

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS INSTITUTAS

Nikolajus Kozulinas

**Hemodinamikos patologijų modeliavimas ir
analizė**

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti

Darbo vadovas prof. Olga Štikonienė

Vilnius 2019

Turinys

1	Įvadas	2
1.1	Įvadas	3
1.2	Darbo tikslai ir uždaviniai	6
2	Hemodinamikos patologijų matematinė interpretacija	7
2.1	Pagrindinės kraujagyslių ligos ir jų gydymo būdai	7
2.1.1	Aterosklerozė	7
2.1.2	Arterijų trombozė	9
2.1.3	Galvos smegenų aneurizma ir arterioveninės malformacijos . . .	10
2.2	Navjė ir Stokso uždavinys	13
2.2.1	Navjė ir Stokso lygčių sprendimas skaitiniais metodais	16
2.2.2	Niutoninis modelis ir Karo modelis	25
2.2.3	Medicininės išvados daromos gavus greičio aproksimaciją	26
3	Hemodinamikos patologijų modeliavimas COMSOL Multiphysics programine įranga ir rezultatų aptarimas	27
3.1	Aterosklerozė	28
3.2	Arterijų trombozė	31
3.3	Galvos smegenų aneurizma	33
4	Išvados ir tolimesni veiksmai	37
	Summary	38
	Literatūra	38

Įvadas

1.1 Įvadas

Žinoma, kad viena iš labiausiai paplitusių žmonių mirtingumo priežasčių pasaulyje - tai širdies ir kraujagyslių ligos. Didžiąją jų dalį sudaro aterosklerozė, dėl kurios pažeidžiamos stambios ir vidutiniosios arterijos: aorta ir stambiosios aortos šakos, širdies vainikinės, smegenų, kojų, pasaito bei inkstų arterijos [24]. Be to, dažniausiai sutrinka iškart kelios iš jų, todėl patologinio proceso įtaką ir vystymąsi būtina tirti kraujagyslių tinkle.

Kitas susirgimas, širdies ir kraujagyslių ligų komplikacija, yra plaučių arterijos tromboembolija. Pagrindinė jos priežastis - flutuojantys trombai, kurie susidaro galūnėse ir juda su kraujo srautu. Jiems sustabdyti į apatinę tuščiąją veną implantuoja filtrus.

Aneurizmas ir arteriovenines malformacijas šalina irgi chirurginiais būdais. Pradėjus taikyti cerebrinę angiografiją, arteriovenines malformacijas pasidarė įmanoma įvertinti iki operacijos. Dėl šiuolaikinių neurovizualizacijos galimybių jos vis dažniau nustatomos iki plyšimo ir intrakranijinės kraujosruvos bei kitų sunkių komplikacijų. Arterioveninių malformacijų gydymo galimybes labai praplėtė sparti mikrochirurginės technikos, endovaskulinių gydymo metodų, spindulinės terapijos pažanga [3].

Svarbi šiuolaikinės medicinos užduotis - širdies ir kraujagyslių ligų gydymas ir profilaktika. Jų tyrimuose vis svarbesnį vaidmenį atlieka matematinis modeliavimas taikant skaitinius metodus. Tai leidžia prognozuoti chirurgines operacijas, optimizuoti implantų formą, tirti jų įtaką hemodinamikai.

Vienas pirmųjų širdies ir kraujagyslių sandarą aprašė Viljamas Harvėjus ¹ [9].

¹William Harvey (1578–1657) – anglų medikas ir fiziologas.

Jis paaiškino kvėpavimą ir pulsą, plačiai aprašė širdies veiklą, kraujagyslių fiziologiją. Harvėjus nustatė kraujo kelią bei dviejų kraujotakos ratų uždaramą. Tolimesnis šios srities vystymasis susijęs su ne tik su empiriniais gydytojų ir anatomų stebėjimais, bet ir su besivystančiais tiksliaisiais mokslais, kurie teikė informaciją apie dujų, skysčių, audinių savybes. Be to, viduramžiais dauguma mokslininkų buvo ne tik vienos srities specialistais, daugelis gydytojų buvo fizikais. Todėl tam tikri fiziologiniai reiškiniai buvo aprašomi kaip mechaniniai ir matematiniai. Pavyzdžiui, fundamentalios hidrodinamikos, t.y. Oilerio ir Bernulio lygtys, aprašančios idealaus skysčio tekėjimą, pirmąkart buvo skirtos aprašyti kraujo tekėjimui kraujagyslių tinkle.

Mokslui besivystant siaurėjo mokslininkų specializacija: medicina pradėjo užsiimti tik gydytojais, o detaliais gamtos reiškinų tyrimais - fizikai ir inžinieriai. Vienas iš pastarųjų buvo prancūzų inžinierius K. Navjė ², kuris 1821 metais užrašė diferencialines lygtis, aprašančias klampaus nespūdaus skysčio tekėjimą, remdamasis tam tikru molekulinio dėsnio. Gan greitai paaiškėjo, kad kai kuriomis medžiagomis postuluotas K. Navjė molekulių sąveikos dėsnis netinka. Po 20 metų (1845m.) jaunas anglų mokslininkas G. Stoksas ³ gavo analogiškas lygtis, remdamasis kontinuumo mechanikos principais. Todėl ši lygčių sistema vadinama Navjė ir Stokso vardu [19].

Savo ruožtu medikai ir biologai tirdami kraujotaką padarė nemažai atradimų. XIX amžiaus vokiečių patologas R. Firchou aprašė leukocitų diapedezę iš kraujo į audinius. Jis paaiškino aterosklerozinių plokštelių prigimtį ir parodė, kad aterosklerozė - tai aktyvus audinių reakcijos procesas, o ne savaiminė riebalų enkrustacija [15]. 1793 metais britų chirurgas Dž. Hanteris pasiūlė hipotezę, kad venų trombozė - tai krešulių okliuzija, ir remdamasis tuo atliko nemažai operacijų liguodamas venas, tokiu būdu išvengiant plaučių tromboembolijos. Nors tuo metu apatinės tuščiosios venos ligavimas atrodė nevienareikšmis, šis metodas tapo plačiai naudojamas XIX amžiaus pabaigoje [8]. Intrakranijinių aneurizmų operacinio gydymo istorija ne tokia sena. Pirmą žinomą aneurizmos pašalinimo operaciją buvo atlikta 1933 metais škotų neurochirurgo N. Doto. Plyšusi arterija buvo suvyniota [6]. Pirmas obliteratyvus aneurizmos užspaudimas buvo atliktas V. Dendžio 1938 metais [5]. Operatyvus gydymas pradėtas taikyti plačiau po specializuoto chirurginio mikroskopo 1960-ais metais [13] ir nimodipino, kalcio jonų blokatoriaus, atradimo.

²Claude-Louis Navier (1785–1836) – French engineer and physicist who specialized in mechanics.

³George Gabriel Stokes (1819–1903) – anglų Anglo-Irish physicist and mathematician.

Tokiu būdu lygiagrečiai vystėsi inžinierinės, medicininės ir biocheminės technologijos bei gausėjo atradimų. Tačiau pastaraisiais dešimtmečiais fizikų, matematikų ir gydytojų sąveika įgavo visiškai kitokias formas. Išvardintų mokslų sankirtoje atsirado nauja tyrimų sritis: fizikinių procesų, mūsų atvejų, kraujotakos, modeliavimas.

Šiame darbe bus aptartas vienas pagrindinių kraujotakos modeliavimo būdų, vadinamas skysčio tekėjimo uždavinių skaitinio sprendimo metodais (*angl.* computational fluid dynamics, toliau - CFD). Kaip žinia, dalinių išvestinių diferencialinių lygčių dažnai neįmanoma išspręsti analiziniu būdu, o naudojant baigtinių elementų metodus ir modeliuojant skysčių ir dujų tekėjimo uždavinius, lygtys sprendžiamos iš anksto sudaryto tinklo, dengiančio dominantį kontūrą taškuose, ir tokiu būdu gaunamas apytikslis sprendinys.

Iš medicininės pusės viena svarbiausių šiuolaikinės angiochirurgijos ir flebologijos užduočių - tai kraujagyslių ligų gydymo būdų tobulinimas. Dėl etinių sumetimų vienintelis įmanomas būdas naujoms technologijoms atrasti yra kraujo tekėjimo modeliavimas su įvairia programine įranga. Šiame darbe bus trumpai aprašytos labiausiai paplitusios kraujagyslių ligos (aterosklerozė, tromboembolija, galvos smegenų aneurizma ir arterioveninės malformacijos) bei jų gydymo būdai. Esant visoms šioms patologijoms keičiasi kraujo tekėjimo gretis, todėl sprendžiant Navjė ir Stokso lygtis skaitiniais metodais galima gauti svarbius medikams rezultatus. Vėliau, mokslinio tyrimo skyriuje, gydymo būdai bus sumodeliuoti, o gauti rezultatai aptarti.

1.2 Darbo tikslai ir uždaviniai

Magistro baigiamajam darbui buvo keliami šie tikslai:

- Apjungti biomedicininės, angiochirurginės ir matematinės žinias;
- Sumodeliuoti pagrindines kraujagyslių ligas COMSOL Multiphysics programine įranga;
- Sumodeliuoti kraujagysles po ambulatorinio gydymo arba chirurginės intervencijos COMSOL Multiphysics programine įranga;

Siekiant šių tikslų, darbo metu buvo keliami šie uždaviniai:

- Gauti kraujo tekėjimo greičių pasiskirstymą kraujagyslėse dvimačiu atveju;
- Pagal kraujo tekėjimo greitį nustatyti, kuriai klasei priklauso susirgimas.

2 skyrius

Hemodinamikos patologijų matematinė interpretacija

Šiame skyriuje bus trumpai aprašytos labiausiai paplitusios kraujagyslių ligos, jų gydymo būdai, ir pagrindiniai aspektai, kuriuos galima matematiškai sumodeliuoti.

2.1 Pagrindinės kraujagyslių ligos ir jų gydymo būdai

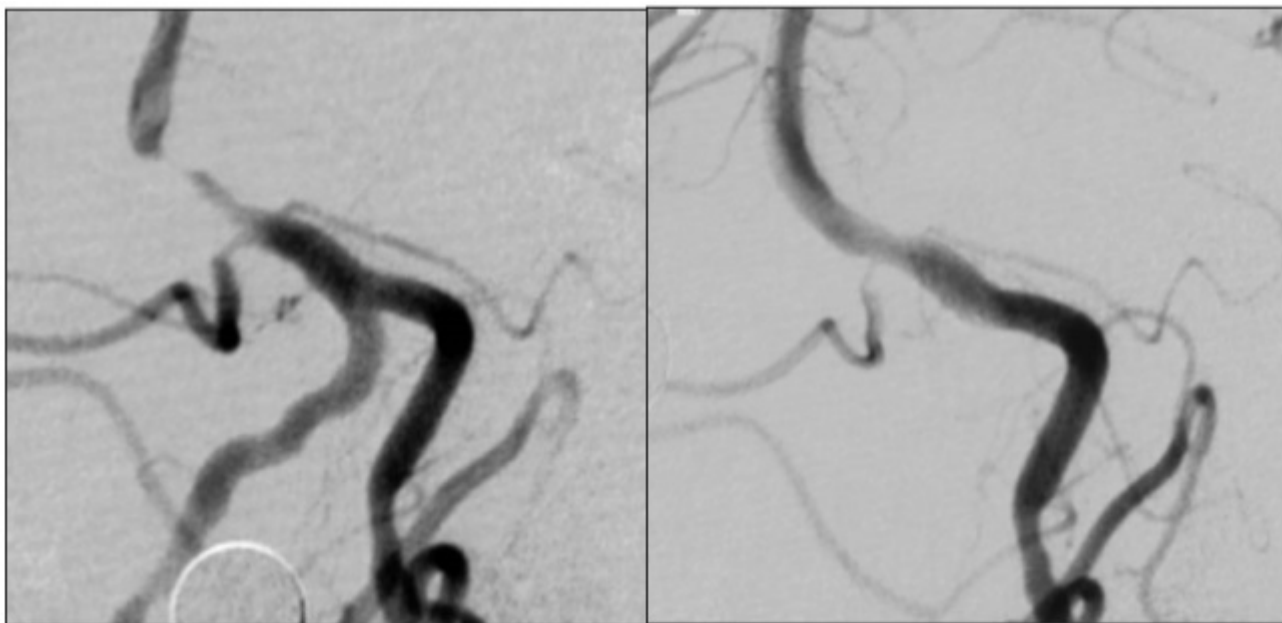
2.1.1 Aterosklerozė

Aterosklerozė - tai vienas iš arterijų sukietėjimo (arteriosklerozės) atvejų, plokštelių susidarymas kraujagyslių endotelio paviršiuje dėl padidėjusios žemo tankio lipoproteino (LDL) cholesterolio koncentracijos kraujo plazmoje. Laikui bėgant plokštelės, sudarytos iš riebalų, chloesterolio, kalcio jonų ir kitų komponentų susiaurina arteriją, o tai riboja kraujo ir jame esančio deguonies patekimą į gyvybiškai svarbius organus. Aterosklerozė gali paveikti kraujagysles daugelyje organų: širdies, smegenų, galūnių, dubens, inkstų arterijas. Dėl to gali išsivystyti skirtingos komplikacijos. Toliau bus išvardintas keletas iš jų.

Išeminė širdies liga atsiranda, kai širdies arterijos negali transportuoti pakankamo kiekio kraujo į širdies raumens audinius, kuomet reikalingas didelis deguonies kiekis esant stresui arba fiziniam krūviui. Vieną išeminės širdies ligos atvejų koronarinę širdies ligą sukelia koronarinėse arterijose susiformuojanti aterosklerozinė

plokštelė, kuri pilnai arba dalinai stabdo kraujo tekėjimą į širdį. Hemisferinis karotidinės arterijos sindromas atsiranda dėl kaklo arterijose susiformavusių plokštelių, todėl kraujo tekėjimas į smegenis sumažėja arba užsiblokuoja išvis. Periferinė arterijų liga atsiranda, kai plokštelė susiformuoja pagrindinėse arterijose, kurios aprūpina deguonimi prisotintu krauju galūnes. Lėtinė inkstų ligos priežastis - plokštelė, susidariusi inkstų arterijose, sukeldama inkstų disfunkciją, o dėl to organizmas blogiau šalina nereikalingus skysčius.

