VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS INSTITUTAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Grintas Junevičius

Pizo skaičiai, kurie yra Litlvudo polinomų šaknys

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ....

Darbo vadovas **prof. dr. Paulius Drungilas**

Vilnius 2019

Turinys

1 skyrius

Įvadas

Šiame darbe nagrinėjamos mažo aukščio polinomų šaknys intervale (1,2) ir pagal atliktus skaičiavimus iškeliama hipotezė apie tam tikrų šių šaknų klasių persidengimą. Toliau apibrėšime keletą sąvokų, reikalingų pilnai suformuluoti uždavinį ir rezultatus.

1 apibrėžimas. Vieno kintamojo nenulinis polinomas

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \;\; n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

yra vadinamas *Litlvudo polinomu*[1], jei visi jo koeficientai $a_i \in \{\pm 1\}$. Litlvudo polinomo šaknys vadinamos *Litlvudo skaičiais.*

Polinomas $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ vadinamas neredukuojamu virš racionaliųjų skaičių, jei $p(x)$ neišskaidomas dviejų nenulinių polinomų $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, kurių laipsniai mažesni už polinomo $p(x)$ laipsnį, sandauga $f(x) \cdot g(x)$. Kitaip tariant, polinomas $p(x)$ yra neredukuojamas virš $\mathbb{Q}$, jei lygybė $p(x) = f(x) \cdot g(x), f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ yra galima tik tuo atveju, kai $f(x) \in \mathbb{Q}$, arba $g(x) \in \mathbb{Q}$ arba $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}$.

Pavyzdžiui, polinomą $x^3 - 1$ virš racionaliųjų skaičių galima išskaidyti į dviejų polinomų sandaugą: $x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$.

2 apibrėžimas. Kompleksinis skaičius α yra vadinamas *algebriniu* skaičiumi, jei jis yra kokio nors nenulinio polinomo su sveikaisiais koeficientais šaknis, t.y. jei egzistuoja toks nenulinis polinomas $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, kad $f(\alpha) = 0$. Jei polinomo

[1] Pagal John Edensor Littlewood

$f(x)$ vyriausias koeficientas lygus 1, tai skaičius α vadinamas *sveikuoju algebriniu skaičiumi.*

Tarkime, α yra algebrinis skaičius. Mažiausio laipsnio normuotas (kurio vyriausiasis koeficientas yra lygus 1) polinomas $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, kurio šaknis yra α, vadinamas algebrinio skaičiaus α *minimaliuoju polinomu*, o jo laipsnis vadinamas algebrinio skaičiaus α *laipsniu* ir žymimas $\deg(\alpha)$.

Pavyzdžiui, bet kuris racionalusis skaičius $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ yra pirmojo laipsnio algebrinis skaičius, nes yra polinomo $n \cdot x - m$ šaknis.

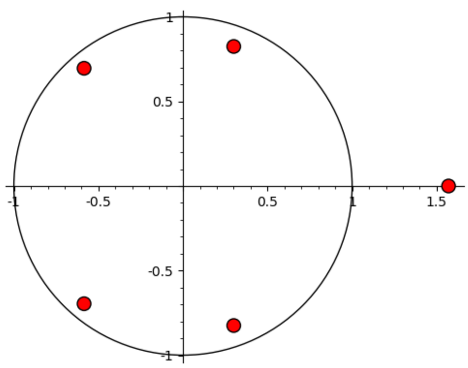
Algebrinio skaičiaus α minimalaus polinomo $P(x)$ šaknys vadinamos skaičiaus α *algebriniais jungtiniais skaičiais.* Taigi n-tojo laipsnio algebrinis skaičius turi lygiai n algebrinių jungtinių.

Algebrinių skaičių $\pm\sqrt{3}$ minimalusis polinomas yra x^2-3, todėl šie skaičiai vienas kitam yra algebriniai jungtiniai, be to, kadangi polinomas $x^2 - 3$ yra normuotas ir su sveikaisiais koeficientais, tai šie skaičiai taip pat yra ir sveikieji algebriniai.

3 apibrėžimas. Tegul $\beta > 1$ yra sveikasis algebrinis skaičius, kurio visi algebriniai jungtiniai skaičiai guli vienetinio kompleksinio apskritimo $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ viduje. Tuomet β yra vadinamas *Pizo skaičiumi* [2] (žr. 1.1 pav.).

