)=\frac{s}{\hat{\sigma}}\Gamma\Big(\frac{s}{\hat{\sigma}}\Big)n^s, \quad n\in\mathbb{N},$$

čia $\hat{\sigma}$ yra iš funkcijos $v_n(m)$ apibrėžimo, o $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija. Tuomet yra žinoma [5], kad

$$\zeta_n(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\sigma}-i\infty}^{\hat{\sigma}+i\infty}\zeta(s+z)l_n(z)\frac{dz}{z}. \tag{4.1}$$

Tarkime, kad K yra bet kuri kompaktinė juostoje D aibė, o $\epsilon>0$ yra toks, kad su visais $z\in K$ yra teisinga nelygybė

$$\frac{1}{2}+2\epsilon\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 1-\epsilon.$$

Imame $\beta>0$. Tuomet iš (4.1) išraiškos ir reziduumų teoremos gauname, kad

$$\zeta_n(s)-\zeta(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty}\zeta(s+z)l_n(z)\frac{dz}{z}+\frac{l_n(1-s)}{1-s}, \tag{4.2}$$

nes integruojamoji funkcija turi polius taške $z=0$ ir $z=1-s$. Patogumo dėlei aibės K taškus žymime $s=\sigma+iv$. Be to, imame $\beta=\sigma-\epsilon-\frac{1}{2}$, $\quad\hat{\sigma}=\frac{1}{2}+\epsilon$. Tuomet iš (4.2) turime nelygybę

$$\begin{aligned}&|\zeta(s+i\varphi(k))-\zeta_n(s+i\varphi(k))|\\ &\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\zeta_n(s+i\varphi(k))-\beta+it)|\frac{|l_n(-\beta+it)|}{|-\beta+it|}dt+\frac{|l_n(1-s-i\varphi(k))|}{|1-s-i\varphi(k)|}.\end{aligned}$$

Šioje nelygybėje $t+v$ pakeičiame į t. Tai duoda nelygybę

$$\begin{aligned}&|\zeta(s+i\varphi(k))-\zeta_n(s+i\varphi(k))|\\ &\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\zeta\Big(\frac{1}{2}+\epsilon+i(t+\varphi(k))\Big)\Big|\frac{|l_n(\frac{1}{2}+\epsilon-s+it)|}{|\frac{1}{2}+\epsilon-s+it|}dt+\frac{|l_n(1-s-i\varphi(k))|}{|1-s-i\varphi(k)|}.\end{aligned}$$

Iš čia randame

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\varphi(k))-\zeta_n(s+i\varphi(k))|\leqslant I+Z, \tag{4.3}$$

čia

$$I=\frac{1}{2\pi N}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{N}\Big|\zeta(\frac{1}{2}+\epsilon+i(t+\varphi(k))\Big|\Big)$$
$$\times\sup_{s\in K}\frac{|l_n(\frac{1}{2}+\epsilon-s+it)|}{|\frac{1}{2}+\epsilon-s+it|}dt$$

ir

$$Z=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sup_{s\in K}\frac{|l_n(1-s-i\varphi(k))|}{|1-s-i\varphi(k)|}.$$

Yra žinoma, kad gama funkcijai yra teisingas įvertis

$$\Gamma(\sigma+it)\ll\exp\{-a|t|\},\quad a>0,$$

kuris yra tolygus bet kuriame intervale $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$. Todėl

$$\frac{|l_n(\frac{1}{2}+\epsilon-s+it)|}{|\frac{1}{2}+\epsilon-s+it|}\ll_{\hat\sigma} n^{\frac{1}{2}+\epsilon-\sigma}\exp\{-\frac{a}{\hat\sigma}|t-v|\}\ll_{\hat\sigma,K} n^{-\epsilon}\exp\{-\frac{a}{\hat\sigma}|t-v|\}.$$

Panašiai samprotaudami, gauname įvertį

$$\frac{|l_n(1-s-i\varphi(k))|}{|1-s-i\varphi(k)|}\ll_{\hat\sigma,K} n^{\frac{1}{2}-2\epsilon}\exp\{-\frac{a}{\hat\sigma}\varphi(k)\}.\tag{4.4}$$