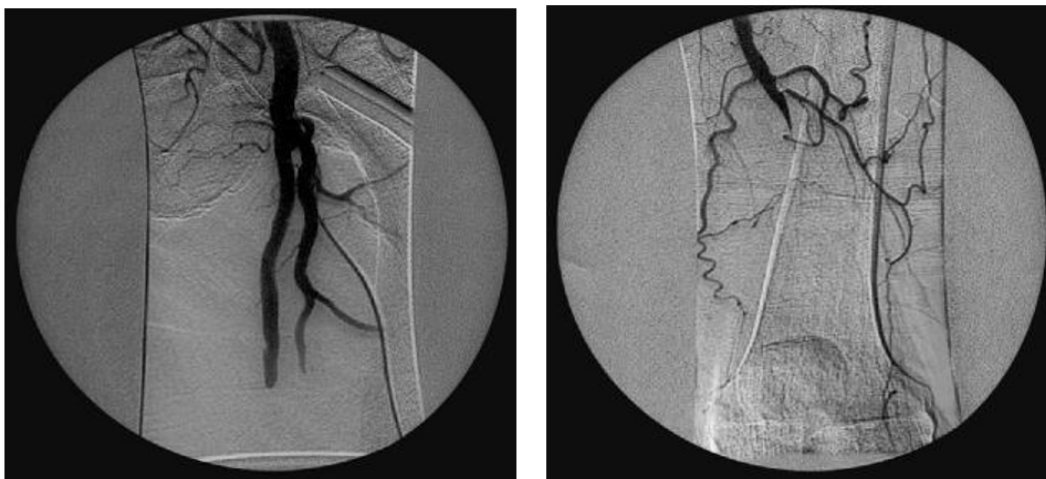
Pagrindiniai operaciniai gydymo būdai yra aortos ir širdies vainikinių arterijų jungčių sudarymas (širdies kraujagyslių operacija arba šuntavimas) ir perkutaninė transliuminalinė koronarinė angioplastika (PTKA). Šių gydymo būdų tikslas yra pašalinti ar sumažinti pacientų simptomus ar problemas, ir taip pat sumažinti riziką susirgti miokardo infarktu. Miokardo infarktas atsiranda visiškai užsikišus širdies vainikinei arterijai, o dėl to yra pažeidžiamas širdies raumuo. Koronarinė širdies liga gali būti gydoma tik vaistais arba kombinuojama su kuriuo nors vienu iš aukščiau išvardintų gydymo būdų. Vaistai nepašalina susiaurėjimų, jie gali tik pagerinti širdies darbą ir sumažinti simptomus. Aortos ir širdies vainikinių arterijų jungčių sudarymas, kartais dar vadinamas „širdies šuntavimu“ - būdas sudaryti naujus kanalus kraujui tekėti aplink užsikišusias vietas širdies vainikinėse arterijose. Tai atviros chirurgijos operacija, atliekama pilnoje narkozėje. Chirurgai paima krūtinės arteriją arba veną iš kojos tam, kad sudarytų naują kanalą kraujui nutekėti aplink užsikišusią ar susiaurėjusią kraujagyslę. Jie prisiūva vieną kraujagyslės galą prie aortos ir kitą galą – vainikinės arterijos gale už užsikišusios ar susiaurėjusios vietos. Dabar jau kraujas iš aortos teka per naujai suformuotą jungtį į širdies raumenį. PTKA – procedūra, kuri atliekama išplečiant susiaurėjusią paciento vainikinę arteriją be chirurgijos. PTKA dar vadinama „vainikinių arterijų angioplastika“. Angioplastika yra būdas praplėsti susiaurėjusią ar visiškai užsidariusią vainikinę arteriją. PTKA pagrindinė idėja yra įvesti mažą balionėlį, su stentu ar be jo, kuris yra išplečiamas susiaurėjusios vainikinės arterijos vietoje. Plėsdamasis balionėlis traiško ir įspaudžia aterosklerotines plokšteles į arterijos sienelę ir taip panaikina buvusį susiaurėjimą. Stentas – tai segmentinis išplėsto baliono skersmens vamzdelis, kuris vėliau neleidžia arterijai subliūkšti ar susitraukti (2.1 pav.).



2.1 pav.: Smegenų arterijos angiograma prieš ir po stentavimo. Dėl aterosklerozės kraujotaka buvo pilnai užblokuota (okliuzija), o po stentavimo atstatyta. *Prof. M. Hartmann, Neurologijos skyrius, Heidelbergo Medicinos Universitetas, Vokietija* [2]

2.1.2 Arterijų trombozė

Arterijų trombozė – tai arterijų spindžio užsikimšimas krešuliu (trombu), susidariusiu ties pažeista kraujagyslės vieta. Arterijų embolija – tai spindžio užsikimšimas kraujo krešuliu, susidariusiu širdyje ar aortoje. Tokie iš toliau kraujagyslėmis atkeliaavę trombai vadinami embolais. Abi šios ligos bendrai vadinamos ūmine galūnės išemija. Susidarę ar iš toliau atkeliaavę krešuliai užkemša galūnių kraujagysles, staiga sutrikdydami jų kraujotaką. 95% embolų susidaro širdyje, žymiai rečiau – aortoje ar per atvirą ovaliąją angą širdies pertvareje atkeliauja iš giliųjų kojų venų. Didžioji dalis tokių krešulių patenka į kojų (ypač šlaunies) arterijas, rečiau - į rankų, kitų vidaus organų arterijas. Pagrindinė embolijos priežastis – virpamoji aritmija (prieširdžių virpėjimas), kiti širdies ritmo sutrikimai. Rečiau embolija įvyksta krešuliui susidarius dėl reumato, infekcinio endokardito, miokardito, dirbtinių širdies vožtuvų, persirgus miokardo infarktu. Arterijų trombozę dažniausiai sukelia periferinė arterijų aterosklerozė, rečiau – kraujo krešėjimo sutrikimas, išoriniai kraujagysles veikiantys veiksniai (pvz., greta esančių struktūrų sukeltas spaudimas). Vienas labiausiai paplitusių trombozės diagnostikos būdų yra angiografija (2.2 pav.).



2.2 pav.: Iš kairės. Angiograma. Šlaunies arterijos embolija Kontrastinės medžiagos kaupimasis virš užakimo vietos. Iš dešinės. Angiograma. Šlaunies arterijos trombozė Kontrastinės medžiagos nutrūkimas įstrižinės linijos pavidalo. Matomos smulkios kolateralinės arterijos. [4].

Galūnės ūminės išemijos pagrindinis gydymas yra operacija. Embolijos atveju – embolektomija, ūminės trombozės – trombektomija, trombendarterektomija, šuntavimo operacijos, rečiau: kateterinė trombolizė, perkutaninė transluminalinė angioplastika, subintimalinė rekanalizacija. Esant trečio laipsnio ūminei išemijai ir žuvus galūnės neuromuskulinei sistemai, atliekamos pirminės didžiosios ir mažosios amputacijos [4].

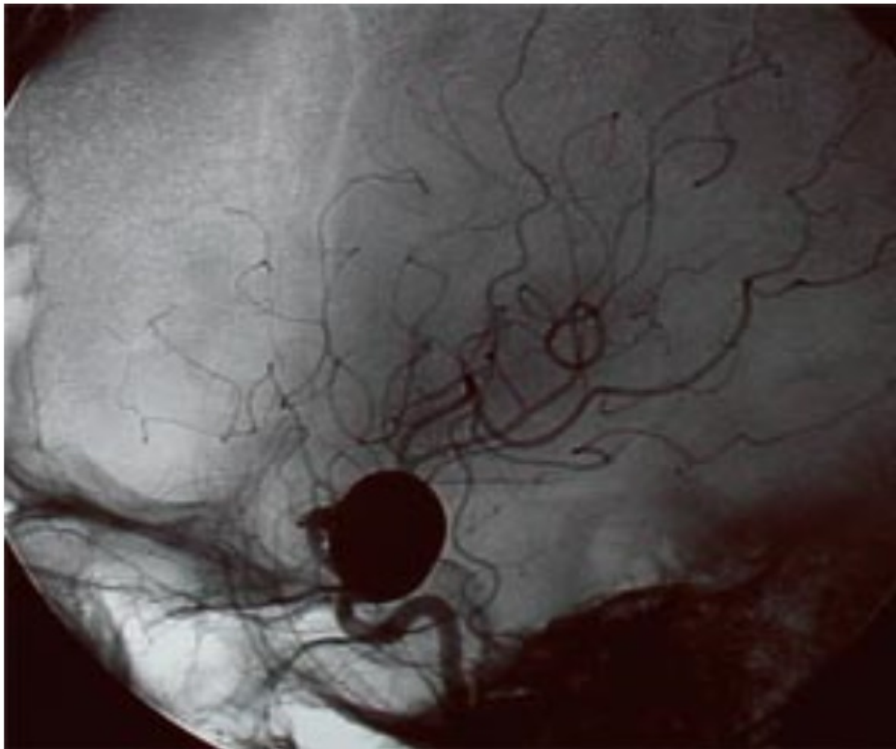
2.1.3 Galvos smegenų aneurizma ir arterioveninės malformacijos

Galvos smegenų aneurizma – tai nenormalus smegenų kraujagyslės dalies išsiplėtimas. Susilpnėjus ar susisluoksniavus kraujagyslės sienelei, ji išsipūčia lyg balionas (žr. 2.3 pav.). Pavojingiausia, kad ta vieta bet kada gali plyšti ir kraujas užlieti smegenis. Jei aneurizmos skersmuo $< 5,5 \text{ cm}$, rekomenduojama stebėti, ar aneurizma nedidėja ir skiriamas simptominis gydymas. Jei aneurizma per metus padidėja $> 1 \text{ cm}$, skersmuo būna $> 5 \text{ cm}$ ar atsiranda specifiniai simptomai, vykdoma operacija.

Jei nustatoma neplyšusi aneurizma, gydymas priklauso nuo daugelio veiksnių. Apskritai neplyšusių aneurizmų gydymas yra kontraversiškas, nes tiksliai nustatyti

kuri aneurizma plyš, o kuri ne - neįmanoma. Atsižvelgiama į aneurizmos tipą, lokalizaciją, dydį, paciento amžių ir bendrą sveikatos būklę. Aneurizmai plyšus, ji lokalizuojama angiografijos (radiologinis kraujagyslių tyrimas, suleidžiant į kraujo tėkmę kontrastinės medžiagos) metu. Galimi įvairūs operacinio gydymo būdai:

- kabutės uždėjimas ant aneurizmos kaklo. Operacijos metu pašalinama dalis kaukolės kaulo, surandama aneurizma. Tuomet jos kaklas perspaudžiamas metaline kabute, aneurizma nebedalyvauja kraujotakoje;
- endovaskulinė embolizacija. Per kirkšnies arteriją į kraujagysles įvedamas tuščiaaviduris plastikinis vamzdelis (kateteris). Kateteriu nukeliaujama iki kraujagyslės galvos smegenyse, kurioje yra aneurizma. Tuomet per kateterį specialia viela į aneurizmos spindį įstumiami minkštos platinos spiralė. Spiralė susiveja aneurizmos spindyje, ten susiformuoja kraujo krešulys ir taip aneurizma išjungžiama iš kraujotakos.



2.3 pav.: Galvos smegenų aneurizmos angiograma. Arterija išsiplėtusi subarachnoidinėje galvos smegenų dalyje [20].

Arterioveninės malformacijos (AVM) yra įgimta kraujagyslių anomalija. Tai kraujagyslių sklaidos defektas, kuriam būdingas tiesioginis kraujo tekėjimas iš arterijų į venas be kapiliarų tinklo, būtino normaliai kraujotakai. Fistulės centrinė

dalį dažniausiai būna sudaryta iš nenormaliai išsivysčiusio kraujagyslių rezginio ir vadinama arterioveninės malformacijos židiniu. Arterioveninės malformacijos dėl patologinės kraujotakos yra agresyviausia ir grėsmingiausia kraujagyslių displazijų rūšis, sutrikdanti audinių mitybą ir nenuspėjamai progresuojanti iki gyvybei pavojingų komplikacijų [11].

Galvos smegenų aneurizmas ir arteriovenines malformacijas galima gydyti medikamentais arba operatyviai. Pirmu atveju naudojami prieštraukuliniai preparatai, kurie būti skiriami traukulių profilaktikai, nuskausminantys preparatai – galvos skausmui sumažinti. Nimodipinas skiriamas sumažinti kraujagyslių vazospazmui (susiaurėjimui, kuris gana dažnai išsivysto plyšus aneurizmai). Nuo V. Dendžio pirmos operacijos su „V-užspaudimu“ arterijų kabutės išsivystė į daugelį skirtingų formų ir dydžių. Aneurizma užspaudžiama kraniotomijos būdu, t.y. operatyvus gydymas, kai galvos smegenų kraujagyslės pasiekiamos pradarius kaukolę. Kai aneurizma aptinkama, ji atskiriama nuo supančių ją nervinių audinių. Maža kabutė, dažniausiai pagaminta iš titano įdedama į aneurizmos kaklelį. Tinkamai užspaudus, kraujagyslės normalus funkcionavimas atsistato, kadangi aneurizmos maišelis atskiriamas nuo kraujotakos [20].

2.2 Navjė ir Stokso uždavinys

Esant aukščiau išvardintoms hemodinamikos patologijoms sutrinka įprastas kraujo tekėjimo greitis, kuris gali būti aprašomas Navjė ir Stokso lygtimis. Šiame skyriuje pagal [19] monografiją bus suformuluotos pagrindinės Navjė ir Stokso lygčių teorijos sąvokos ir tvirtinimai.

Tegul $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, - klampaus nespūdaus skysčio tekėjimo sritis, $\partial\Omega$ - jos kraštas. Tuomet Navjė ir Stokso lygčių sistema, nusakanti tokio skysčio tekėjimą, užrašoma taip:

$$\begin{cases} \rho \mathbf{v}_t - \nu \Delta \mathbf{v} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \rho \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

čia $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1(\mathbf{x}, t), \dots, v_n(\mathbf{x}, t))$ - skysčio greičio vektorius taške $\mathbf{x} \in \Omega$ ir laiko momentu t , $p = p(\mathbf{x}, t)$ - skysčio slėgis, $\nu > 0$ - skysčio kinematinės klamos koeficientas, priklausantis nuo skysčio absoliučios klamos ir tankio, $\rho > 0$ - skysčio tankis, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = (f_1(\mathbf{x}, t), \dots, f_n(\mathbf{x}, t))$ - išorinių jėgų, veikiančių skystį, vektorius. Kadangi skystis yra nespūdas, tai jo tankis yra pastovus, ir toliau bus laikoma, kad $\rho = 1$.