Gerai žinoma (žr. [11]), kad Pizo skaičių aibė $\mathcal{S}$ yra uždaras realiųjų skaičių aibės poaibis. Mažiausias Pizo skaičius yra $1.3247\ldots$ – didžiausia realioji polinomo $x^3 - x - 1$ šaknis.

Minimalų Pizo skaičiaus polinomą vadinsime *Pizo polinomu.*



1.1 pav.: Pizo polinomo $z^5 - z^4 - z^2 - 1$ šaknys

[2]Pagal Charles Pisot, taip pat vadinamas *Pisot–Vijayaraghavan* skaičiumi

Šiame darbe nagrinėjamas toks klausimas:

4 klausimas. *Kurie Pizo skaičiai intervale* $(1, 2)$ *nėra Litlvudo skaičiai?*

Borveinas ir Harė[3] [2] parodė, kad Pizo skaičius $1.9540\ldots$, kurio minimalus polinomas yra

$$x^{10} - 2x^8 - 3x^7 - x^6 - x^3 + x + 1,$$

nėra Litlvudo skaičius. Ziezys [14] gavo tokį rezultatą:

5 teorema ([14])**.** *Visi aibės* $\mathcal{S} \cap (1, 1.9541)$ *ribiniai taškai yra Litlvudo skaičiai.*

Šio darbo idėja buvo tęsti Ziezio pradėtus skaičiavimus ribiniams žemo laipsnio Pizo skaičiams aibėje $(1, 2)$, tikintis, kad iš gautų rezultatų bus galima padaryti išvadas apie likusius aibės $\mathcal{S} \cap (1, 2)$ ribinius skaičius ir jas matematiškai (pvz indukcijos metodu) pagrįsti. Deja, iš gautų rezultatų nepavyko įžvelgti bendros struktūros (žr. 3.1 lentelę), tačiau atliktų skaičiavimų pagrindu galime suformuluoti pagrindinį šio darbo teiginį, kuris pagerina minėtą Ziezio gautą rezultatą (žr. 6 teoremą).

Teorema. *Visi aibės* $\mathcal{S} \cap (1, 1.99999997019767)$ *ribiniai taškai yra Litlvudo skaičiai.*

Taip pat gauti rezultatai leidžia iškelti tokią hipotezę.

Hipotezė. *Visi aibės* $\mathcal{S} \cap (1, 2)$ *ribiniai taškai yra Litlvudo skaičiai.*

Šis rezultatas gautas panaudojus Drungilo, Jankausko ir Šiurio [6] sukurtą algoritmą, kuris duotam polinomui P su sveikaisiais koeficientais, neturinčiam šaknų ant vienetinio kompleksinio apskritimo, nustato, ar egzistuoja toks polinomas Q su koeficientais iš fiksuotos aibės $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}$, kurį polinomas P dalija be liekanos.

Pagalbiniams skaičiavimams buvo panaudotas matematinis paketas *CoCalc* [10], 13 algoritmas implementuotas *C++* kalba, o skaičiavimai atlikti Vilniaus universiteto informacinių technologijų atviros prieigos centro superkompiuteriu.

Svarbiausi rezultatai apie intervalo $(1, 2)$ Pizo skaičius pateikti 2 skyriuje, 3 skyriuje aprašyti skaičiavimų rezultatai, o panaudotas algoritmas pateiktas ir aprašytas 4 skyriuje.

[3] Peter B. Borwein ir Kevin G. Hare

2 skyrius

Pizo skaičiai intervale (1,2)

Šis skyrius yra skirtas apžvelgti tam tikrus rezultatus susijusius su Pizo skaičiais intervale (1,2). Medžiaga pateikiama pagal Boido[1] straipsnį [3] (žr. antrą skyrelį).