Pritaikę Koši nelygybę ir 3.3 lemą turime

$$\sum_{k=1}^{N}\Big|\frac{1}{2}+\epsilon+i(t+\varphi(k))\Big|\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{N}\Big|\frac{1}{2}+\epsilon+i(t+\varphi(k))\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\ll N(1+|t|)^{\frac{1}{2}}\ll N(1+|t|).$$

Taigi,

$$I\ll_{\hat\sigma,K} n^{-\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t|)\exp\{-\frac{a}{\hat\sigma}|t|\}dt\ll_{\hat\sigma,K} n^{-\epsilon}.\tag{4.5}$$

Dydį Z užrašome pavidalu

$$Z=Z_1+Z_2,$$

čia sumoje Z_1 sumuojame pagal $1\leqslant k\leqslant\log N$, o sumoje Z_2 pagal $\log N\leqslant k\leqslant N$. Tuomet iš (4.4) ir klasės U apibrėžimo gauname, kad

$$Z_1\ll_{\hat\sigma,K}\frac{\log N}{N}n^{\frac{1}{2}-2\epsilon},\tag{4.6}$$

$$Z_2\ll_{\hat\sigma,K}\frac{n^{\frac{1}{2}-2\epsilon}}{N}\sum_{\log N<k\leqslant N}\exp\Big\{-\frac{a}{\hat\sigma}\varphi(k)\Big\}\ll_{\hat\sigma,K}\frac{n^{\frac{1}{2}-2\epsilon}}{N}\exp\Big\{-\frac{a}{\hat\sigma}\varphi(\log N)\Big\}$$
$$\times\sum_{k\leqslant N}1\ll_{\hat\sigma,K}\frac{n^{\frac{1}{2}-2\epsilon}}{N}N\exp\Big\{-\frac{a}{\hat\sigma}\varphi(\log N)\Big\}\ll_{\hat\sigma,K} n^{\frac{1}{2}-2\epsilon}\exp\Big\{-\frac{a}{\hat\sigma}\varphi(\log N)\Big\}.$$

Kadangi $\varphi(k)\to\infty$, tai $\exp\{-\frac{a}{\hat\sigma}\varphi(\log N)\}\to_{N\to\infty}0$. Iš čia ir (4.6) gauname, kad

$$Z\ll_{\hat\sigma,k}\frac{\log N}{N}n^{\frac{1}{2}-2\epsilon}+n^{\frac{1}{2}-2\epsilon}\exp\Big\{-\frac{a}{\hat\sigma}\varphi(\log N)\Big\}.$$

Tada iš (4.3) ir (4.5) randame, kad

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\varphi(k))-\zeta_n(s+i\varphi(k))|$$
$$\ll_{\hat{\sigma},K} n^{-\epsilon}+\frac{\log N}{N}n^{\frac{1}{2}-2\epsilon}+n^{\frac{1}{2}-2\epsilon}\exp\Big\{-\frac{a}{\hat{\sigma}}\varphi(\log N)\Big\}.$$

Šiame įvertyje paėmę $N\to\infty$, o paskui $n\to\infty$, gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\varphi(k))-\zeta_n(s+i\varphi(k))|=0.$$

Iš čia ir metrikos ρ apibrėžimo gauname teoremos tvirtinimą.

5 Ribinė teorema

Aibėms $A \in \mathcal{B}(H(D))$ apibrėžiame

$$P_N(A) = \frac{1}{N}\#\Big\{1 \leqslant k \leqslant N : \zeta(s + i\varphi(k)) \in A\Big\}.$$

Šiame skyrelyje nagrinėsime P_N, kai $N \to \infty$, silpnąjį konvergavimą. Ribinio mato apibrėžimui apibrėžiame $H(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$\zeta(s,\omega) = \prod_p \Big(1 - \frac{\omega(p)}{p^s}\Big)^{-1},$$