Kraujo tekėjimo greitį aprašančioje (2.1) lygčių sistemoje \mathbf{v}_t reiškia greičio vektoriaus $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ išvestinę kintamojo t (laiko) atžvilgiu, Δ yra Laplaso operatorius, t.y.

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_n^2},$$

∇ - gradientas kintamųjų \mathbf{x} atžvilgiu:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ - greičio vektoriaus $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ divergencija:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial v_1(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n(\mathbf{x}, t)}{\partial x_n},$$

Skaliarinė daugyba iš \mathbb{R}^n žymima tokiu būdu:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n a_j b_j, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Taigi $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ir netiesinį narį $(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ galima užrašyti taip:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t),$$

$$(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n v_j(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}. \quad (2.2)$$

Pirmoji sistemos (2.1) lygtis aprašo skysčio judėjimo kiekio kitimo dėsnį, o antroji reiškia skysčio nespūdumą, t.y. lygtis $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ atitinka masės tvermės dėsnį.

Kadangi klampus skystis prilimpa prie tekėjimo srities krašto $\partial\Omega$ ir kartu juda, tai papildomai reikia užduoti kraštinę sąlygą

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \alpha(\mathbf{x}, t), \text{ kai } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2.3)$$

čia $\alpha(\mathbf{x}, t)$ aprašo $\partial\Omega$ judėjimą. Be to, turi būti užduotas pradinis skysčio greitis laiko momentu $t = 0$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \text{ } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.4)$$

Taigi iš (2.1), (2.3), (2.4) gauname tokį pradinį ir kraštinį uždavinį Navjė ir Stokso lygčių sistemai:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_t - \nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{v}|_{S^T} = \alpha, & (\mathbf{x}, t) \in S^T, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

čia $S^T = \partial\Omega \times (0, T)$, o $(0, T)$ yra laiko intervalas, kuriame nagrinėjamas skysčio tekėjimas. Pradinio ir kraštinio uždavinio (2.5) nežinomieji yra greičio vektorius $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ir slėgis $p(\mathbf{x}, t)$, o $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $\alpha(\mathbf{x}, t)$ ir $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ yra duoti. Sprendžiant kraujo tekėjimo uždavinius daroma prielaida, kad kraujagyslės sienelė nejuda, t.y. $\alpha = 0$.

Toliau bus išnagrinėtas nestacionariosios Navjė ir Stokso lygčių sistemos reguliariųjų sprendinių egzistavimas ir vienatis dvimačiu atveju. Suformuluotos dvi lemos bei teorema apie sprendinio egzistavimą ir vienatį.

1 lema. Tegul $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - aprėžtoji sritis, $0 < T < \infty$, $\mathbf{v} \in W_2^{2,1}(\Omega^T)$, $\mathbf{v}|_{S^T} = 0$. Tada $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \in L_2(\Omega^T)$, ir teisinga nelygybė

$$\int_0^t \int_{\Omega} |(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)|^2 dx d\tau \leq \varepsilon \int_0^t \|\mathbf{v}(\cdot, \tau)\|_{W_2^2(\Omega)}^2 d\tau$$

$$+ c_\varepsilon \max_{0 \leq \tau \leq t} \|\mathbf{v}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^4 d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.6)$$

čia konstanta c_ε nepriklauso nuo T . [19] (psl. 102).

Lema įrodoma naudojantis Koši ir Švarco, paskui multiplikacine Puankarė ir Fridrichso nelygybe, bei integruojant gautą išraišką kintamojo t atžvilgiu ir remiantis Koši nelygybe. Lema svarbi, nes iš jos gauname, kad netiesinis operatorius \mathcal{N} , apibrėžtas formule

$$\mathcal{N}\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v},$$

veikia iš erdvės $W_2^{2,1}(\Omega^T)$ į erdvę $L_2(\Omega^T)$, t.y.

$$\mathcal{N} : W_2^{2,1}(\Omega^T) \rightarrow L_2(\Omega^T)$$

ir yra aprėžtas.

2 lema. Tegul $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - aprėžtoji sritis, $0 < T < \infty$. Tada operatorius $\mathcal{N} : W_2^{2,1}(\Omega^T) \rightarrow L_2(\Omega^T)$ visiškai tolydus. [19], (psl. 103).

Pastaroji lema panaudojama **3 teoremos** įrodymui.

Tegul $\overset{o}{V}_2^{1,1}(\Omega^T)$ - aibės $\mathcal{J}_0^\infty(\Omega^T)$ uždarinys pagal erdvės $W_2^{1,1}(\Omega^T)$ normą. Be to, $\overset{o}{V}_2^{1,1}(\Omega^T)$ - Hilberto erdvė. $\mathcal{J}_0^\infty(\Omega^T)$ apibrėžiama tokiu būdu:

$$\mathcal{J}_0^\infty(\Omega^T) = \{\mathbf{v} \in C^\infty(\Omega^T) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v}|_{S^T} = 0\}$$

Dabar galima suformuluoti teoremą apie sprendinio vienatį.

3 teorema. Tegul $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - aprėžtoji sritis, $\partial\Omega$ - klasės C^2 paviršius, $0 < T < \infty$, $\mathbf{v}_0 \in H(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L_2(\Omega^T)$. Tada (2.5) pradinis ir kraštinis uždavinys turi tokį vienintelį sprendinį (\mathbf{v}, p) , kad $\mathbf{v} \in W_2^{2,1}(\Omega^T) \cap \overset{o}{V}_2^{1,1}(\Omega^T)$, $\nabla p \in L_2(\Omega^T)$. [19], (psl. 106).

Kaip visada, slėgis $p(\mathbf{x}, t)$ yra vienintelis testinės funkcijos $\psi(t)$ tikslumu, t.y. $p(\mathbf{x}, t) + \psi(t)$ irgi yra sprendinys, ir jį galima išskirti sąlyga $\int_{\Omega} p(\mathbf{x}, t) dx = 0$.

Teorema įrodoma įvedant operatorinę lygtį, pritaikius Leré ir Šauderio teoremą ir integruojant (2.5) lygtį iš pradžių pagal sritį Ω , o paskui t atžvilgiu. Prieštaros būdu įrodoma sprendinio vienatis, t.y. daroma prielaida, kad egzistuoja du sprendiniai, kurie įrašomi į apibendrintos formuluotės lygtį, viena lygtis atimama iš kitos, gaunama išraiška, kurioje akivaizdu, kad skirtumas tarp dviejų prielaidos sprendinių lygus nuliui.

Pilną aukščiau išvardintų lemų ir teoremų įrodymą galima rasti [19] šaltinyje.

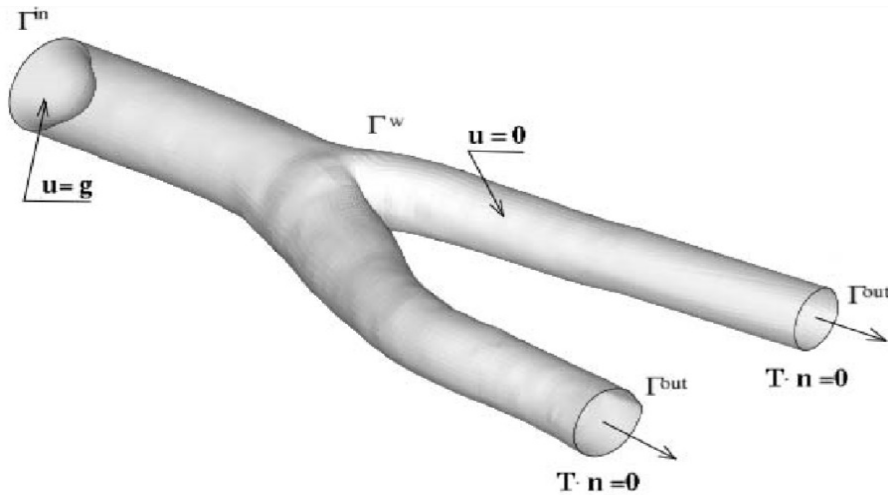
Kitame skyriuje bus išdėstyti svarbiausi dalinių išvestinių diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai, kurie taikytini Navjė ir Stokso lygtims.

2.2.1 Navjė ir Stokso lygčių sprendimas skaitiniais metodais

Skysčių dinamikos matematinės lygtys yra labai svarbios hemodinamikos modeliavimui. Tačiau, kraujas nėra įprastas skystis, tai dalelių suspensija plazmoje, o pastarosios pagrindinė sudedamoji dalis yra vanduo. Dalelių buvimas sukelia kraujo skystėjimą (*angl.* shear thinning), t.y. kai klampa mažėja didėjant deformacijai. Šis efektas turi didesnę įtaką mažesnėse kraujagyslėse: arteriolėse, venulėse, kapiliaruose. Vadinasi, galime suskirstyti kraujo tekėjimo modeliavimą: iš vienos pusės tai Niutoninio skysčio modelis, kuris ignoruoja kraujo skystėjimą ir tinkamas platesnėms kraujagyslėms arba kai nebūtina gauti labai tikslų rezultatą [18]. Iš kitos pusės, kraujagyslėse, kurių spindulys mažesnis nei 1 mm, Niutoniniai modeliai ne-naudotini. Mažas kraujo tekėjimo greitis ir skystėjimo efektas leidžia šiuo atveju išvengti Niutoninių modelių [17].

Taikant skaitinio sprendimo metodus, neniutoniniai modeliai, kuriuose įvertinama skysčio klampa, padidina skaičiavimo sąnaudas 10% [18], kadangi atsiranda papildomos sąlygos, o užduotis tampa nebe tiesinė, tai prailgina skaičiavimo laiką. Šiame darbe bus modeliuojamos tik plačiausios ir vidutinio dydžio kraujagyslės, kuriose kraujo tekėjimas aprašomas Navjė ir Stokso lygtimis.

Kaip matome 2.4 pav., kuriame pavaizduota karotidinė bifurkacija greičio profiliui proksimalinėje srityje Γ_{in} nustatyti, o tai arčiausia širdžiai dalis palei pagrindinę kraujo tekėjimo kryptį, kurią mes pažymime „įtekėjimo“ sritimi. Tegul distalinė širdies atžvilgiu srityse Γ_{out} (galima vadinti „ištekėjimo“ sritimis) greitis ant sienelių ir $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ yra lygūs nuliui. Tada proksimalinė ir distalinė sritys dažnai suvokiamos kaip dirbtinės sritys, kadangi jos neatitinka fizikinio sąryšio tarp skysčio ir išorės, bet



2.4 pav.: Tipinė skaičiavimų sritis. Karotidinės bifurkacijos modelis [18].

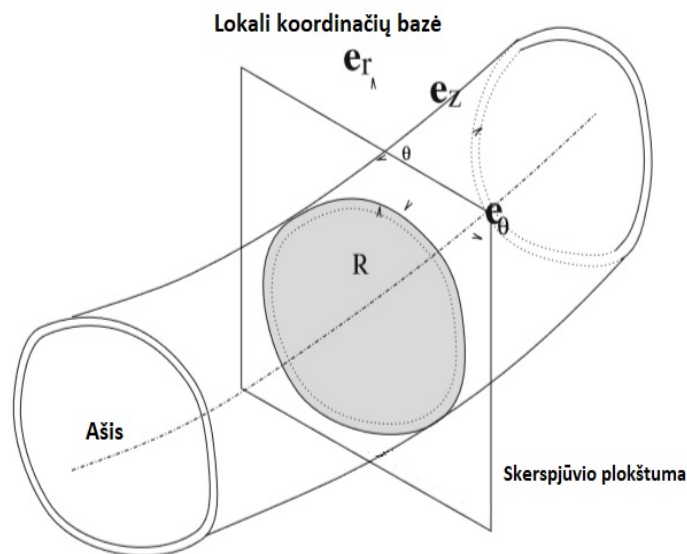
jos reikalingos atskirti tiriamą skaičiavimo sritį nuo likusios kraujotakos sistemos. Atliekant skysčių dinamikos skaičiavimus labai svarbu tinkamai užduoti kraštines sąlygas ant dirbtinių sričių.

Deja, hemodinaminėse skaičiavimuose dažniausiai nežinomas fizikinis „pradinės sąlygos“ atitikmuo. Tuomet v_0 pasirenkamas kaip laisvas kintamasis arba tiesiog nulis. Tačiau, tinkamai parinkus kraštines sąlygas, sprendimas vis tiek bus teisingas, nes po kelių širdies plakimų galima teigti, kad neteisinga pradinė sąlyga nebeturės įtakos. Be to, įtakos turi ir kraujagyslės sienelė, kadangi faktiškai ji nėra nejudanti. Todėl srauto skaičiavimus reikia pradėti nuo ketvirto širdies ciklo tam, kad klaidinga pradinė sąlyga nebeturėtų įtakos rezultatams [7].

Netgi didelėse kraujagyslėse pagrindinės srauto charakteristikos priklauso nuo geometrinio modelio. Nors kai reikalingas detalesnis tyrimas, pavyzdžiui, kerpamosios jėgos skaičiavimas arba recirkuliacijos srities dydis, labiau taikytini nuolaidūs (*angl.* compliant) metodai [10]. Be to, kai reikia įvertinti srauto pulsavimą, pavyzdžiui, tiriant slėgio pokyčius, sukeltus anomalinių pulsavimo bangų atoveikius aortos aneurizmoje [14], tuomet nuolaidūs metodai yra būtini, nes fiksuoti geometriniai modeliai paprastai negali aprašyti pulsavimo bangų: propagavimo greitis yra be galo didelis dėl nespūdaus skysčio. Tai tikrai mechaninė sąveika tarp kraujo srauto ir kraujagyslės sienelės deformacijos, kurią generuoja pulsavimo bangos. Tačiau, kartais pasirenkamas fiksuotas geometrinis modelis, nes nėra žinomų duomenų kraujagyslės sienelės mechaninėms savybėms apibūdinti. Suprantama, kad vykdant šiuos skaičiavimus didelėse kraujagyslėse vis tiek gaunama patikima bendro srauto

informacija.

Skaičiavimuose būna naudojami vienmačiai modeliai su cilindrine geometrija, tinkami tirti tik arterijoms be bifurkacijos. Sudaroma lokiali koordinačių sistema $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$, čia \mathbf{e}_z išsidėsčiusi pagal kraujagyslės ašį, o \mathbf{e}_r statmenas paviršiui. Atitinkamos cilindrinės koordinatės yra (r, θ, z) (2.5 pav.). Šio darbo mokslinio tyrimo dalyje bus daroma prielaida, kad kraujagyslė simetriška ašies atžvilgiu, todėl sprendinys nepriklausys nuo θ reikšmės. Toks atvejis vadinamas 2D modeliu su ašine simetrija.