Tegul Pizo skaičius β yra aibės $\mathcal{S}$ ribinis taškas, o $C(x)$ yra β minimalusis polinomas. Su kiekvienu tokiu β yra susietos bent dvi polinomų sekos

$$P_n(x) = x^n C(x) \pm A(x), \tag{2.1}$$

čia $A(x)$ yra iš baigtinės aibės ir priklauso nuo β. Kiekvienam, pakankamai dideliam n, $P_n(x)$ turi vienintelę šaknį kompleksinio vienetinio apskritimo išorėje ir todėl yra Pizo polinomo ir ciklotominių polinomų sandauga. Pizo skaičiai, kurie yra polinomų $P_n(x)$ šaknys, yra vadinami *reguliariaisiais Pizo skaičiais*.

Amara[2] [1] nustatė visus ribinius aibės $\mathcal{S} \cap (1, 2)$ skaičius. Juos sudaro dvi begalinės sekos $\{\phi_r\}$ ir $\{\psi_r\}$, ir vienas išskirtinis skaičius $\hat{\theta}'_2$. Šių skaičių minimalieji polinomai yra

$$x^r(x-2) + x - 1 \quad \text{skaičiams} \quad \phi_r,$$

$$\frac{x^{r+1}(x-2)+1}{x-1} = x^{r+1} - x^r - x^{r-1} - \cdots - x - 1 \quad \text{skaičiams} \quad \psi_r$$

ir

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 1 \quad \text{skaičiui} \quad \hat{\theta}'_2.$$

[1] David W. Boyd
[2] Mohamed Amara

Atitinkantys polinomai $A(x)$ yra:

$$x^r - x^{r-1} + 1, \quad x^r - x + 1 \quad \text{ir} \quad (x^r + 1)(x - 1) \quad \text{skaičiams} \;\; \phi_r,$$

$$x^{r+1} - 1 \quad \text{ir} \quad \frac{x^r - 1}{x - 1} \quad \text{skaičiams} \;\; \psi_r$$

ir

$$x^3 + x^2 - x - 1 \quad \text{ir} \quad x^4 - x^2 + 1 \quad \text{skaičiui} \;\; \hat{\theta}'_2.$$

Abi sekos – $\{\phi_r\}$ ir $\{\psi_r\}$ – konverguoja į 2. Be to, šie skaičiai „persidengia“ tokia tvarka:

$$\phi_1 = \psi_1 < \phi_2 < \psi_2 < \phi_3 < \hat{\theta}'_2 < \psi_3 < \phi_4 < \psi_4 < \cdots$$

Skaitinės (iki trijų ženklų po kablelio) jų reikšmės yra

$$1.618 < 1.755 < 1.839 < 1.867 < 1.905 < 1.928 < 1.933 < 1.966 < \cdots.$$

Reguliarūs Pizo skaičiai, konverguojantys į šiuos ribinius taškus, sudaro be galo daug begalinių Pizo skaičių sekų intervale $(1, 2)$. Talmudis[3] [12, 13] parodė, kad bet kokiam $\delta > 0$, be šių reguliarių Pizo skaičių, yra tik baigtinis skaičius Pizo skaičių intervale $(1, 2-\delta)$, šie skaičiai vadinami *nereguliariaisiais* Pizo skaičiais. Boidas [4, 5] sukūrė algoritmą šiems skaičiams ieškoti ribinio Pizo skaičiaus aplinkoje.

[3] Faouzia L. Talmoudi

3 skyrius

Skaičiavimai ir rezultatai

Atsakymo į 4 klausimą paieškas pradėjome apsiribodami tik ribiniais aibės $\mathcal{S}\cap(1,2)$ taškais. Juos sudaro dvi begalinės sekos $\{\phi_r\}$ ir $\{\psi_r\}$, ir vienas išskirtinis skaičius $\hat{\theta}_2'$. Visų sekos $\{\psi_r\}$ narių minimalūs polinomai pagal apibrėžimą jau yra Litlvudo (žr. 2 skyrių), o skaičius $\hat{\theta}_2'$ yra Litlvudo pagal Ziezį [14], todėl užtenka nagrinėti tik sekos $\{\phi_r\}$ narius.