čia sandauga imama pagal visus pirminius skaičius. Yra įrodoma [5], kad pastaroji begalinė sandauga su beveik visais ω mato m_H atžvilgiu konverguoja tolygiai kompaktinėse juostos D aibėse. Tegul P_ζ yra atsitiktinio elemento $\zeta(s,\omega)$ pasiskirstymas, tai yra,

$$P_\zeta(A) = m_H\{\omega \in \Omega : \zeta(s,\omega) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Tegul P yra tikimybinis matas $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$, o $\mathbb{X}$ yra separabili erdvė (joje egzistuoja skaiti ir visur tiršta aibė). Mato P atrama yra vadinima tokia uždara minimali aibė $S_p \subset \mathbb{X}$, kad $P(S_p) = 1$. Aibę S_p sudaro tokią erdvės X elementai x, su kurių kiekviena atvirąja aplinka G yra teisinga nelygybė

$$P(G) > 0.$$

Priminsime dvi sąvokas iš silpnojo tikimybinio mato konvergavimo teorijos. Sakome, kad tikimybinų matų šeima $\{\mathbf{P}\}$ erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$ yra suspausta, jei kiekvieną $\epsilon > 0$ atitinka tokia kompaktinė aibė $K \subset \mathbb{X}$, kad su visais $P \in \{\mathbf{P}\}$ yra teisinga nelygybė

$$P(K) > 1 - \epsilon.$$

Šeima $\{\mathbf{P}\}$ yra vadinama reliatyviai kompaktinė, jeigu iš kiekvienos tos šeimos sekos galime išskirti silpnai konverguojantį posekį.

Suspaustumo ir reliatyvaus kompaktiškumo sąvokas suriša Prochorovo teorema [2], kurią formuluojame atskira lema.

5.1 lema. *Jeigu matų šeima yra suspausta tai ji yra ir reliatyviai kompaktinė.*

Mums dar yra reikalinga viena lema apie atsitiktinių elementų konvergavimą pagal pasiskirstymą.

5.2 lema. *Tarkime, kad* $(\mathbb{X}, d)$ *yra separabili metrinė erdvė,* X_{kn} *ir* Y_n, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, *yra* $\mathbb{X}$ *reikšmiai atsitiktiniai elementai apibrėžti toje pačioje tikimybinėje erdvėje su matu* μ, $X_{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X_k$ *ir* $X_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} X$. *Jeigu su kiekvienu* $\epsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mu\Big\{d(X_{kn}, Y_n) \geqslant \epsilon\Big\} = 0,$$

tai tuomet $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$.

Lemos įrodymas yra [2] monografijoje, 4.2 teorema.

Tegul

$$S = \Big\{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \quad \text{arba} \quad g(s) \equiv 0\Big\}.$$

5.3 teorema. *Tarkime, kad* $\varphi \in U$. *Tuomet* P_N, *kai* $N \to \infty$, *silpnai konverguoja į matą* P_ζ. *Be to, mato* P_ζ *atrama yra aibė* S.

Įrodymas. Naudosime atsitiktinių elementų konvergavimą pagal pasiskirstymą ($\xrightarrow{\mathcal{D}}$). Primename, kad atsitiktiniai elementai konverguoja pagal pasiskirstymą, jeigu jų pasiskirstymai silpnai konverguoja.

Tegul θ_N yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas kurioje nors tikimybinėje erdvėje su matu μ ir turintis pasiskirstymą

$$\mu\{\theta_N = \varphi(k)\} = \frac{1}{N}, \quad k = 1, ..., N.$$

Apibrėžiame $H(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$X_{N,n} = X_{N,n}(s) = \zeta_n(s + i\theta_N).$$

Tuomet 5.2 lemos tvirtinimą galime užrašyti pavidalu

$$X_{N,n} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} X_n, \tag{5.1}$$

čia $X_n = X_n(s)$ yra $H(D)$ reikšmis atsitiktinis elementas, kurio pasiskirstymas yra matas V_n (ribinis matas 2.5 lemoje).