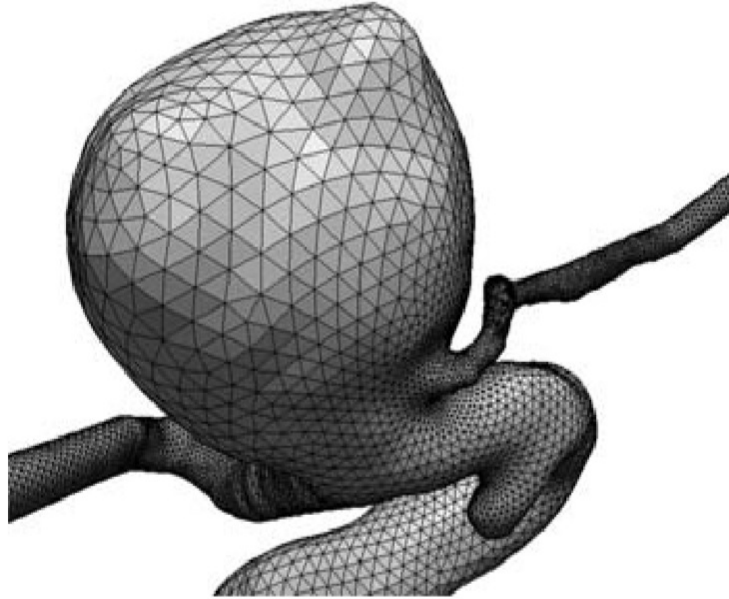
2.5 pav.: Kraujagyslės sienelės paviršiaus lokali koordinačių sistema [7].

Modeliuojant kraujagyslės svarbu įvertinti pulsavimą, kuris gali turėti įtakos kraujo recirkuliacijai šalia arterijos sienelės, o tai sumažina lipidų konglomeratų susidarymo stimuliaciją ir aterosklerozę. Be to, trumpuose laiko tarpuose kraujo tekėjimas yra periodiškasis. Kartais įvertinama kraujo temperatūra. Temperatūros evoliucijos aprašymas taikytinas pristatant dalinių išvestinių diferencialines lygtis, kurios išvedamos iš Navjė ir Stokso lygčių. Didelėse ir mažose kraujagyslėse, kurios bus tiramos šiame darbe, temperatūros įtaka yra minimali, todėl galime jos nepaisyti [7].

Išskyrus keletą atvejų analitiškai neįmanoma išspręsti aprašančių kraujo tekėjimą Navjė ir Stokso lygčių. Toliau bus trumpai aprašytos skaitinės metodikos, skirtos rasti sprendinio aproksimacijai. Greitis \mathbf{v} yra nežinomas lygtyse, kurios gali būti užrašomos pavidalu

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + L(\mathbf{v}) = f, \text{ srityje } \Omega, 0 < t < T,$$

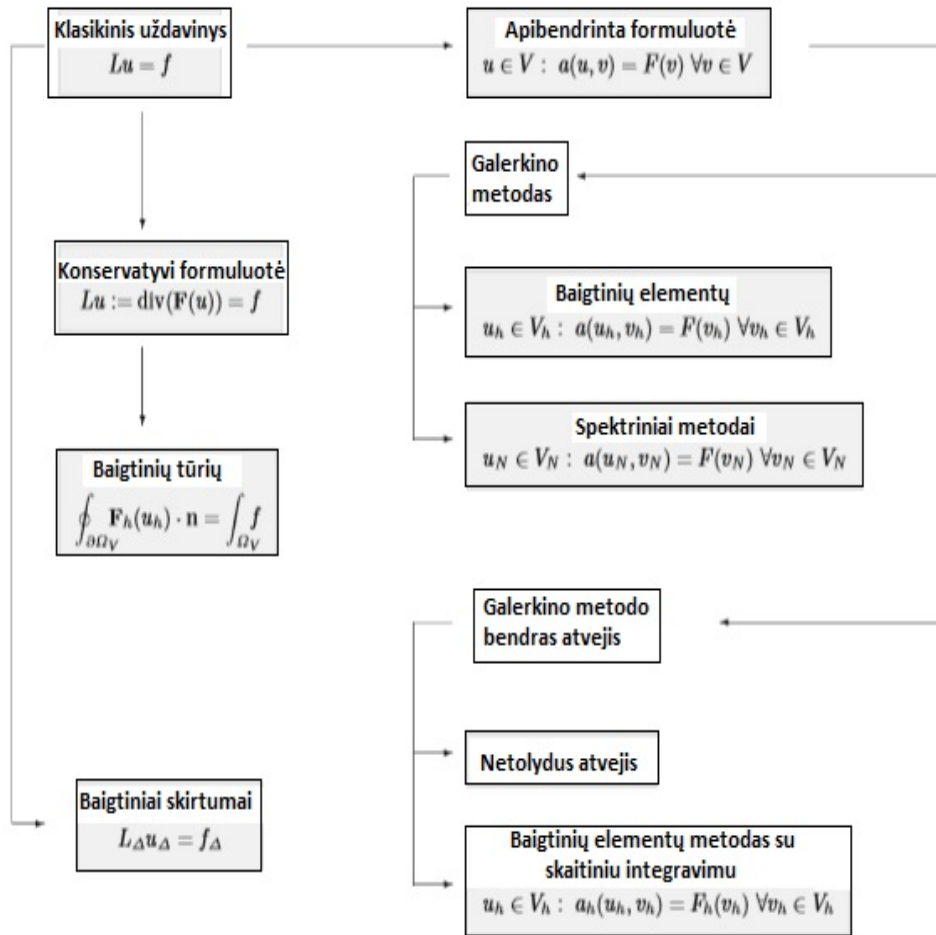
čia L yra tiesinis (kartais netiesinis) diferencialinis operatorius \mathbf{x} kintamojo erdvėje.



2.6 pav.: Skaičiavimo tinklas, pritaikytas stuburo arterijai su aneurizma. Šiuo atveju pavaizduotas tik paviršiaus tinklas, sudarytas iš trikampių. Vidus suskaidytas į tetraedrinį tinklą [7].

Norėdami išspręsti Navjė ir Stokso lygtį skaitiniu metodu srityje Ω įvedame diskretųjį tinklą (2.6 pav.). Sprendinys v pakeičiamas aproksimacija v_h , kuri priklauso nuo diskretaus tinklo taškų skaičiaus. Žingsnis h tiesiogiai proporcingas tarpų tarp viršūnių skaičiui. Atveju, kai sprendžiamos nestacionariosios lygtys, laikas irgi turi būti aproksimuojamas skaidant į žingsnius. Naudojamas iteracijų metodas, t.y. žinodami apytiksliai v_h^n reikšmę laiko momentu t^n , $t = 0, 1, \dots, n$ randame aproksimaciją v_h^{n+1} laiko momentu $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, čia $\Delta t > 0$ pasirinktas *laiko žingsnis*. Dažniausiai pasirenkama vieno žingsnio schema, kai v_h^{n+1} įtrauks tik žinomą v_h^n .

Diskretizuoti erdvę galima skirtingais būdais, plačiau bus aptarti keletas iš jų, o 2.7 pav. schematiškai pavaizduota jų klasifikacija. Tai toli gražu ne visos įmanomos metodikos, tačiau šitos yra labiausiai paplitusios ir taikytinos ne tik Navjė ir Stokso, bet ir kitų dalinių išvestinių diferencialinių lygčių aproksimuoto sprendinio radimui.



2.7 pav.: Pagrindiniai dalinių išvestinių diferencilinių lygčių diskretizacijos metodai.

Baigtinių skirtumų metodas

Bendru atveju taikant šį metodą aproksimuotas sprendinys v_h yra vektorius $\mathbf{v}_h = [v_1, \dots, v_n]^T$, atitinkantis aproksimaciją skaičiavimo tinklo taškuose. Šiuo atveju diferencialinis operatorius L pakeičiamas baigtiniais skirtumais. Pavyzdžiui, Laplaso operatorius dvimačiu atveju $\Delta v = \partial^2 v / \partial x^2 + \partial^2 v / \partial y^2$ viršūnėje \mathbf{x}_i būtų aproksimuotas kaip

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(\mathbf{x}_i) \simeq \frac{v_a + v_b + v_c + v_d - 4v_i}{h^2},$$

čia x_a, x_b, x_c, x_d - gretutiniai \mathbf{x}_i taškai tinkle, o h - tarpas x ir y kryptimis, šiuo atveju paprastumo dėlei konstanta.

Paprasčiausia baigtinių skirtumų schema - „kryžius“. Tegul $\omega = \{(x_i, y_j) : x_i = ih, y_j = jh, i, j = 0, 1, \dots, N\}$ yra diskretusis tinklas su žingsniu $h = \frac{1}{N+1}$, čia $v_{ij} = v(x_i, y_j)$, $f_{ij} = f(x_i, y_j)$ yra tinklinės funkcijos. Laikysime, kad žingsniai pagal

skirtingas koordinatas yra lygūs. Priešingu atveju, kai žingsniai nėra lygūs skirtingomis kryptimis, rezultatai nesikeičia, tik lygtis užrašoma sudėtingesniu pavidalu.

Tuomet aproksimavimas gali būti užrašytas pavidalu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i, y=y_j} &\approx \frac{v_{i-1,j} - 2v_{ij} + v_{i+1,j}}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_{x=x_i, y=y_j} &\approx \frac{v_{i,j-1} - 2v_{ij} + v_{i,j+1}}{h^2}.\end{aligned}$$

Sudėję pastarąsias dvi lygtis gausime, kad

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_{x=x_i, y=y_j} = \frac{v_{i-1,j} + v_{i+1,j} - 4v_{ij} + v_{i,j-1} + v_{i,j+1}}{h^2} + \Psi_{ij},$$

čia aproksimacijos paklaida $\Psi_{ij} = \mathcal{O}(h^2)$.

Baigtinių skirtumų schema

$$\frac{v_{i-1,j} - 2v_{ij} + v_{i+1,j}}{h^2} + \frac{v_{i,j-1} - 2v_{ij} + v_{i,j+1}}{h^2} = f_{ij},$$

operatoriniu pavidalu užrašoma

$$\delta_x^2 v_{ij} + \delta_y^2 v_{ij} = f_{ij},$$

čia

$$\delta_x^2 v_{ij} = \frac{v_{i-1,j} - 2v_{ij} + v_{i+1,j}}{h^2}, \quad \delta_y^2 v_{ij} = \frac{v_{i,j-1} - 2v_{ij} + v_{i,j+1}}{h^2},$$

o kraštinės sąlygos

$$v_{0j} = 0, \quad v_{i0} = 0, \quad v_{N+1,j} = 0, \quad v_{i,N+1} = 0.$$

Baigtinių tūrių metodas

Baigtinių tūrių metodas paremtas lygties integraline formuluote. Šis būdas taikomas, kai operatorius L gali būti užrašytas konservatyvia formuluote (žr. 2.7 pav.), t.y.

$$L(v) = \operatorname{div} \mathbf{F}(v), \tag{2.7}$$

čia \mathbf{F} vadinamas *srauto vektoriumi*, kuris priklauso nuo u ir nuo erdvinųjų u išvestinių. Tuomet lygtys (2.5) gali būti užrašytos konservatyvia formuluote

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}, P) = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + P\mathbf{I} - \mu\mathbf{D}(\mathbf{v}),$$

kuomet tolydžiuoju atveju $\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Diferencialinis operatorius užrašomas konservatyvia formuluote tam, kad būtų sudarytas tinklas. Greičio v aproksimacija kiekviename kontroliniame tūryje C_i yra nežinomasis. Taikydami divergencijos teoremą gausime

$$\int_{C_i} \operatorname{div} \mathbf{F}(v) d\mathbf{x} = \int_{\partial C_i} \mathbf{F}(v) \cdot \mathbf{n} d\gamma \simeq \sum_j \mathbf{F}_{l_{ij}}(v_h) \cdot \mathbf{n}_{ij},$$

čia $\mathbf{F}_{l_{ij}}$ yra apytikslis kontrolinio tūrio C_i su normale \mathbf{n}_{ij} dayje l_{ij} skaitinis srautas, kuris priklauso nuo skaitinio sprendinio v_h . Šiuo atveju pastaroji išraiška turi nedaug nežinomųjų. Pritaikę tinklo kontrolinius tūrius galime užrašyti (2.7) lygtį tiesinių (kartais netiesinių) lygčių sistema. Parametras h parodo kontrolinių tūrių dydį. Dažniausiai h yra tinklo tūrių didžiausias skersmuo. Kuo mažesnis h , tuo tikslesnė aproksimacija ir tuo didesnės skaičiavimų sąnaudos.

Baigtinių tūrių metodas yra vienas populiariausių CFD metodų, kadangi jis pasižymi aukštu geometriniu lankstumu, t.y. tinkamas sudėtingoms įvairioms geometrinėms formoms, be to, skaičiavimai atliekami gan efektyviai. Skaitinių srautų sudarymas gali būti vykdomas taip, kad daugelis medžiagų fizikinių savybių išsisaugo skaitiniame lygmenyje.

Baigtinių elementų metodas

Baigtinių elementų metodas paremtas skirtingomis integralinėmis formuluotėmis. Tegul L - Laplaso operatorius su mišria kraštine sąlyga

$$-\Delta v = f \quad \text{srityje } \Omega, \quad (2.8)$$

$$v = 0, \quad \text{ant } \Gamma_D \quad \text{ir} \quad \nabla v \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial v}{\partial n} = g, \quad \text{ant } \Gamma_N, \quad (2.9)$$

čia Γ_N ir Γ_D dvi tokios srities Ω krašto dalys, kad $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ ir $\Gamma_N \cup \Gamma_D = \partial\Omega$, be to $\Gamma_D \neq \emptyset$. T. y. Noimano kraštinė sąlyga ant krašto Γ_N yra duotoji funkcija g , o Dirichlė homogeninė kraštinė sąlyga $v = 0$ ant Γ_D užduota tik dėl paprastumo.

Baigtinių elementų metodas yra lengviausiai realizuojamas iš visų skaitinių metodų dalinių išvestinių diferencialinėms lygtims, tačiau CFD baigtinių tūrių metodas naudojamas dažniau [7].

Parametras h baigtinių elementų metode yra apibrėžiamas kaip baigtinių elementų didžiausias spindulys duotame tinkle. Kuo mažesnis h , tuo daugiau elementų reikalinga padengti Ω ir tuo didesnis laisvės laipsnių skaičius.