Tirdami, ar Pizo skaičius β yra ir Litlvudo skaičius naudojomės Drungilo, Jankausko ir Šiurio [6] pateiktu algoritmu (žr. 4 skyrių), kuris duotam polinomui P, neturinčiam šaknų ant vienetinio kompleksinio apskritimo, nustato, ar egzistuoja toks polinomas Q su koeficientais iš aibės $\mathcal{D}$, kurį polinomas P dalija be liekanos. Šiuo atveju duotas polinomas P yra minimalus Pizo skaičiaus β polinomas, o aibė $\mathcal{D}=\{-1,1\}$, nes ieškomas polinomas Q yra Litlvudo. Radę polinomo P Litlvudo kartotinį įsitikiname, kad Pizo skaičius β yra ir Litlvudo skaičius.

Polinomų generavimo, filtravimo ir duomenų apdorojimo darbai buvo atlikti pasinaudojant matematiniu paketu *CoCalc* [10], 13 algoritmas implementuotas *C++* kalba, o skaičiavimai atlikti Vilniaus universiteto informacinių technologijų atviros prieigos centro superkompiuteriu.

Taigi, skaičiavimų tikslas - rasti mažiausio įmanomo laipsnio Litlvudo kartotinius (*minimalius Litlvudo kartotinius*) kuo didesniam skaičiui (ribinių Pizo skaičių) sekos ϕ_r minimalių polinomų, tikintis, kad bus galima pastebėti dėsningumą ir apibendrinti rezultatus likusiems šios sekos nariams. Litlvudo kartotinius pavyko rasti trisdešimčiai ϕ_r polinomų, toliau pateikiama lentelė apibendrinanti skaičiavimų rezultatus.

3.1 lentelė: Skaičiavimų rezultatai

r	ϕ_r	ϕ_r minimalus polinomas	$\min(\deg L)$[1]	$\#p\|L$ [2]
1	1.61803398874989	$x^2 - x - 1$	2	1
2	1.75487766624669	$x^3 - 2x^2 + x - 1$	6	2
3	1.86676039917386	$x^4 - 2x^3 + x - 1$	14	3
4	1.93318498189952	$x^5 - 2x^4 + x - 1$	20	2
5	1.96716821281397	$x^6 - 2x^5 + x - 1$	62	2
6	1.98386139616213	$x^7 - 2x^6 + x - 1$	126	2
7	1.99203008684625	$x^8 - 2x^7 + x - 1$	62	3
8	1.99604712056030	$x^9 - 2x^8 + x - 1$	72	2
9	1.99803338018148	$x^{10} - 2x^9 + x - 1$	888	2
10	1.99901959958496	$x^{11} - 2x^{10} + x - 1$	1 532	2
11	1.99951064221363	$x^{12} - 2x^{11} + x - 1$	3 254	2
12	1.99975556079027	$x^{13} - 2x^{12} + x - 1$	7 904	2
13	1.99987784764643	$x^{14} - 2x^{13} + x - 1$	11 810	$*$
14	1.99993894247944	$x^{15} - 2x^{14} + x - 1$	32 766	$*$
15	1.99996947636644	$x^{16} - 2x^{15} + x - 1$	254	5
16	1.99998473958086	$x^{17} - 2x^{16} + x - 1$	272	2
17	1.99999237016887	$x^{18} - 2x^{17} + x - 1$	253 920	$*$
18	1.99999618518631	$x^{19} - 2x^{18} + x - 1$	413 384	$*$
19	1.99999809262044	$x^{20} - 2x^{19} + x - 1$	761 762	$*$
20	1.99999904631750	$x^{21} - 2x^{20} + x - 1$	5 460	2
21	1.99999952316068	$x^{22} - 2x^{21} + x - 1$	4 194 302	$*$
22	1.99999976158085	$x^{23} - 2x^{22} + x - 1$	2 088 704	$*$
23	1.99999988079056	$x^{24} - 2x^{23} + x - 1$	2 097 150	$*$
24	1.99999994039532	$x^{25} - 2x^{24} + x - 1$	10 961 684	$*$
25	1.99999997019767	$x^{26} - 2x^{25} + x - 1$	298 934	$*$
26	1.99999998509884	$x^{27} - 2x^{26} + x - 1$	$>$ 64 910 811 [3]	$*$
27	1.99999999254942	$x^{28} - 2x^{27} + x - 1$	17 895 696	$*$
28	1.99999999627471	$x^{29} - 2x^{28} + x - 1$	$>$ 48 294 243	$*$
29	1.99999999813735	$x^{30} - 2x^{29} + x - 1$	10 845 876	$*$
30	1.99999999906868	$x^{31} - 2x^{30} + x - 1$	2 097 150	$*$
31	1.99999999953434	$x^{32} - 2x^{31} + x - 1$	1 022	3
32	1.99999999976717	$x^{33} - 2x^{32} + x - 1$	1 056	2
33	1.99999999988358	$x^{34} - 2x^{33} + x - 1$	$>$ 41 213 443	$*$

