

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS INSTITUTAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS
KATEDRA

Šarūnas Totoraitis

Ciklainių, neturinčių ilgų ciklų, asimptotinė
elgsena

Bakalauro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti
Darbo vadovas Prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius

Vilnius 2019

Turiny

1	Apibrėžimai	3
2	Ivadas	6
3	Istorija	7
4	Pagalbinės lemos ir teoremos	8
5	Teoremų įrodymai	10
6	Baigiamosios pastabos	14
7	Summary	15
8	Literatūra	16

1 Apibrėžimai

Skaidinys

Aibės A skaidiniu (k skaidiniu) vadiname išraišką $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$, $A_j \subset A$, $A_j \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq n$; čia į sujungiamų poaibių tvarką neatsižvelgiama.

Ansamblis

Tarkime, kad turime bet kokius objektus (atomus) su skirtingomis žymėmis (paprastai skaičiais $1, 2, \dots$) ir taisyklę, kaip iš $j \geq 1$ atomų padaryti struktūrą. Pavyzdžiui, galime sudaryti

- aibę,
- ciklą,
- orientuotą ciklą,
- jungų grafą,
- ar kitokią konstrukciją.

Tegul iš j atomų, nepriklausomai nuo žymių, pagal tą taisyklę padaromą $m_j \geq 1$ pasirinkto tipo struktūrų. Tada j bus kiekvienos iš jų eilė. Sudarytų kombinatorinių struktūrų klasę pažymėkime U . Visa kiekybinė informacija apie tai, kiek ir kokių eilių struktūrų buvo apibrėžta, sukaupiama tokioje formalioje eksponentinėje generuojančioje eilutėje:

$$U(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{j!} x^j.$$

Vieną taisyklę panaudokime apibrėžti sudėtingesnes konstrukcijas.

Eilės n ansambliu vadinsime konstrukciją, gautą iš n atomų aibės skaidinio, kiekviename iš jo poaibių nepriklausomai ir pagal vieną taisyklę apibrėžus struktūrą.

Pritaikę atitinkamai viršų išvardintas taisykles gautume:

- tik n aibės skaidinį pirmuoju atveju;
- neorientuotų ciklų rinkinį (numeruotąjį antrojo reguliarumo grafą) – antruoju;

- orientuotų ciklų rinkinį (keitinio grafinę interpretaciją) – trečiuoju;
- numeruotąjį grafą, kaip jungiųjų pografių sąjungą – paskutiniu atveju.

Struktūrų klasės U generuotą ansamblių klasę pažymėsime A , o jos eksponentinę generuojančią eilutę pažymėsime $A(x)$.

$$A(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{i!} x^i.$$

Pastaba: šiame darbe patogumo dėlei sakysime, kad nagrinėjamos ansamblių klasės turi vieną nulinio svorio struktūrą. Rezultatams tai įtakos neturės, o viską užrašyti bus paprasčiau. Taigi:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_i}{i!} x^i.$$

Čia A_i yra i -tosios eilės ansamblių kiekis.

Ciklainis

Tegul $n \in \mathbb{N}$ ir turime intervalus (juosteles) $\{[1, 2], [3, 4], \dots, [2n-1, 2n]\}$. Iš j tokių juostelių "suklijavę" galus galime sudaryti

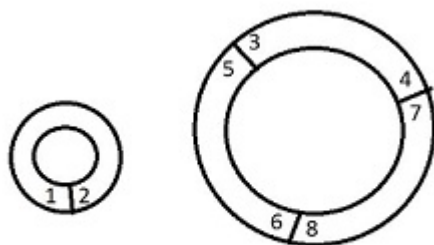
$$m_j = \frac{(j-1)!}{2} 2^j$$

neorientuotų ciklų, kuriuose juostelės $[2i-1, 2i]$ padėtis $2i-1 \rightarrow 2i$ kryptimi ar priešinga kryptimi yra laikomos skirtingomis (2 lemos įrodymas). Juostelių aibę išskaidome nesikertančių ir netuščių poaibių sąjungą ir iš kiekvieno poaibio sudarome minėtus ciklus. Gauname jų rinkinį vadinamą *ciklainiu*. Skaičių n vadinsime ciklainio eilės, o juostelių skaičių cikle – ciklo ilgiu.