Apibendrintoji formuluoė

Dauginant (2.8) lygtį iš testinės funkcijos $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, integruojant srityje Ω ir naudojant integravimo dalimis formulę gaunama išraiška

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \phi \nabla v \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = \int_{\Omega} f \phi \, d\Omega.$$

Tada ϕ pasirenkama taip, kad ji būtų lygi nuliui ant Γ_D . Naudojant Noimano kraštinę sąlygą gaunama

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} f \phi \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} g \phi \, d\gamma.$$

Bendru atveju suformuluojama užduotis

„Rasti tokį $v \in V$, kad $a(v, \phi) = F(\phi), \phi \in V$ “.

Ši formuluoė vadinama *apibendrintąja*. Aplikacija $F(\phi)$ yra realus skaičius su bet kuriuo $\phi \in V$ ir vadinama *funkcionalu*, be to $a(v, \phi)$ yra realus skaičius visoms funkcijų poroms v ir ϕ iš V ir vadinamas *formuluote*.

Galerkinio metodas

Apibendrintoje formuluoėje begalinės dimensijos erdvė V pakeičiama baigtiniu pordviu V_h , t.y. $V_h \subset V$ su $\dim(V_h) = N_h$ ir sprendžiama užduotis

„Rasti tokį $v_h \in V_h$, kad $a(v_h, \phi_h) = F(\phi_h), \phi_h \in V_h$ “, čia V_h baigtiniamatė, o sprendinys v_h gali būti išskleistas pagal V_h bazę kaip $v_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_h} v_i \xi_i(\mathbf{x})$. Turima omeny, kad V_h yra iš bazės $\{\xi_i, i = 1, \dots, N_h\}$. Koeficientai $v_i \in \mathbb{R}$ yra *laisvės laipsniai* ir yra nežinomieji diskretizuotame uždavinyje. Be to, galime parinkti $v_h = \xi_j$, kai $j = 1, \dots, N_h$ pastarajai užduočiai, kad gautume tiesinę lygčių sistemą $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$, čia

$$A_{ij} = a(\xi_j, \xi_i) = \int_{\Omega} \nabla \xi_j \cdot \nabla \xi_i \, d\Omega, \quad b_j = F(\xi_j) = \int_{\Omega} f \xi_j \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} g \xi_j \, d\gamma.$$

Matrica A vadinama *standumo matrica*. Svarbu teisingai parinkti būdą V_h sudarymui. Taikant klasikinius spektrinius metodus su periodiniais sprendiniais sutrumpinta Furjė eilutė naudojama visai Ω . Šie metodai netaikytini, kai sprendinys labai glodus ir geometrija triviali (kubinė ar cilindrinė sritis).

Konvergavimas

Visuose išvardintuose metoduose v_h aproksimacija yra tikslesnė, kai h artėja į nulį. Tikrai, diskretizacijos metodas yra *konverguojantis*, kai jo paklaida artėja į nulį, t.y. $h \rightarrow 0$. Sakome, kad metodo konvergavimo eilė yra p , kai egzistuoja tokia konstanta $C := C(v) > 0$, kad pakankamai mažiems h galioja nelygybė

$$\|v - v_h\| \leq Ch^p.$$

Paklaida skaičiuojama tam tikroje normoje. Konvergavimo eilė dažniausiai priklauso nuo pasirinkto metodo, sprendinio reguliarumo ir pasirinktos normos.

Uždaviniai su kintamu laiku

Nestacionariuose uždaviniuose diskretizuojama ne tik erdvė, bet ir laiko evoliucija, t.y. po lygties

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + L(\mathbf{v}) = f, \text{ srityje } \Omega, 0 < t < T,$$

erdvės diskretizacijos baigtiniais skirtumais arba baigtiniais tūriais i -tajame taške gausime paprastųjų diferencialinių lygčių sistemą

$$\frac{dv_i}{dt}(t) + \mathbf{s}_i^T \mathbf{v}(t) = f_i(t), 0 < t < T, \quad (2.10)$$

čia $\mathbf{v}(t) = [v_1(t), \dots, v_{N_h}(t)]^T$ yra laisvės laipsniai, kurie yra funkcija, priklausianti nuo laiko, $f_i(t) = f(\mathbf{x}, t)$ ir \mathbf{s}_i - koeficientų vektorius. Pavyzdžiui, Laplaso lygtis, nagrinėta baigtinių skirtumų metodo skyrelyje, nestacionariuoju atveju turės pavidalą

$$\frac{dv_i}{dt}(t) + \frac{4v_i(t) - v_a(t) - v_b(t) - v_c(t) - v_d(t)}{h^2} = f_i(t),$$

čia, kaip minėta, x_a, x_b, x_c, x_d - gretutinės x_i viršūnės tinkle, o h - tarpas x ir y kryptimis.

Matriciniu pavidalu

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) + A\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(t),$$

čia A yra matrica, o \mathbf{s}_i - jos eilutės.

Schemas, reikalingos šiai diferencialinių lygčių sistemai išspręsti, reikalauja laiko žingsnio Δt pasirinkimo ir užduoties su kintamuoju \mathbf{v}^n sprendimo, aproksimacijos $\mathbf{v}(t^n)$ radimo, kai $t^n = n\Delta t$. Labiausiai paplitusios schemas yra šitos:

- *išreikštinis Oilerio* metodas

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t [A\mathbf{v}^n + \mathbf{f}(t^n)];$$

- *neišreikštinis Oilerio* metodas

$$(\mathbf{I} + \Delta t A)\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t \mathbf{f}(t^{n+1});$$

- *Kranko ir Nikolson* metodas

$$\left(\mathbf{I} + \frac{1}{2}\Delta t A\right)\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \frac{\Delta t}{2}[A\mathbf{v}^n + \mathbf{f}(t^n) + \mathbf{f}(t^{n+1})].$$

Visi išvardinti metodai skaičiuoja sėkmingais žingsniais seką $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots$, kai \mathbf{v}^0 žinomas kaip pradinė diferencialinės užduoties sąlyga. Pagrindinis skirtumas tarp pirmojo metodo ir dviejų pastarųjų yra tas, kad skaičiuojama aproksimacija laiko žingsnyje t^{n+1} nesprendžiant tiesinės sistemos. Kranko ir Nikolson schema tikslesnė, kadangi tai antros eilės metodas laiko atžvilgiu.

Platesnį išvardintų trijų metodų aprašymą galima rasti [1] šaltinyje.

2.2.2 Niutoninis modelis ir Karo modelis

Modeliuojant srauto laukus Navjė ir Stokso lygtims 2D atveju, kai nagrinėjamas nespūdaus skysčio tekėjimas, naudojama tolydumo lygtis

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\right] = \nabla[-p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T)],$$

čia \mathbf{v} yra greitis, ρ yra skysčio tankis (kraujo atveju $\simeq 1,050 \text{ g/cm}^3$), μ yra kraujo klampa, t yra laikas, o p yra slėgis. Kiti parametrai skiriasi priklausomai nuo pasirinkto modelio. Kai naudojamas

- Niutoninis modelis, tai

$$\mu = 0,0035 \text{ Pa} \cdot \text{s}, \text{ kuri atitinka } H = 40\% \text{ hematokrito koeficientą.}$$

- Karo modelis, kuriam reikalinga lygtis

$$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty})[1 + (\lambda\gamma)^2]^{\frac{n-1}{2}},$$

čia klampa μ_{∞} esanti aukštai poslinkio eilei (*angl.* shear rate) lygi Niutoninio modelio klampai ($\mu = 0,0035 \text{ Pa} \cdot \text{s}$), kuomet nulinė poslinkio eilė $\mu_0 = 0,056 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, be to koeficientai $\lambda = 3,313 \text{ s}$, $n = 0,3568$, o γ yra deformacijos eilė (*angl.* strain rate) [22].

Šaltinyje [17] nurodoma, kad kraujo tekėjimo greičio skirtumas Niutoniniame modelyje ir Karo modelyje yra neženklus. Šio darbo mokslinio tyrimo dalyje gauti rezultatai bus palyginti.

2.2.3 Medicininės išvados daromos gavus greičio aproksimaciją

Pagal apskaičiuota kraujo tekėjimo greičio aproksimaciją gali būti nustatoma diagnozė. Ultragarsu galima tirti kraujo tekėjimą kraujagyslėse, o apskaičiuotą ir nustatytą kraujo tekėjimo greičius palyginti. Skirtingas aterosklerozės stadijas rekomenduojama skirstyti pagal kraujo tekėjimo greitį (KTG) tokiu būdu:

- **norma**, KTG $< 125 \text{ cm/s}$, aterosklerozinių plokštelių nerandama;
- **stenozė** $< 50\%$, KTG $< 125 \text{ cm/s}$, randamos aterosklerozinės plokštelės;
- **stenozė** $50 - 69\%$, KTG $125-230 \text{ cm/s}$, randamos aterosklerozinės plokštelės;
- **stenozė** $70 - 99\%$, KTG $> 230 \text{ cm/s}$, randamos aterosklerozinės plokštelės;
- **subokliuzija arba stenozė** 99% , KTG $< 230 \text{ cm/s}$, randamos aterosklerozinės plokštelės, kritiškai siaurinančios kraujagyslę;
- **okliuzija** (2.1 pav.), kraujagyslė pilnai užsikemša, spektrinės dopleografijos būdu kraujotaka nebenustatoma [12].

Toliau, 3 skyriuje bus aprašyti kraujo tekėjimo greičio aproksimacijos skaičiavimai, kuriems pasirinkta COMSOL Multiphysics programinė įranga. CFD modulio pagalba galima modeliuoti skysčių tekėjimą, rasti greičio bei slėgio aproksimacijas. Skaičiavimai atlikti su Niutoniniu modeliu darant prielaidą, kad klampa turi mažai įtakos kraujo tekėjimo greičiui. Be to, bus palyginti Niutoninio ir Karo modelių gauti rezultatai.

3 skyrius

Hemodinamikos patologijų

modeliavimas COMSOL

Multiphysics programine įranga ir

rezultatų aptarimas

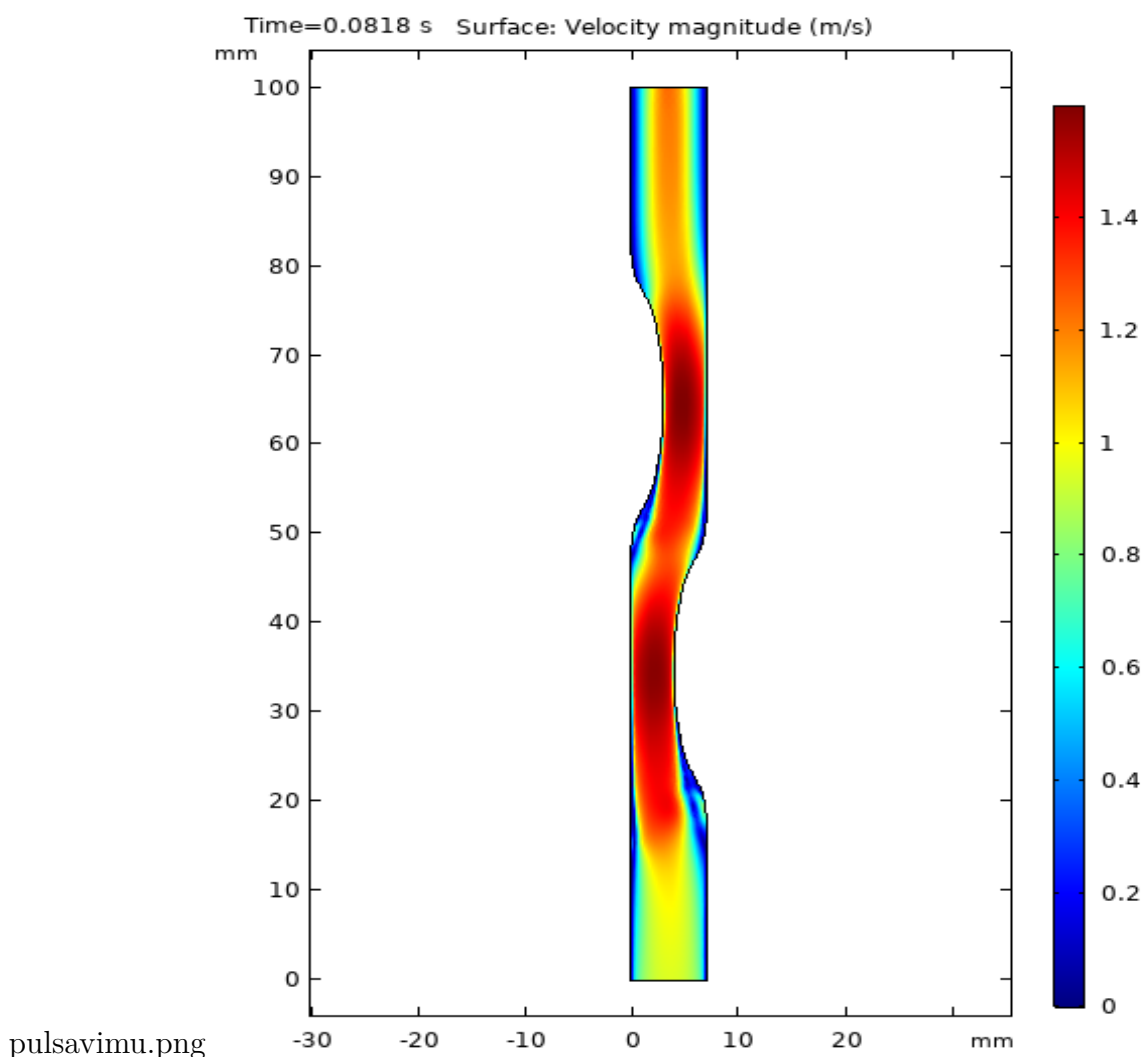
COMSOL Multiphysics programinė įranga leidžia tirti tekančio vamzdžiu skysčio greitį ir slėgį. Esant pakankamai mažam Reinoldso skaičiui atliekami laminarinio (turbulentinio) tekėjimo skaičiavimai. Klampa priklauso nuo skysčio prigimties ir temperatūros, tačiau kraujo atveju, kaip minėta, didelės įtakos ji neturi. Vis dėlto kraujas nėra Niutoninis skystis, todėl bus išnagrinėtas ir Karo modelis.

Bendru atveju, modeliuojant, skysčio tankis ir klampa gali būti išreikšti kaip temperatūros, skystėjimo (*angl.* shear rate) ir kitų kintamųjų funkcijos arba jų išvestinės pagal atitinkamus kintamuosius. Šitie pradiniai duomenys svarbūs nagrinėjant viskoelastinį srautą. Šiame darbe daroma prielaida, kad visi aukščiau išvardinti parametrai yra pastovūs ir neturi įtakos galutiniam rezultatui.