[1] Minimalus Litlvudo kartotinio laipsnis

[2] Minimalaus Litlvudo kartotinio neredukuojamų daliklių skaičius. $*$ nurodyta prie tų polinomų, kurių Litlvudo kartotinių išskaidyti su CoCalc nepavyko

[3] Dėl ribotų resursų Litlvudo kartotinio rasti nepavyko, tačiau jei jis egzistuoja, tai jo laipsnis yra didesnis nei 64 910 811

Iš gautų rezultatų iš karto galime suformuluoti tokį 5 teoremos pagerinimą:

6 teorema. *Visi aibės* $\mathcal{S} \cap (1, 1.99999997019767)$ *ribiniai taškai yra Litlvudo skaičiai.*

Deja, tačiau nei iš Litlvudo kartotinių laipsnių, nei iš jų išskaidymo neredukuojamais dalikliais negalime daryti prielaidų apie tolimesnius šios sekos narius. Pavyzdžiui, matome, kad mažiausias skaičiaus ϕ_{16} minimalaus polinomo Litlvudo kartotinis yra 272 laipsnio, tačiau minimalaus ϕ_{17} polinomo Litlvudo kartotinis jau yra 253920 laipsnio. Analogiškai ir šių kartotinių neredukuojamų daliklių skaičius, atrodo, kinta atsitiktinai. Nors šie rezultatai ir nepasako nieko apie tolimesnius sekos ϕ_n narius, galime suformuluoti tokią hipotezę.

7 hipotezė. *Visi sekos* ϕ_r *nariai yra Litlvudo skaičiai.*

Taip pat atlikus skaičiavimus pastebėjome, kad kiekvienam Pizo polinomui iš 3.1 lentelės, algoritmo sukonstruoto medžio (žr. 11 apibrėžimą) dydis buvo vienetu didesnis nei to polinomo Litlvudo kartotinio laipsnis. Pavyzdžiui, skaičiaus ϕ_6 minimalaus polinomo mažiausio Litlvudo kartotinio laipsnis yra 126, o jam surasti sukonstruoto medžio dydis buvo 127. Tai reiškia, kad medį sudarė vienintelė šaka, o visos kitos medžio konstravimo metu buvo atmestos, nes netenkino 8 teiginyje nurodytos sąlygos. Galbūt, šio fakto priežasties radimas ateityje atves prie 7 hipotezės patvirtinimo.

Studijuodami Pizo skaičius bei 13 algoritmo veikimą pastebėjome, kad ieškant Litlvudo kartotinio Pizo polinomui P, kurio laipsnis yra n, (4.1) salygą užtenka patikrinti tik vienai iš polinomo P šaknų, sumažindami atliekamų operacijų skaičių n kartų ir optimizuodami algoritmo veikimą.

8 teiginys. *Tegul* $P(x)$ *yra Pizo polinomas, kurio šaknys yra* $|\alpha_i| < 1$ *ir* $\beta > 1$. *Ieškodami Litlvudo kartotinio polinomui* $P(x)$*, 9 apibrėžime esančias sąlygas* (4.1) *galime pakeisti viena sąlyga:*

$$|R(\beta)| \leqslant \frac{1}{\beta - 1}. \tag{3.1}$$

Įrodymas. Pizo polinomas yra neredukuojamas ir kartotinių šaknų turėti negali, todėl $e_j = 1$ kiekvienam $j \in \{1, 2, ..., s\}$, be to, pagal 11 apibrėžimą, skaičius $B = \max\{|b| : b \in \{-1, 1\}\} = 1$ (aibė $\mathcal{D}$ šiuo atveju yra $\{-1, 1\}$).