Pavyzdžiai

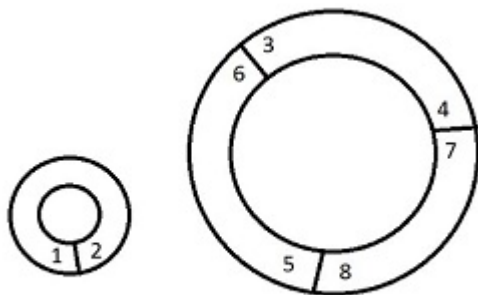
Šiuos objektus gerokai paprasčiau suvokti per jų vizualinę interpretaciją. Pavaizduosime kelis pavyzdžius. Informaciją apie konkretų ciklainį užrašysime taip: $\sigma = \{(a_1 \circ a_2), (a_3 \circ a_4), \dots, (a_{2n-1} \circ a_{2n})\}$ čia kiekvienas $a_i \in [1, 2n]$, o kai $i \neq j$, tai $a_i \neq a_j$, $(a_{2i-1} \circ a_{2i})$ žymi juostelių galų a_{2i-1} ir a_{2i} suklijavimą.

- Suklijuojame šiuos juostelių galus- $\{(1 \circ 2), (3 \circ 5), (4 \circ 7), (6 \circ 8)\}$. Gauname 2 ciklus- vieną pirmos eilės $\{(1 \circ 2)\}$ ir kitą trečios eilės $\{(3 \circ 5), (4 \circ 7), (6 \circ 8)\}$.



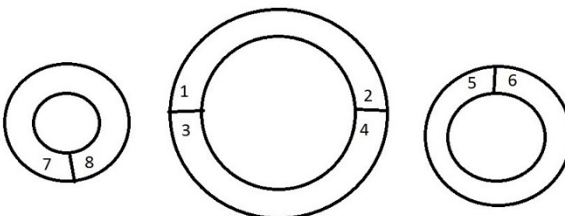
1 paveikslėlis

- Suklijuojame $\{(1 \circ 2), (3 \circ 6), (4 \circ 7), (5 \circ 8)\}$. Vėl gauname 2 ciklus $\{(1 \circ 2)\}$ ir $\{(3 \circ 6), (4 \circ 7), (5 \circ 8)\}$. Verta atkreipti dėmesį, kad palyginus su pirmu pavyzdžiu mes tik apsukome vieną juostelę $[5, 6]$, bet tai jau yra kitas ciklainis.



2 paveikslėlis

- Ir dar vienas pavyzdys su kitokiu ciklų kiekiu- $\{(1 \circ 3), (4 \circ 2), (5 \circ 6), (7 \circ 8)\}$, čia ciklai $\{(5 \circ 6)\}$, $\{(7 \circ 8)\}$ ir $\{(1 \circ 3), (4 \circ 2)\}$.



3 paveikslėlis

Leistinoji funkcija

Tarkime, kad $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ yra reguliari $|z| < R$, kur $0 < R < \infty$. Toliau tarkime, kad:

- (a) egzistuoja $R_0 < R : f(r) > 0$, kai $R_0 < r < R$;
- (b) egzistuoja funkcija $\delta(r)$ apibrėžta $R_0 < r < R$ taip, kad $0 < \delta(r) < \pi$ tiems r , ir taip, kad kai $r \rightarrow R$ ir $|\theta| \leq \delta(r)$, galioja

$$f(re^{i\theta}) \sim f(r)e^{i\{\theta a(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b(r)\}},$$

čia $a(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)}$, $b(x) = x a'(x)$;

- (c) kai $\delta(r) \leq |\theta| \leq \pi$, turime

$$f(re^{i\theta}) = \frac{o(f(r))}{\sqrt{b(r)}} \quad (r \rightarrow R);$$

- (d) kai $r \rightarrow \infty$, tai $b(r) \rightarrow +\infty$.