COMSOL Multiphysics leidžia sukurti vienmačius, dvimačius ir trimačius modelius. Siekiant sumažinti skaičiavimo sąnaudas visi modeliai buvo sudaryti dvimačiu atveju.

3.1 Aterosklerozė

Esant aterosklerozei ant kraujagyslės sienelės paviršiaus susidaro plokštelės. COMSOL Multiphysics programine įranga sudaromas modelis, pasirenkama 100 mm ilgio ir 8 mm pločio stačiakampio forma kraujagyslei ir elipsės forma plokštelėms. Elipsės galai užglodinami pasinaudojus „Fillet“ funkcija. Kadangi dažniausiai susidaro iškart kelios plokštelės, geometriniam modelyje (3.1 pav.) atitinkančios plokštelės elipsės dalys iškerpamos iš stačiakampio formos kraujagyslės vidaus. Daroma prielaida, kad sienelės nejuda, o skystis Niutoninis. Modelio viršutinėje dalyje yra „įtekėjimo sritis“, o apatinėje dalyje - „ištekėjimo sritis“.



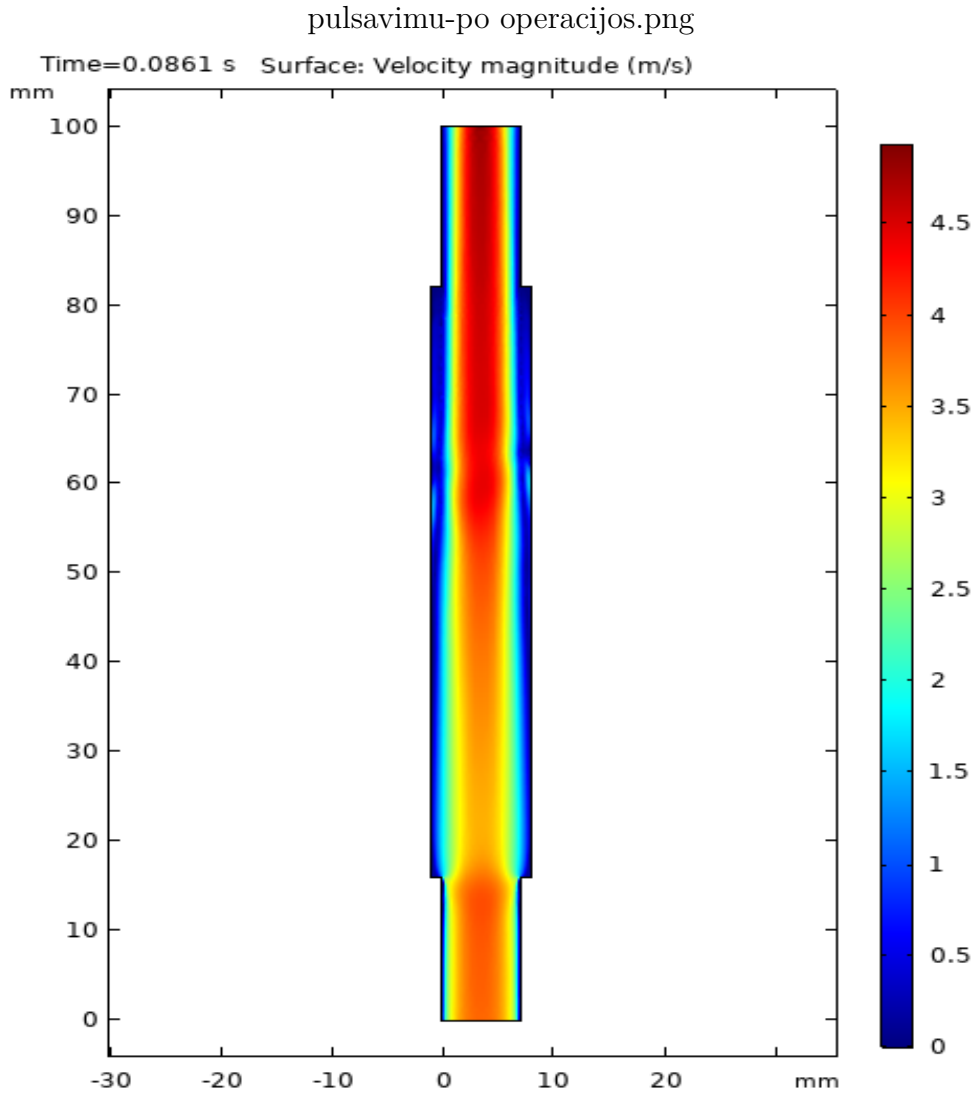
3.1 pav.: Pažeistos aterosklerozės arterijos kraujo tekėjimo greičio pasiskirstymas. Niutoninis modelis.

Pradinis kraujo tekėjimo greitis išreiškiamas paraboliniu (Puazelio srauto) profiliu atitinkančiu pulsavimą

$$v = A_0 + A_1 \cos(\phi) + A_2 \cos(2\phi) + A_3 \cos(3\phi) + A_4 \cos(4\phi),$$

čia $\phi = \frac{2\pi}{T}t - 2$, $A_0 = 0,055360393108630$, $A_1 = 0,076532481162692$, $A_2 = 0,063546459052423$, $A_3 = 0,032363480900000$, $A_4 = 0,009640185800000$, o pulsavimo periodas $T = 0,42254$ s [26].

Atliekant stentavimą arterija praplečiama lyginant su pastarąja (3.1 pav.), pažeista aterosklerozės. Kaip matome 3.2 pav., susiaurėjusios sritys išsilygina.



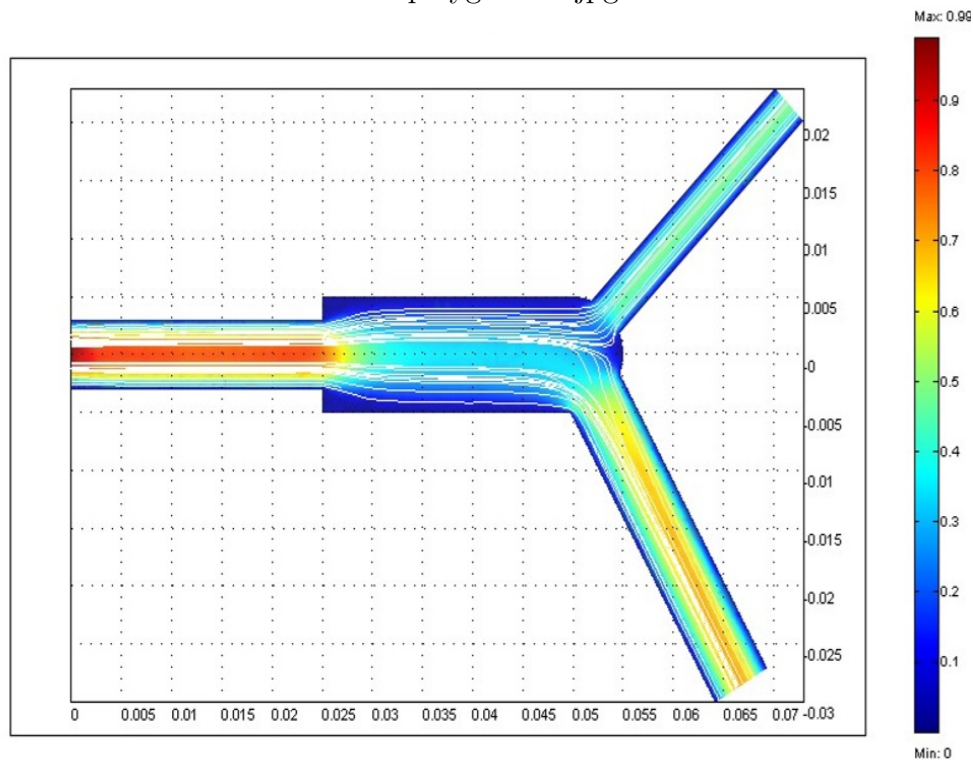
3.2 pav.: Pažeistos aterosklerozės arterijos kraujo tekėjimo greičio pasiskirstymas po operacinės intervencijos, t.y. stentavimo. Niutoninis modelis.

Be to, nebelyka zonų su patologiškai padidėjusiu kraujo tekėjimo greičiu, o palei sienelę gauname labai mažą greitį. Aterosklerozės pažeistoje kraujagyslėje palei sienelę irgi greitis mažesnis, negu liumeno centre, tačiau ir jo sumažėjimas akivaiz-

dus. Proksimalinėje srityje kraujo tekėjimo greitis žymiai didesnis, negu distalinėse srityse. Kaip minėta šio darbo 2.2.3 skyriuje kraujo tekėjimo padidėjimo skaitinė charakteristika parodo aterosklerozės stadiją.

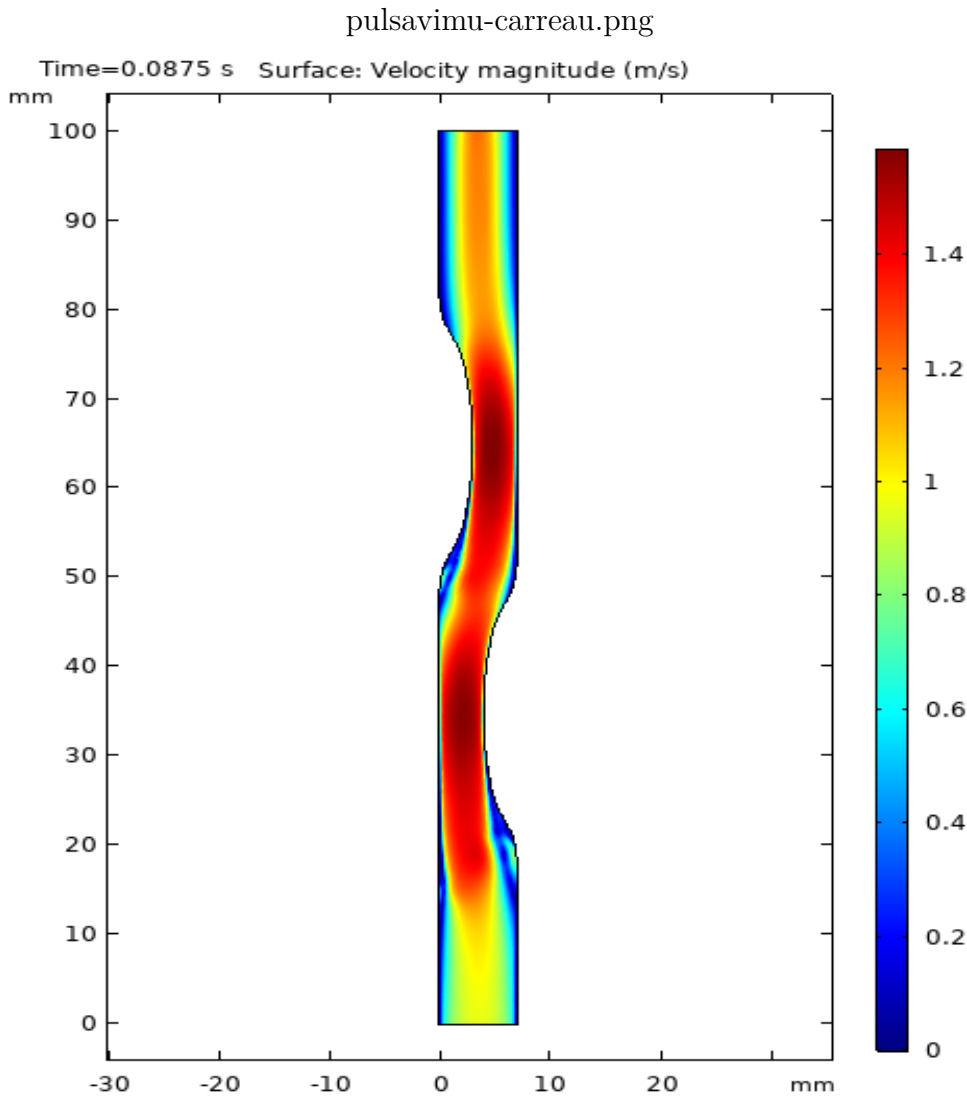
Panašų rezultatą gavo [23] šaltinyje. Daroma išvada, kad turi būti šalinama ne tik aterosklerozinė plokštelė, bet ir arterijos fragmentas, o kraujagyslė protezuojama. Kaip matome 3.3 pav., kuriame pavaizduota arterijos karotidinė bifurkacija su stentu, proksimalinėje arba „įtekėjimo“ srityje (iš kairės) kraujo tekėjimo greitis didelis, o stento viduje - žymiai mažesnis.

sunt-palyginimui.jpg



3.3 pav.: Kraujo tekėjimo greičio pasiskirstymas po aterosklerozinės plokštelės pašalinimo. Niutoninis modelis [23].

Minėtuose bandymuose ir [23] šaltinyje modeliavimas buvo atliekamas įvedant vandens (Niutoninio skysčio) fizikines savybes, t.y. sudaromas Niutoninis modelis. Palyginimui buvo sudarytas ir Karo modelis, kuriame įvertinama kraujo klampa ir poslinkio eilė (plačiau 2.2.2 skyriuje). Gautas rezultatas pavaizduotas (3.4 pav.). Ir plika akimi, ir tikrinant duomenis tinkle matome, kad kraujo tekėjimo greitis Niutoniniame ir Karo modeliuose beveik nesiskiria. Tai dar kartą parodo, jog daroma prielaida, kad kraujo tekėjimo modeliavimui tinkamos Niutoninio modelio formulės yra teisinga.