Dabar panagrinėkime (3.1) nelygybės reikšmes taškuose $|\alpha_i| < 1$. 13 algoritmas, konstruodamas orientuotą grafą $\mathcal{R}(P, B)$ pradeda nuo šakninės viršūnės

$R_0 \in \{-1, 1\}$, kuriai (4.1) sąlyga yra teisinga su visais α_i:

$$| \pm 1| \leqslant \frac{1}{1 - |\alpha_i|}.$$

Kiekviena nauja viršūnė į grafą prijungiama tokiu būdu: $R_{j+1}(x) = x \cdot R_j(x) \pm b \pmod{P}$. Redukcija moduliu P polinomo $R(x)$ reikšmių taškuose α_i nepakeičia, todėl jei 3.1 nelygybė buvo teisinga kokiam nors liekaniniam polinomui R_j ir skaičiui α_k, tai pagal indukciją ji galios ir visiems tolimesniems, toje pačioje šakoje esantiems polinomams $R_{j+m}, m \in \{1, 2, \dots\}$:

$$|R_{j+1}(\alpha_k)| = |\alpha_k \cdot R_j(\alpha_k) \pm 1| \leqslant |\alpha_k| \cdot |R_j(\alpha_k)| + 1 \leqslant \frac{|\alpha_k|}{1 - |\alpha_k|} + 1 = \frac{1}{1 - |\alpha_k|}. \tag{3.2}$$

Gavome, kad nelygybė 3.1 galioja visoms polinomo P šaknims $|\alpha| < 1$, todėl tikrinti ją pakanka tik su Pizo skaičiumi β. $\square$

Prieš modifikuojant 13 algoritmo kodą pritaikant 8 teiginio sąlygą didžiausias atrasto Litlvudo kartotinio laipsnis buvo 761 762, tačiau optimizavus algoritmą pavyko atrasti dar kelis kartotinius, vieno iš jų laipsnis yra net 17 895 696.

4 skyrius

Algoritmas

Šiame darbe naudotas Drungilo, Jankausko ir Šiuro [6] algoritmas jau buvo aprašytas mano bakalauro baigiamajame darbe [7]. Vis dėlto, siekdami, kad skaitytojas susidarytų pilną vaizdą, algoritmo aprašymą ir pagrindinius teiginius pakartojame.

9 apibrėžimas. Tarkime, $P(x)$ yra polinomas su sveikaisiais koeficientais, kurio laipsnis $\geqslant 1$, ir kuris kompleksinėje plokštumoje neturi šaknų ant vienetinio apskritimo $|z| = 1$. Tegul $P(x)$ virš kompleksinių skaičių išsiskaido taip:

$$P(x) = a \cdot (x - \alpha_1)^{e_1}(x - \alpha_2)^{e_2} \cdots (x - \alpha_s)^{e_s},$$

kur $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ yra skirtingi kompleksiniai skaičiai ir $e_j \geqslant 1$ kiekvienam $j = 1, 2, \ldots, s$. Tegul $B \in \mathbb{R}$ yra bet koks teigiamas skaičius.

Apibrėžkime $\mathcal{R}(P, B)$ kaip aibę visų polinomų $R \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg R < \deg P$, kuriems kiekvienam $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ yra teisingos nelygybės:

$$\begin{aligned} |R(\alpha_j)| &\leqslant \frac{B}{||\alpha_j| - 1|}, \\ |R'(\alpha_j)| &\leqslant \frac{1!B}{||\alpha_j| - 1|^2}, \\ &\cdots \\ |R^{(e_j-1)}(\alpha_j)| &\leqslant \frac{(e_j - 1)!B}{||\alpha_j| - 1|^{e_j}}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Čia $R^{(j)}$ žymi j-tąją polinomo R išvestinę ir $R^{(0)} := R$.

13 algoritmas ieškodamas polinomo $P(x)$ kartotinio aibėje $\mathcal{D}[x]$ konstruoja orientuotą grafą, kurio viršūnės atitinka skirtingus polinomus iš aibės $\mathcal{R}(P, B)$. Jei

šiame grafe egzistuoja kelias, prasidedantis polinomu $R_n(x) = a_n \in \mathcal{D}$ ir pasibaigiantis nuliniu polinomu $R_0(x) = 0$, $P(x)$ kartotinis aibėje $\mathcal{D}[x]$ egzistuoja. Norint įrodyti, kad toks kelias neegzistuoja, t. y., kad polinomas neturi kartotinio polinomo su koeficientais iš aibės $\mathcal{D}$, reikėtų pereiti visą sukonstruotą grafą. Taigi aibė $\mathcal{R}(P, B)$ turėtų būti baigtinė.