Jei $f(z)$ tenkina visas šias sąlygas, mes ją vadiname *leistinqja funkcija*.

2 Įvadas

Šio darbo pagrindinis tikslas— įvertinti tikimybę, kad atsitiktinai paimto n –os eilės ciklainio ilgiausių ciklų ilgiai yra sąlyginai trumpi, kai ciklainio eilė artėja į begalybę. Pirmu atveju įvertinsime tikimybę, kad ilgiausių ciklų ilgiai neviršija 2, o antrasis atvejis bendresnis— ieškosim tikimybės, kad ilgiausių ciklų ilgiai neviršija $r \geq 2$, čia r yra fiksuotas.

Tarkime $k_j(\sigma)$ yra j –ojo ilgio ciklų skaičius ciklainyje σ . Nagrinėjami ciklainiai neturi ilgesnių nei r ilgio ciklų, todėl $k_{r+1}(\sigma) = k_{r+2}(\sigma) = \dots = k_{n-1}(\sigma) = k_n(\sigma) = 0$. Sudarykime ciklinių komponentų vektorių $\bar{k}(\sigma) := (k_1(\sigma), \dots, k_r(\sigma), 0, \dots, 0)$, čia $0 \leq k_j(\sigma) := k_j \leq n$, $l(\bar{k}) := 1k_1 + \dots + rk_r = n$. Visų n –os eilės ciklainių, kurių ciklų ilgiai neviršija j , aibę pažymėkime $\Psi(n, j)$. Tada visų n –os eilės ciklainių aibė yra $\Psi(n, n)$. Įsitikinsime, kad $|\Psi(n, n)| = (2n - 1)!!$. Įvertinti ieškomoms tikimybės reiks rasti $|\Psi(n, r)|$. Ieškome tikimybų, tad verta paminėti, kad kiekvienas ciklainis iš $\Psi(n, j)$, jei $1 \leq j \leq n$, yra vienodai tikėtinas. Ieškoma tikimybė pirmuoju atveju bus

$$P(\sigma \in \Psi(n, 2)) = \frac{|\Psi(n, 2)|}{|\Psi(n, n)|},$$

o antruoju

$$P(\sigma \in \Psi(n, r)) = \frac{|\Psi(n, r)|}{|\Psi(n, n)|}.$$

Galią $|\Psi(n, r)|$ rasime iš eksponentinės generuojančios funkcijos. Sudarysime struktūrą U , kurios generuotosios ansamblių klasės eksponentinės generuojančios funkcijos $A(x)$ Teiloro skleidinio koeficientas prie x^n bus $\frac{|\Psi(n, r)|}{n!}$. Be to, įsitikinsim, kad $A(x) = \exp\{U(x)\}$. Šios išraiškos dėka įrodysim, kad $A(x)$ priklauso lestinųjų funkcijų klasei ir pritaikysim Hayman'o teoremą ([6] 183p.) gauti galutiniams šio darbo rezultatams.

Suformuluosime pagrindinius šio darbo rezultatus.

Teorema 1 Tegu $P(\sigma \in \Psi(n, 2))$ žymi tikimybę, kad atsitiktinio ciklainio ilgiausių ciklų eilė neviršija 2. Tada

$$P(\sigma \in \Psi(n, 2)) \sim \frac{e^{\frac{n}{2} + \sqrt{n} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{8}}}{n^{n/2} 2^{(n+2)/2}},$$

kai $n \rightarrow \infty$.

Teorema 2 Tegu $P(\sigma \in \Psi(n, r))$ žymi tikimybę, kad atsitiktinio ciklainio ilgiausių ciklų eilė neviršija r . Tada

$$P(\sigma \in \Psi(n, r)) \sim \frac{\exp\{\sum_{k=1}^r \frac{2^{k-1}}{k} \left(\frac{n}{2^{r-1}}\right)^{\frac{k}{r}}\}}{\sqrt{2k} n^{n/k} 2^{n/k}},$$

kai $n \rightarrow \infty$.