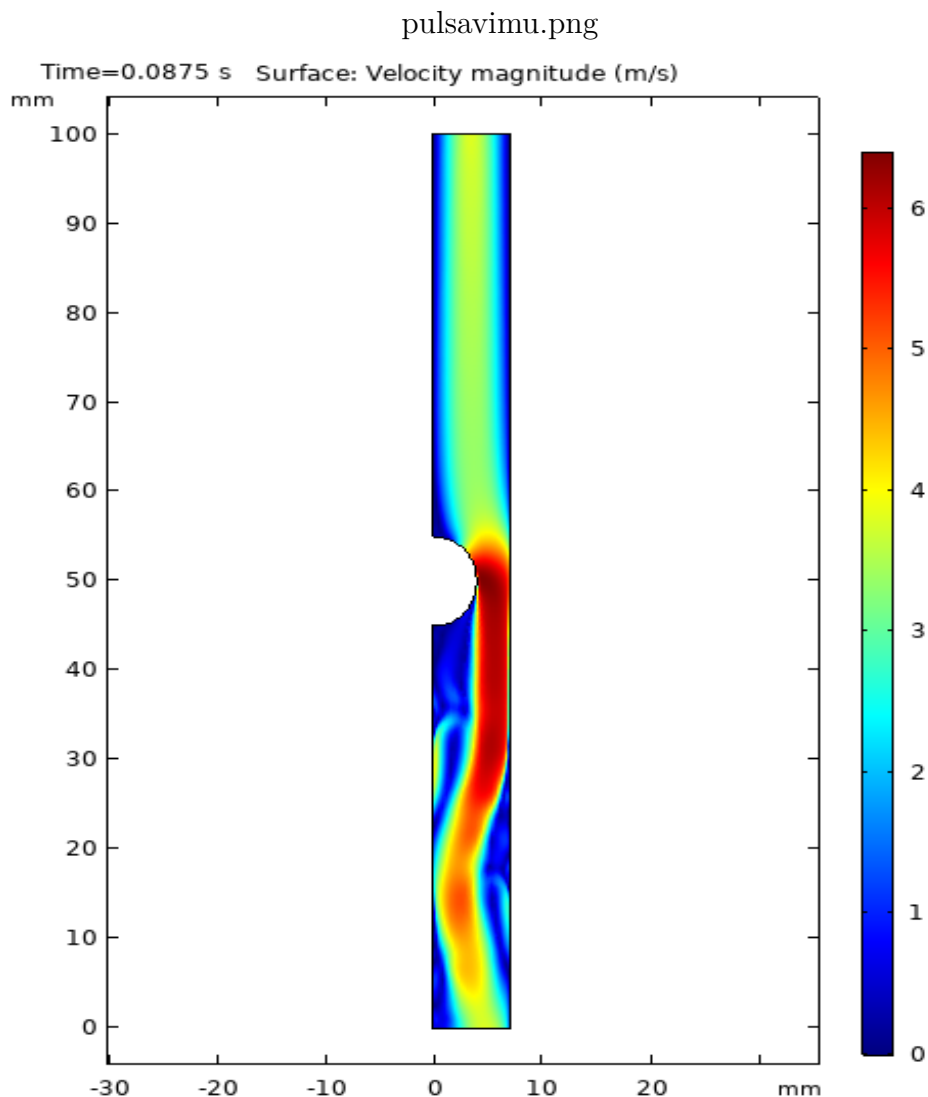


3.4 pav.: Pažeistos aterosklerozės arterijos kraujo tekėjimo greičio pasiskirstymas. Karo modelis.

3.2 Arterijų trombozė

Trombozė – dažna ir potencialiai gyvybei pavojinga būklė. Ji vystosi, kai dėl tam tikrų priežasčių yra išardoma pusiausvyra tarp krešėjimo ir trombolizės, ir organizmas nespėja laiku išardyti susidariusių krešulių. Arterijose trombai dažniausiai susidaro dėl plyšusios aterosklerotinės plokštelės. Pirmiausia reaguoja trombocitai, kurie atpažįsta kraujagyslės sienelės vientisumą, limpa prie defekto, toliau aktyvuojama visa kraujo krešėjimo kaskada. Ant arterijų sienelių (3.5 pav.) susidariusių trombų pagrindą sudaro fibrino siūlai ir trombocitai, todėl šie trombai vadinami baltaisiais. Analogiškai, kaip ir 3.1 skyriuje sudaromas modelis, tačiau vietoj elipsės pasirenkamas pusskritulys, jo kraštai neužglodinami, tada jis atitinka susidariusio

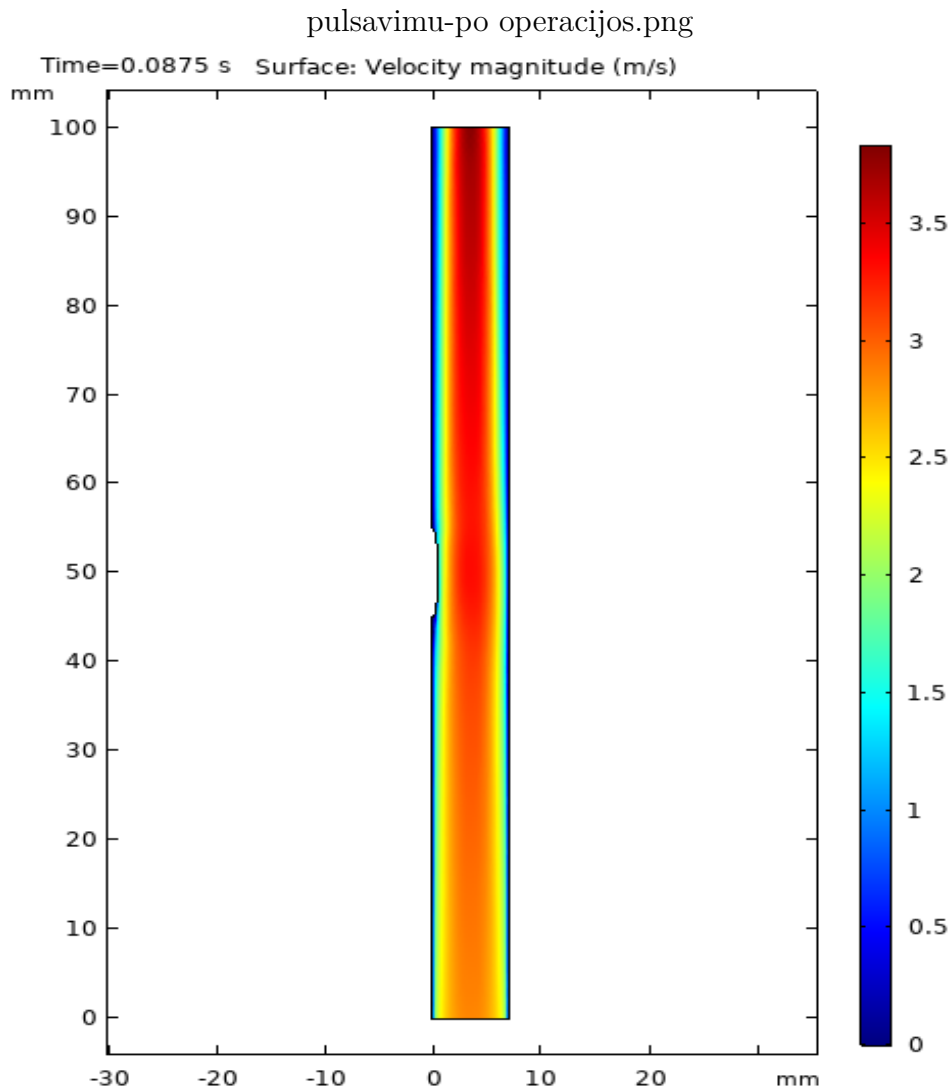
trombo formą. Modelio viršutinėje dalyje yra „įtekėjimo sritis“, o apatinėje dalyje - „ištekėjimo sritis“, o pradiniai duomenys tie patys, kaip ir aterosklerozės atveju Niutoniniame modelyje.



3.5 pav.: Pažeistos trombozės arterijos kraujo tekėjimo greičio pasiskirstymas iki operatyvaus gydymo. Niutoninis modelis.

Kaip matome 3.5 pav., prie „įtekėjimo srities“ kraujo tekėjimo greitis nėra patologiškas, tačiau šalia susidariusio trombo jis ženkliai padidėjęs. Remiantis 2.2.3 skyriumi, kaip ir aterosklerozės atveju, galime daryti išvadas apie arterijos stenozės stadiją ir lyginti rezultata su išmatuotu ultragarsu. Be to, žinoma, kad kuo didesnis trombas, tuo didesnė atsiranda turbulencija ir kuo didesnė turbulencija, tuo didesnis trombas. Šaltinyje [25] rašoma, kad į šunų arterijas buvo įvedami dirbtiniai tromba imituojantys implantai. Turbulentinėje sistemoje susidarančio trombo masė buvo 180 ± 30 mg, kuomet neimituojant turbulentinės sistemos gauti $0,9 \pm 0,6$ mg masės

trombai [25]. Kaip ir 3.5 pav., šalia trombo ir kraujo tekėjimo kryptimi susidaro turbulencija. Atlikus trombo pašalinimo operaciją, ant arterijos sienelės lieka nedidelė sritis, kuri įeina į arterijos vidų (3.6 pav.) Tačiau, kaip matyti įtakos kraujo tekėjimo greičiui ji beveik neturi, nes aplink ją pasiskirstymas tolygus. Tokiu būdu kraujo tekėjimo greitis normalizuojamas ir galima laikyti, kad patologija yra pašalinta.



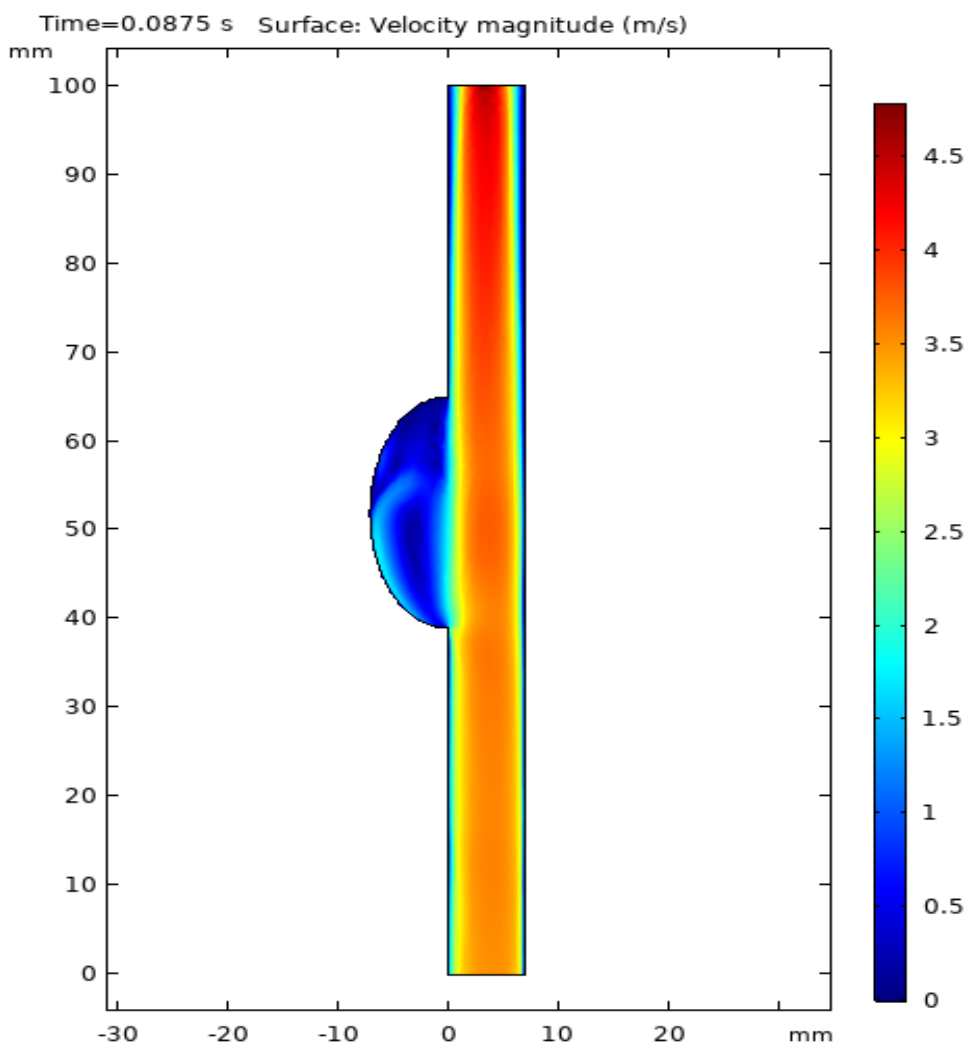
3.6 pav.: Pažeistos trombozės arterijos kraujo tekėjimo greičio pasiskirstymas po operatyvaus trombo pašalinimo. Niutoninis modelis.

3.3 Galvos smegenų aneurizma

Būtina atskirti keletą neplyšusių aneurizmų grupių. Pirma – simptominės aneurizmos; antra – dauginės aneurizmos, kai kraujagyslių ištyrimas atliekamas dėl kitos plyšusios aneurizmos; trečia – besimptomės neplyšusios intrakranijinės aneurizmos.

Pirmoji grupė – tai chirurginiai pacientai, antroji – operacinis gydymas gali būti atidėtas keletui mėnesių, trečioji – pati sudėtingiausia pagal operacijos būtinumo ir laiko numatymą [27]. Šiame darbe bus sumodeliuotos tik pirma ir trečia aneurizmų grupės, kadangi abiem atvejais skiriama operacija ir vienas iš operatyvaus gydymo būdų - tai kabutės uždėjimas.

Analogiškai, kaip ir 3.1 skyriuje sudaromas modelis, tačiau elipsės formos aneurizma yra išsikišusi iš stačiakampio formos arterijos (3.7 pav.). Modelio viršutinėje dalyje yra „įtekėjimo sritis“, o apatinėje dalyje - „ištekėjimo sritis“, pradiniai duomenys tie patys, kaip ir Niutoniniame modelyje aterosklerozės atveju.