10 lema. *Tegul $B \in \mathbb{R}$ ir $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ kaip 9 apibrėžime. Tada $\mathcal{R}(P, B)$ yra baigtinė aibė.*

10 lemos ir 12 teoremos įrodymus galima rasti [6] (Lemma 16, Theorem 18).

11 apibrėžimas. Pažymėkime $\mathcal{G} = \mathcal{G}(P, \mathcal{D})$ orientuotą grafą, kurio viršūnės atitinka visus skirtingus liekanų polinomus $R \in \mathcal{R}(P, B) \cup \mathcal{D}$, kur $B = \max\{|b| : b \in \mathcal{D}\}$. Viršūnes, vaizduojančias polinomus R_i ir R_j, sujungiame briauna, einančia iš R_i į R_j, jeigu

$$R_j \equiv x \cdot R_i + b \pmod P$$

faktoržiede $\mathbb{Z}[x]/(P)$ kokiam nors $b \in \mathcal{D}$.

Tegul $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ yra normuotas polinomas. Tuomet bet kurį polinomą $Q \in \mathbb{Z}[x]$ galime padalinti iš P: egzistuoja vieninteliai polinomai su sveikaisiais koeficientais S ir R, $\deg R < \deg P$, kad $Q = P \cdot S + R$. Bet kuriam kompleksiniam skaičiui z, tenkinančiam $P(z) = 0$, turėsime $Q(z) = R(z)$. Atvaizdis $Q \to Q \pmod P$ yra žiedų $\mathbb{Z}[x]$ ir $\mathbb{Z}[x]/(P)$ homomorfizmas, o liekanos polinomas R yra faktoržiedo $\mathbb{Z}[x]/(P)$ klasės $R + (P)$ atstovas.

12 teorema ([6])**.** *Tegul $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ yra normuotas polinomas, neturintis šaknų kompleksinėje plokštumoje ant vienetinio apskritimo $|z| = 1$. Tuomet $P(x)$ dalija polinomą*

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$$

su koeficientais $a_j \in \mathcal{D}$ ir vyriausiuoju koeficientu $a_n \in \mathcal{D}$, tada ir tik tada, kai grafe $\mathcal{G} = \mathcal{G}(P, \mathcal{D})$ egzistuoja kelias, kuris prasideda viršūne $R(x) = a_n$ ir baigiasi viršūne $R(x) = 0$. Šio kelio ilgis yra lygus n – polinomo Q laipsniui.

Šios teoremos sąlyga, kad $P(x)$ neturi šaknų ant vienetinio apskritimo, remiantis 10 lema, užtikrina, kad grafas $\mathcal{R}(P, B)$ bus baigtinis, todėl jame atlikus baigtinę paiešką, galima bus nustatyti, ar polinomas $P(x)$ turi kartotinį polinomą su koeficientais, priklausančiais aibei $\mathcal{D}$. Tačiau ši 12 teoremos sąlyga nėra būtina, kad grafas

$\mathcal{R}(P, B)$ būtų baigtinis, t.y. kai kuriems polinomams, turintiems šaknų ant vienetinio apskritimo $|z| = 1$, grafas $\mathcal{R}(P, B)$ taip pat yra baigtinis. Bendruoju atveju su tokiais polinomais galima elgtis taip: konstruojame grafą $\mathcal{R}(P, B)$, panaudodami tik tas polinomo $P(x)$ šaknis $\alpha \in \mathbb{C}$, kurių modulis $|\alpha| \neq 1$. Jei sukonstruojamas baigtinis grafas $\mathcal{R}(P, B)$, tai galima bus nustatyti, ar polinomas turi kartotinį polinomą su koeficientais, priklausančiais aibei $\mathcal{D}$.

Toliau pateikiamas algoritmo iš [6] *pseudokodas* anglų kalba.