3 Istorija

Iki šiol darbai susiję su ciklainių ciklais buvo labiau orientuoti į ciklų kiekį. Yaglom ir Yaglom [1] (Problem 78, pp. 25, 155-156) apskaičiavo, kokia tikimybė sudaryti vieną n eilės ciklą n eilės ciklainyje:

$$P(k_n(\sigma) = 1) = \frac{2^{2n-1} n! (n-1)!}{(2n)!} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Winkler [2] (pp. 3, 6-7) surado ciklų skaičiaus n eilės ciklainyje matematinę viltį:

$$Ex \left[\sum_{i=1}^n k_i(\sigma) \right] = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2} \log n.$$

Yra pastebėtas ryšys tarp ciklainių ir keitinių. Tegu $\alpha(n, k)$ žymi kiek skirtingų būdų n keitinyje gali būti k ciklų, o $\beta(n, k)$ kiek skirtingų būdų n eilės ciklainyje gali susidaryti k ciklų. N. Pippenger [3] įrodė, kad $\beta(n, k) = 2^{n-k} \alpha(n, k)$.

Šiame darbe įvertinta ciklainių, neturinčių ilgų ciklų, skaičiaus asimptotinė elgsena. E. Manstavičius ir R. Petuchovas yra gavę analogiškus rezultatus keitiniais [5].

Kadangi ciklainiai priklauso ansamblių klasei, galima naudoti jų savybes, o Arratia, Barbour ir Tavarė [4] jų yra pateikę ne vieną.

4 Pagalbinės lemos ir teoremos

1 lema. *Iš n juostelių galima padaryti $(2n - 1)!!$ skirtingų ciklainių, tai yra $|\Psi(n, n)| = (2n - 1)!!$.*

Irodymas. Visi juostelių galai pažymėti nuo 1 iki $2n$. Paimkimime juostelės galą pažymėtą mažiausiu numeriu (šiuo atveju tai bus 1) ir suklijuokime su kuriuo nors iš likusių $2n - 1$ galų. Tam yra $2n - 1$ variantai. Toliau iš likusių nesuklijuotų juostelių imame vėl mažiausiu žymeniu pažymėtą (2 jau gali būti užimta) ir suklijuokime su kuriuo nors iš laisvų $2n - 3$ galų ($2n - 3$ variantai). Tęsiame šį procesą indukciškai ir gauname, kad juosteles suporuoti (arba sudaryti ciklainį) yra $(2n - 1)(2n - 3) \dots 3 \cdot 1 = (2n - 1)!!$ variantų.

2 lema. *Iš n juostelių juostelių galima padaryti $(n - 1)!2^{n-1}$ skirtingų n ilgio ciklų.*

Irodymas. Ilgio n ciklo sudarymas iš n juostelių yra tarsi n juostelių sustatymas ratu, o n elementų sustatyti ratu yra $(n - 1)!$ būdų. Kokiam nors $n \geq 2$ eilės cikle apsukus vieną juostelę susidaro kitas ciklainis, o juostelių yra n , dėl ko atsiranda 2^n kartų daugiau ciklainių. Tiesa, rato kryptis nesvarbi, ko pasekoje mes visus ciklainius įskaičiuojam 2 kartus. Pavyzdžiui, keitinių atveju (1 2 3) ir (3 2 1) yra skirtingi keitiniai, o juostelių sukabinimas $\{[1\ 2][3\ 4][5\ 6]\}$ (čia turima omeny, kad suklijuojam $\{(2 \circ 3), (4 \circ 5), (6 \circ 1)\}$ ir $\{[6\ 5][4\ 3][2\ 1]\}$ yra tas pats. Taigi, iš viso variantų gauname

$$\frac{(n - 1)!2^n}{2} = (n - 1)!2^{n-1},$$

kai $n \geq 2$, o variantas $n = 1$ trivialus, tam yra 1 būdas. $(1 - 1)!2^{1-1} = 1$ tinka, todėl formulė tinka visiems natūraliems n .