Kadangi Dirichlė eilutė, apibrėžianti funkciją $\zeta_n(s)$, konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$, tai nėra sudėtinga įrodyti (detales galima rasti [5] monografijoje), kad matų šeima $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta. Tuomet iš 5.1 lemos turime, kad ši šeima yra reliatyviai kompaktinė. Todėl egzistuoja toks posekis $\{V_{n_r}\} \subset \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, kai $r \to \infty$, silpnai konverguojantis į kurį nors tikimybinį matą P erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$. Kitaip tariant, turime sąryšį

$$X_{n_r} \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{5.2}$$

Apbirėžiame dar vieną $H(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$X_N = X_N(s) = \zeta(s + i\theta_N).$$

Elementams X_N ir $X_{N,n}$ tikriname 5.2 lemos sąlygą. Remdamiesi 4.1 lema, gauname

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mu\Big\{\rho(X_N, X_{N,n}) \geqslant \epsilon\Big\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\Big\{1 \leqslant k \leqslant N : \rho\Big(\zeta(s + i\varphi(k)), \zeta_n(s + i\varphi(k))\Big) \geqslant \epsilon\Big\} \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N\epsilon} \sum_{k=1}^{N} \rho\Big(\zeta(s + i\varphi(k)), \zeta_n(s + i\varphi(k))\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Ši lygybė kartu su sąryšiais (5.1),(5.2) rodo, jog yra išpildytos 5.2 lemos sąlygos. Taigi, gauname, kad

$$X_N \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{5.3}$$

Šis sąryšis yra ekvivalentus P_N, kai $N \to \infty$, silpnam konvergavimui į matą P. Be to, (5.3) sąryšis rodo, kad matas P nepriklauso nuo posekio $\{V_{n_r}\}$ parinkimo. Kadangi, seka $\{V_n\}$ yra raliatyviai kompaktinė, tai gauname, kad

$$V_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} P.$$

Taigi, gavome, kad matas P_N, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į mato V_n ribinį matą P, kai $n \to \infty$. Tačiau yra žinoma [3], kad mato V_n ribinis matas sutampa su matu P_ζ ir šio mato atrama yra aibė S. Teorema yra įrodyta.

6 Universalumo teoremos įrodymas

Šiame skyrelyje įrodysime pagrindinę magistro darbo teoremą, kuri buvo suformuluota įvade. Patogumui dar kartą pateikiame jos formulavimą.

6.1 teorema. *Tarkime, kad* $\varphi \in U$. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H_0(K)$. *Tuomet su* $\forall \varepsilon > 0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \Big\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\varphi(k)) - f(s)| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Teoremos įrodymas remiasi 5.3 teorema. Be to, yra naudojama Mergeliano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą daugianariais. Ją formuluojame atskira lema.

6.2 lema. *Tarkime, kad* $K \subset \mathbb{C}$ *yra kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija* $g(s)$ *yra tolydi aibėje* K *ir analizinė aibės* K *viduryje. Tuomet kiekvieną* $\epsilon > 0$ *atitinka toks daugianaris* $p(s)$, *su kuriuo teisinga nelygybė*

$$\sup_{s\in K} |g(s) - p(s)| < \epsilon.$$

Lemos įrodymas yra [6] straipsnyje.

6.1 teoremos įrodymas. Iš 6.2 lemos turime, kad egzistuoja toks daugianaris $p(s)$ su kuriuo yra teisinga nelygybė

$$\sup_{s\in K} |f(s) - e^{p(s)}| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{6.1}$$

Apibrėžiame aibę

$$G_\epsilon = \Big\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - e^{p(s)}| < \frac{\epsilon}{2} \Big\}.$$

Aibė G_ϵ yra atvira erdvėje $H(D)$, o funkcija $e^{p(s)} \in S$. Taigi, turime, kad aibė G_ϵ yra mato P_ζ atramos elemento $e^{p(s)}$ atviroji aplinka. Todėl pagal atramos savybes yra teisinga nelygybė

$$P_\zeta(G_\epsilon) > 0.$$

Kadangi pagal 5.3 teoremą P_N, $N \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_ζ, tai iš čia ir 2.1 lemos gauname, kad

$$\liminf_{N\to\infty} P_N(G_\epsilon) \geqslant P_\zeta(G_\epsilon) > 0.$$

Iš čia ir P_N bei G_ϵ apibrėžimų išplaukia nelygybė

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \Big\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\varphi(k)) - e^{p(s)}| < \frac{\epsilon}{2} \Big\} > 0. \tag{6.2}$$