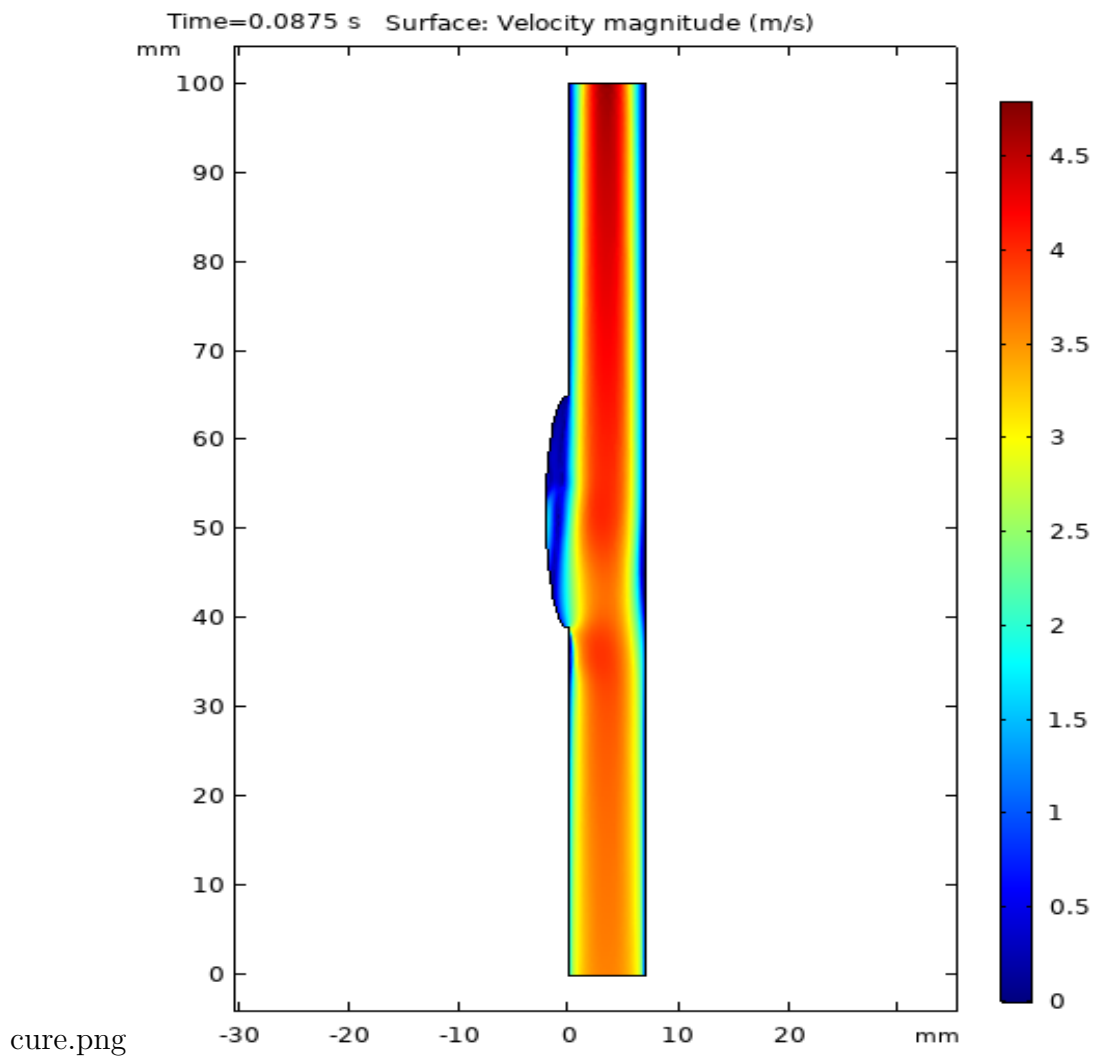
3.7 pav.: Pažeistos aneurizmos arterijos kraujo tekėjimo greičio pasiskirstymas. Niutoninis modelis.

Kaip matome 3.7 pav., aneurizmos, kurią atitinka elipsė, viduje, kraujo tekėjimo greitis yra ženkliai sumažėjęs lyginant su likusia arterijos dalimi, kurioje greitis

pasiskirsto tolygiai. Panašų rezultatą gavo [21] šaltinyje (3.9 pav.).

Kaip žinia, egzistuoja trys pagrindinės smegenų aneurizmos gydymo taktikos: atviras chirurginis gydymas, t.y. kabutės uždėjimas, endovaskulinis gydymas į aneurizmos maišą įvedant spirales ir konservatyvus gydymas (stebėjimas). Šiame darbe bus sumodeliuotas pirmo gydymo būdo gaunamas rezultatas.

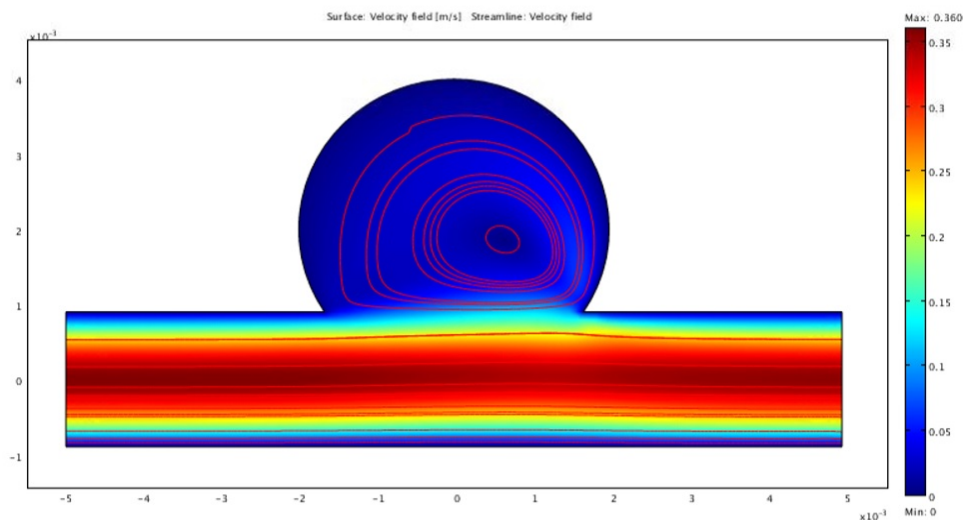
Taigi, uždėjus kabutę ant išsiplėtusios kraujagyslės lieka nedidelis elipsės formos išsikišimas (3.8 pav.) su žymiai mažesniu spinduliu. Kraujo tekėjimo greitis arterijoje tampa normos ribose, ir sumažėja insulto rizika.



3.8 pav.: Pažeistos aneurizmos arterijos kraujo tekėjimo greičio pasiskirstymas po operatyvaus gydymo. Niutoninis modelis.

Aneurizmos kaklelio klipsavimas (kabutės uždėjimas) atviros operacijos metu nuo seno daugelio neurochirurgų laikomas pagrindiniu šios patolo gijos gydymo metodu. Tuo tarpu endovaskulinis aneurizmų gydymas pirmą kartą pradėtas taikyti

1974 m. Tačiau tuo metu jo efektyvumas buvo ganėtinai menkas, nes aneurizmų embolizacijai buvo naudojami specialūs „balionėliai“. Modernioji endovaskulinio gydymo era prasidėjo 1995 m., kai JAV aneurizmoms gydyti patvirtino specialias spirales. Endovaskulinis aneurizmų gydymas pirmiausia buvo įtrauktas tik kaip eksperimentinis metodas, skirtas pacientams, kurie nebuvo tinkami kandidatai atvirai operacijai. Tik po dešimtmečio išsamių tyrimų endovaskulinis aneurizmų gydymo būdas tapo pripažintas kaip saugi ir tinkama alternatyva chirurginiam aneurizmų gydymui. Antra vertus, endovaskulinis aneurizmų gydymas kartais būna techniškai neįmanomas dėl neįprasto smegenų kraujagyslių vingiuotumo ar dėl aneurizmos formos, kuri neleistų spiralei stabiliai pasilikti aneurizmos viduje. Skaičiuojama, kad su tokiomis problemomis tenka susidurti 5 – 14,5% atvejų. Šis skaičius mažėja dėl naujausių endovaskulinių technologijų [16].



3.9 pav.: Kraujo tekėjimo greičio pasiskirstymas esant galvos smegenų aneurizmai [21].

Yra darbų, pavyzdžiui [22], kuriuose atliekami skaičiavimai COMSOL Multiphysics programine įranga būtent endovaskulinio gydymo atveju. Tačiau juose greičio pasiskirstymas gaunamas panašus, kaip ir prieš operacinį gydymą, todėl šiame darbe tokio tipo modeliavimas nebuvo atliekamas.

4 skyrius

Išvados ir tolimesni veiksmai

Atliekant modeliavimą gautos išvados:

- Modeliuojant kraujo tekėjimo greičio pasiskirstymą arterijose nestacionariu dvimačiu atveju gaunama, kad liumeno centre greitis didžiausias, o palei kraštą mažiausias;
- Esant aterosklerozei ir trombozei šalia atitinkamai plokštelės ir krešulio kraujo tekėjimo greitis ženkliai padidėja. Apskaičiuotą ir ultragarsu gautus rezultatus galima lyginti ir tokiu būdu nustatinėti stenozės stadiją;
- Esant trombozei šalia krešulio atsiranda turbulencija;
- Esant aneurizmai kraujo tekėjimo greitis nepažeistoje dalyje išlieka normos ribose, o aneurizmos viduje labai mažas;
- Modeliuojant kraujo tekėjimo greičio pasiskirstymą galima naudoti Niutoninį arba Karo modelį, tačiau abiem atvejais gaunami labai panašūs rezultatai, vadinasi kraujo tekėjimo greičiui nustatyti tinka ir Niutoninis modelis.

Tolimesniuose darbuose planuojama:

- Sumodeliuoti kraujo tekėjimo greičio pasiskirstymą esant kraujagyslių patologijoms trimačiu atveju;
- Ištirti slėgio įtaką hemodinamikos patologijoms;
- Sumodeliuoti smulkesnes kraujagysles naudojant neniutoninius modelius.

Computational fluid dynamics of the hemodynamic disorders

Summary

This thesis analyses the methods of solving Computational fluid dynamics (CFD) problems with COMSOL Multiphysics software. The mathematical theory of Navier-Stokes equations and three main diseases of the blood vessels such as atherosclerosis, thrombosis and aneurysm are described. Then three main diseases of the blood vessels are analysed to research the blood flow velocity. The calculated result of the blood flow velocity in each model is compared with the blood flow velocity examined by ultrasound. The results of two main CFD models such as Newtonian and Carreau are compared either.

Literatūra

- [1] ASCHER U.M., *Numerical Methods for Evolutionary Differential Equations*, Eur. J. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- [2] BROCHURE BY BOSTON SCIENTIFIC, *Intercranial atherosclerosis*, National Stroke Association, 2006.
- [3] BUDRYS V., *Klinikinė neurologija. Antrasis pataisytas ir papildytas leidimas*, Vilnius, UAB „Vaistų žinios“, 2009.
- [4] COSTANTINI V., LENTI M., *Treatment of acute occlusion of peripheral arteries*, Ann Acad Med Singapore 1994, 23(6): 8447.
- [5] DANDY W.E., *Intracranial aneurysm of the internal carotid artery cured by operation*, Ann. Surg. 1938, 107: 654-9.
- [6] DOTT N.M., *Intracranial aneurysms cerebral arterio-radiography and surgical treatment*, Edinb. Med. J. 1933, 40: 219-34.
- [7] FORMAGGIA L., QUARTERONI A., VENEZIANI A., *Cardiovascular Mathematics*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2009.
- [8] GALANAUD J., LAROCHE J., RIGHINI M., *The history and historical treatments of deep vein thrombosis*, J. Thromb. Haemost., Amer. Math. Monthly 64, 1957, 257-258.
- [9] HARVEY W., *Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus*, 1628.

- [10] KARNER G., PERKTOLD K., HOFER M., LIEPSCH D., *Flow characteristics in an anatomically realistic compliant carotid artery bifurcation model*, Comp. Meth. Biomech. Biomed. Engng., 1999, 2(3): 171–185.
- [11] KIM J.Y., KIM D.I., DO Y.S., LEE B.B., KIM Y.W., SHIN S.W., ET AL., *Surgical treatment for congenital arteriovenous malformation: 10 years' experience*, Eur J. Vasc. Endovasc. Surg., 2006, 32: 101–106.
- [12] KOPYLOV YU. F. ET AL., *Asymptomatic atherosclerosis of the brachiocephalic arteries: Current approaches to diagnosis and treatment*, 2017, 95-100.
- [13] KRAYENBUHL H.A., YASARGIL M.G., FLAMM E.S., ET AL., *Microsurgical treatment of intracranial saccular aneurysms*, J. Neurosurg. 1972, 37: 678-86.
- [14] LI Z. AND KLEINSTREUER C., *Fluid-structure interaction effects on sac-blood pressure and wall stress in a stented aneurysm*, J. Biomech. Engng., 2005, 127(4): 662–671.
- [15] LIBBY P., *History of Discovery. Inflammation in Atherosclerosis*, Arterioscler Thromb Vasc Biol., 2012, 32(9): 2045–2051.
- [16] MARCINKEVIČIUS E., SIMAITIS K., *Galvos smegenų arterinės aneurizmos: literatūros apžvalga*, Neurologijos seminarai, 2015, 19(65): 192–202.
- [17] NEOFYTOU P., *Comparison of blood rheological models for physiological flow simulation*, Biorheol., 2004, 41(6): 693–714.
- [18] PERKTOLD K., PROSI M., LEUPRECHT A., *Computer simulation of arterial flow and related transport phenomena*, University of Wales College of Medicine, Cardiff, 2002.
- [19] PILECKAS K., *Navjė-Stokso lygčių matematinė teorija*, Vilnius, 2007.
- [20] RAPS E.C., ROGERS J.D., GALETTA .S.L., SOLOMON R.A., LENNIHAN L., KLEBANOFF L.M., FINK M.E., *The clinical spectrum of unruptured intracranial aneurysms*, Arch. Neurol., 1993, 50: 265–268.
- [21] RASMUSSEN J., THYREGOD J., ENEVOLDSEN M.S., HENNEBERG K., *Using COMSOL Multiphysics for Biomechanical Analysis of Stent Technology in Cerebral Aneurysms*, 2009.

- [22] SIEBERT M.W., FODOR P.S., *Newtonian and Non-Newtonian Blood Flow over a Backward-Facing Step – A Case Study*, Excerpt from the Proceedings of the COMSOL Conference, Boston, 2009.
- [23] SKOBTSOV YU. A., RODIN YU. V., OVERKO V.S., *Issledovanie techeniya krovi v sosudakh s bifurkatsiey posle udaleniya ateroskleroticheskikh blyashek*, Zaslavskiy, 2008, 212 str.
- [24] STALIORAITYTĖ E., *Patologinė anatomija*, Kaunas, 2001.
- [25] STEIN P.D., SABBAH H.N., *Measured Turbulence and Its Effect on Thrombus Formation*, Circulation Research, 1974, 35: 608-614.
- [26] TEJADA-MARTINEZ A.E., BORBERG C.J., VENUGOPAL R., CARBALLO C., MORENO W.A., QUINTERO R.A., *Computational fluid dynamic analysis of flow velocity waveform notching in umbilical arteries*, Am J Physiol. Regul. Integr. Comp. Physiol., 2010.
- [27] ŠUSTICKAS G., UŠINSKIENĖ J., MIGAUSKAS G., KŠANAS U., KVAŠČEVIČIUS R., ŠIRŠINANTIS S., GAIDELIENĖ J., GAIGALAITĖ V., *Galvos smegenų arterijų aneurizmų maišo ir kaklo santykio klinikinė reikšmė*, Lietuvos Chirurgija, 2007, 5(1): 45–52.