3 lema. *Tegul $U(x) = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{i!} x^i$ – kažkokios baigtinės struktūrų klasės U*

eksponentinė generuojanti funkcija, o m_j yra j -osios eilės struktūrų skaičius toje klasėje. Tada šios struktūrų klasės generuotos ansamblių klasės eksponentinė generuojanti funkcija yra

$$G(x) = e^{U(x)}.$$

Įrodymo bendresnį atvejį galima rasti [4] (46 p. "Meta example 2.1") Šį atvejį išrodysime ir patys. Galime iš $e^{U(x)}$ surinkti visus koeficientus prie x^k ir pažiūrėti, ką ta suma rodo

$$\begin{aligned} e^{U(x)} &= \exp\left\{\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{i!} x^i\right\} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{i!} x^i)^j}{j!} = \\ &= \sum_{j=1, k_1+k_2+\dots+k_r=j}^{\infty} \frac{1}{j!} \binom{j}{k_1, k_2, \dots, k_r} \prod_{i=1}^r \left(\frac{m_i}{i!} x^i\right)^{k_i}; \\ \frac{a_k}{k!} x^k &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=j, l(\bar{k})=k} \frac{1}{j!} \binom{j}{k_1, k_2, \dots, k_r} \prod_{i=1}^r \left(\frac{m_i}{i!} x^i\right)^{k_i} \cdot \left(\frac{k!}{x^k}\right) \\ a_k &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=j, l(\bar{k})=k} \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_r} \prod_{i=1}^r \left(\frac{m_i}{i!}\right)^{k_i}. \end{aligned}$$

O juk paskutinės eilutės dešinėje pusėje yra struktūrų klasės U generuotos ansamblių klasės k -tos eilės elementų perrinkimas, todėl ištis $e^{U(x)}$ yra struktūrų klasės U generuotos ansamblių klasės eksponentinė generuojanti funkcija.

4 lema. Funkcija $g(x) = \exp\left\{\sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} x^i\right\}$ yra leistinoji, kai $k \geq 1$.

Įrodymas. Pasiremsime savybe iš [6] (184 p., (E) savybė), kuri sako: tegul $P(z)$ yra polinomas, kurio nulinis koeficientas yra 0, o kiti koeficientai realieji ir $f(z) = e^{P(z)}$. Jei egzistuoja toks N , kad $[z^n]f(z) > 0$ visiems $n > N$, tai $f(z)$ yra leistinoji funkcija.

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp\left\{\sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} x^i\right\} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} x^i\right)^j}{j!}; \\ \frac{\left(\sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} x^i\right)^j}{j!} &= \frac{(x + x^2 + \dots)(x + x^2 + \dots) \dots (x + x^2 + \dots)}{j!} = \frac{x^j + \dots}{j!} \end{aligned}$$

Iš čia matosi, kad visiems $j \geq 1$ $[x^j]f(x) > 0$. Tiesa, imanoma, kad tuose daugtaškiuosie koeficientas išsiminusuotų, bet $\left(\sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} x^i\right)^j$ visur pliuso ženklai, todėl tikrai neišsiminuos. Taigi, $g(x)$ yra leistinoji funkcija.

3 teorema (Hayman'o). Tegul $f(z) = \sum a_n z^n$ yra leistinoji funkcija, $a(r) = r \frac{f'(z)}{f(z)}$, o $b(r) = r a'(r)$. Tegul r_n yra teigiamas lygties $a(r_n) = n$ sprendinys. Tada

$$a_n \sim \frac{f(r_n)}{r_n^n \sqrt{2\pi b(r_n)}},$$

kai $n \rightarrow \infty$.