Lieka pereiti nuo funkcijos $e^{p(s)}$ prie $f(s)$. Tarkime, kad $k \in \mathbb{N}$ tenkina nelygybę

$$\sup_{s\in K}\left|\zeta(s+i\varphi(k)) - e^{p(s)}\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Šiems k, remdamiesi (6.1) nelygybe, randame

$$\sup_{S\in K}|\zeta(s+i\varphi(k)) - f(s)| \leqslant \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\varphi(k)) - e^{p(s)}| + \sup_{s\in K}|f(s) - e^{p(s)}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ši nelygybė rodo, kad

$$\left\{1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\varphi(k)) - e^{p(s)}| < \frac{\epsilon}{2}\right\} \subset \left\{1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\varphi(k)) - f(s)| < \epsilon\right\}.$$

Iš čia ir (6.2) nelygybės gauname, kad

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left\{1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\varphi(k)) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Teorema įrodyta.

A gereralization of the universality theorem for the Riemann zeta-function

Greta Mazuraitė

Summary

The Riemann zeta-function $\zeta(s)$, $s = s + it$,is defirience, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s},$$

is analytically continued to the whole complex place, except for a simple pole at the point $s = 1$ with residue 1.

In 1975, S. M. Voronin discovered the universality property of the function $\zeta(s)$. Let $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subset of the stripe D with connected supplements, and by $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, the class of continuous non-vanishing functions on K that are analytic in the interior of K. Then the modern version of the Voronin theorem asserts if $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H_0(K)$, then, for every $\epsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\Big\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

In 1980, A. Reich proposed a discrete version of the Voronin theorem. He proved that if $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$, then, for every $\epsilon > 0$ and $h > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\Big\{1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

In the master work, we give a generalization of the discrete universality theorem.

Suppose that a real positive function $\varphi(t)$ is increasing in the interval $[\frac{1}{2}, \infty)$, the derivative $\varphi'(t)$ satisfies the estimate

$$\varphi(2t)\Big(\max_{t\leqslant u\leqslant 2t} \frac{1}{\varphi'(u)} + \max_{t\leqslant u\leqslant 2t} \varphi'(u)\Big) \ll t,$$

and the sequence $\{a\varphi(k) : k \in \mathbb{N}\}$, $a \neq 0$, is uniformly distributed modulo 1. Denote the class of the above functions by U.

The main result of the master work is the following theorem.

Theorem. Suppose that $\varphi \in U$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for the every $\epsilon > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\Big\{1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\varphi(k)) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Literatūra

[1] B. Bagchi, *The statistical behavior and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series,* Ph.D. Thesis, Calcutta, Indian Stat. Inst., 1981.

[2] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures,* Villey, New York, 1968.

[3] A. Dubickas, A. Laurinčikas, *Distribution modulo 1 and the discrete universality of the Riemann zeta-function,* Abh. Math. Semin,**86** (2016), 79-87.

[4] L. Kuipers, H. Niederreiter *Uniform distribution of sequences,*Pure Appl. Math., Wiley-Intersci., New Yrork, 1974.

[5] A. Laurinčikas, *Limit Theorems of the Riemann Zeta-Function,* Kluwer, Dortrecht, Boston, London, 1996.

[6] S.N. Mergelyan, *Uniform approximations to functions of a complex variable,* Uspekhi Mat. Nauk **7** (1952), no. 31-122; English transl.., Amer. Math. Soc. transl. **101** (1954),294-391.

[7] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory,* Lecture Notes in Math., vol. 227, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[8] V. Paulauskas, A. Račkauskas *Funkcinė Analizė I knyga. Erdvės,* UAB „Vaistų žinios“ , Vilnius, 2007.

[9] A. Reich, *Werteverteilung von Zetafunktionen,* Arch. Math. **34** (1980), no. 5, 440-451.

[10] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta - Function,* Clarendon Press, Oxford, 1986.

[11] S.M. Voronin, *Theorem on the „universality“ of the Riemann zeta-function,* Math. USSR Izv. **9**, 443-453, 1975.