13 Algorithm. *Determines whether $P \in \mathbb{Z}[x]$ has a multiple $Q \in \mathcal{D}[x]$ with the leading coefficient $a \in \mathcal{D}$.*

Input: *a monic polynomial $P \in \mathbb{Z}[x]$,*
the digit set $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}$,
the leading coefficient $a \in \mathcal{D}$, $a \neq 0$.
Output: *a polynomial $Q \in \mathcal{D}[x]$ or $\varnothing$, if such Q does not exist*
Variables: *the set $\mathcal{V}$ of visited vertices of the directed graph $\mathcal{G} = \mathcal{G}(P, \mathcal{D})$,*
the set $\mathcal{E}$ of edges that join vertices of $\mathcal{V}$,
found - boolean variable indicating if the search is finished.
Method: *Depth-first search using Theorem 12.*

```
Step 0: set V = ∅, E = ∅
Step 1: add the polynomial R = a into V
Step 2: set found := False
Step 3: call do_search(a, found)
Step 4: if found then print a
          else print ∅
        end if
Step 5: stop.

procedure do_search(local var R ∈ Z[x], var found):
    local var S ∈ Z[x]
    if R = 0 then
        set found := True
    else
        for each d ∈ D do
            compute S := x · R + d  (mod P).
            if S ∉ V and S ∈ R(P, B), where B := max{|d| : d ∈ D} then
                add S to V
                add d as an edge from R to S to E
                call do_search(S, found)
            end if
            if found then
                print digit d
                break loop
            end if
        end do
    end if
end proc
```

Pisot numbers as roots of Littlewood Polynomials

Summary

An integer polynomial is called a *Littlewood polynomial* if all of its coefficients belong to $\{\pm 1\}$. An algebraic integer $\alpha > 1$ is called a *Pisot number* if all of its algebraic conjugates, except for α itself, lie in the unit disc $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. We investigate the problem of proving that all of the limit points in the interval $(1, 2)$, which are Pisot numbers, are roots of Littlewood polynomials. The main result of this thesis implies this statement is true in the interval $(1, 1.99999997019767)$. This improves the result obtained by Ziezys [14].

Literatūra

[1] M. Amara, *Ensembles fermés de nombres algébriques*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (3) **83** (1966), 215–270 (1967).

[2] P. Borwein, K. G. Hare, *Some computations on the spectra of Pisot and Salem numbers*, Math. Comp. **71** (238) (2002), 767–780.

[3] D. W. Boyd, *On beta expansions for Pisot numbers*, Math. Comp. **65** (214) (1996), 841–860.

[4] D. W. Boyd, *Pisot numbers in the neighborhood of a limit point. II*, Math. Comp. **43** (168) (1984), 593–602.

[5] D. W. Boyd, *Pisot numbers in the neighbourhood of a limit point. I*, J. Number Thory **21** (1) (1985), 17–43.

[6] P. Drungilas, J. Jankauskas, J. Šiurys *On Littlewood and Newman multiples of Borwein polynomials*, Math. of Comp. DOI: https://doi.org/10.1090/mcom/3258.

[7] G. Junevičius, *Litlvudo polinomai, turintys Njūmeno kartotinius* (Bakalauro baigiamasis darbas, Vilniaus universitetas), 2017.

[8] S. Lang, *Algebra,* 3rd ed., Graduate texts in Mathematics, 211, Springer, New York, 2002.

[9] M.R. Murty, J. Esmonde, *Problems in algebraic number theory,* 2nd ed., Graduate texts in Mathematics, 190, Springer, New York, 2005.

[10] SageMath, Inc., *CoCalc Collaborative Computation Online*, 2019, `https://cocalc.com/`.

[11] R. Salem, *A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan*, Duke Math. J. **11** (1944), 103–108.

[12] F. L. Talmoudi, *Sur les nombres de* $S \cap [1, 2]$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **285** (16) (1997), A969–A971.

[13] F. L. Talmoudi, *Sur les nombres de* $S \cap [1, 2[$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **287** (10) (1997), A739–A741.

[14] G. Ziezys, *Littlewood numbers and regular Pisot numbers in the interval (1, 2)* (Master thesis, Vilnius university), 2018.