Teorema paimta iš [6] (183 p. Theorem 5.4.1)

5 Teoremų įrodymai

1 teorema. Sudarykime kombinatorinių struktūrų klasę U_1 . Joje bus vienas vienetinio svorio elementas ir 2 dvejetainio svorio elementai. Verta atkreipti dėmesį, kad n -tosios eilės elementų yra tiek, kiek iš n juostelių galima padaryti skirtingų n ilgio ciklų (kai $n \leq 2$). Šios struktūrų klasės eksponentinė generuojanti funkcija yra $U_1(x) = \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 = x + x^2$. Dabar imkime šios struktūrų klasės generuotos ansamblių kombinatorinę klasę G_1 , jos eksponentinę generuojančią funkciją pažymime $G_1(x)$. Pagal trečią lemą galioja $G_1(x) = e^{U_1(x)}$. Kadangi struktūrų klasė G_1 yra U_1 ansamblių klasė, galioja

$$[x^n]G_1(x) = \frac{|\Psi(n, 2)|}{n!}$$

Pasiremiamė ketvirtąja lema (atvejis $k=2$) ir įsitikinam, kad $G_1(x)$ priklauso leistinųjų funkcijų klasei. Taigi, galime naudoti 3 teoremą, kurie teigia:

$$[x^n]G_1(x) \sim \frac{G_1(r_n)}{r_n^n \sqrt{2\pi b(r_n)}}, \text{ kai } n \rightarrow \infty$$

čia $a(x) = x \frac{G_1'(x)}{G_1(x)}$, r_n - lygties $a(r_n) = n$ teigiamas sprendinys, $b(x) = x a'(x)$. Visų pirma išspręskime lygtį:

$$a(r_n) = r_n \frac{G_1'(r_n)}{G_1(r_n)} = r_n \frac{(1 + 2r_n)e^{x+x^2}}{e^{x+x^2}} = r_n + 2r_n^2 = n.$$

Teigiamas šios lygties sprendinys yra $r_n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1+8n} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{8n}}{4}\sqrt{1+\frac{1}{8n}}$;
Pošaknį skleisime Teiloro eilute:

$$-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{8n}}{4}\sqrt{1+\frac{1}{8n}} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{8n}}{4}\left(1 + \frac{1}{16n} - \frac{1}{512n^2} + \dots\right)$$

kai $n \rightarrow \infty$. Turime r_n , dabar įvertinsim 3 teoremos tapatybėje esančius narius:

$$G_1(r_n) = \exp\{r_n + r_n^2\} = [\text{pasinaudojame tapatybe } r_n + 2r_n^2 = n] = \exp\left\{\frac{n}{2} + \frac{r_n}{2}\right\},$$

$$e^{\frac{r_n}{2}} = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{8n}}{8}\left(1 + \frac{1}{16n} - \frac{1}{512n^2} + \dots\right) \sim \exp\left\{-\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{n}\right\}$$

$$\text{Taigi } G_1(r_n) = \exp\{r_n + r_n^2\} \sim \exp\left\{\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{n} - \frac{1}{8}\right\},$$

$$\begin{aligned} b(r_n) &= r_n \frac{G_1'(r_n)}{G_1(r_n)} + r_n^2 \frac{G_1''(r_n)}{G_1(r_n)} - r_n^2 \left(\frac{G_1'(r_n)}{G_1(r_n)} \right)^2 = \\ &= r_n(2r_n + 1) + r_n^2 \frac{(\exp\{r_n + r_n^2\}(2r_n + 1))'}{\exp\{r_n + r_n^2\}} - r_n^2(2r_n + 1)^2 = \\ &= r_n(2r_n + 1) + r_n^2 \frac{\exp\{r_n + r_n^2\}(2r_n + 1)^2 + 2\exp\{r_n + r_n^2\}}{\exp\{r_n + r_n^2\}} - r_n^2(2r_n + 1)^2 = \\ &= r_n(2r_n + 1) + r_n^2(2r_n + 1)^2 + 2r_n^2 - r_n^2(2r_n + 1)^2 = 4r_n^2 + r_n \sim 2n. \end{aligned}$$

Taigi $b(r_n) \sim 2n$, kai $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} r_n^n &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2n}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{32\sqrt{n}} + \dots\right)^n = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{n}} + \frac{1}{16n} + \dots\right)^n = \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{n \log\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{n}} + \frac{1}{16n} + \dots\right)\right\} = [\text{skleidžiame log Teiloro eilute}] = \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{n\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{n}} + \frac{1}{16n} + \dots\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{n}} + \frac{1}{16n} + \dots\right)^2 + \dots\right)\right\} \sim \\ &\sim \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{n\left(-\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{n}} + \frac{1}{16n} - \frac{1}{16n}\right)\right\} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2n}}{4}\right\}, \end{aligned}$$

Taigi $r_n^n \sim \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2n}}{4}\right\}$, kai $n \rightarrow \infty$.

Viską įstatome:

$$\frac{|\Psi(n, 2)|}{n!} \sim \frac{G_1(r_n)}{r_n^n \sqrt{2\pi b(r_n)}} = \frac{\exp\left\{\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{n} - \frac{1}{8}\right\} 2^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2n}}{4}\right\} \sqrt{2\pi 2n}} = \frac{\exp\left\{\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n} - \frac{1}{8}\right\} 2^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{n}{2}} \sqrt{2\pi 2n}}$$

Pasinaudojame Stirlingo formulę iš [6] (182 psl.):

$$|\Psi(n, 2)| \sim \frac{\exp\left\{\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n} - \frac{1}{8}\right\} 2^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{n}{2}} \sqrt{2\pi 2n}} \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{\exp\{n\}}.$$

Todėl

$$P(\sigma \in \Psi(n, 2)) = \frac{|\Psi(n, 2)|}{|\Psi(n, n)|} = [\text{pasiremiamame 1 lema}] = \frac{|\Psi(n, 2)|}{(2n-1)!!} = \frac{|\Psi(n, 2)| n! 2^n}{(2n)!}.$$

Faktorialams panaudosime Stirlingo formulę, o $|\Psi(n, 2)|$ įstatysime:

$$\begin{aligned} \frac{|\Psi(n, 2)| n! 2^n}{(2n)!} &\sim \frac{\exp\left\{\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n} - \frac{1}{8}\right\} 2^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{n}{2}} \sqrt{2\pi 2n}} \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{\exp\{n\}} \frac{n^n \sqrt{2\pi n} 2^n \exp\{2n\}}{\exp\{n\} \exp\{n\} (2n)^{2n} \sqrt{4\pi n}} = \\ &= \frac{\exp\left\{\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n} - \frac{1}{8}\right\}}{n^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n+2}{2}}}. \end{aligned}$$

Taigi, įrodėme, kad $P(\sigma \in \Psi(n, 2)) \sim \frac{\exp\left\{\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n} - \frac{1}{8}\right\}}{n^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n+2}{2}}}$, kai $n \rightarrow \infty$.

Teorema įrodyta.

2 teorema. Sudarykime kombinatorinių struktūrų klasę U_2 . Joje bus $2^{i-1}(i-1)!$ i -tojo svorio elementų visiems $i \in [1; k]$. Verta atkreipti dėmesį, kad i -tojo svorio elementų tiek, kiek iš i juostelių galima padaryti skirtingų i ilgio ciklų, kai $i \in [1; k]$. Šios struktūrų klasės eksponentinė generuojanti funkcija yra $U_2(x) = \sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}(i-1)!}{i!} x^i = \sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} x^i$. Dabar imkime šios struktūrų klasės generuotos ansamblių kombinatorinę klasę G_2 , jos eksponentinę generuojančią funkciją pažymime $G_2(x)$. Pagal trečią lema galioja $G_2(x) = e^{U_2(x)}$. Kadangi struktūrų klasė G_2 yra U_2 ansamblių klasė, galioja

$$[x^n]G_2(x) = \frac{|\Psi(n, k)|}{n!}.$$

Pasiremiamie ketvirtąja lema ir įsitikinam, kad $G_2(x)$ priklauso leistinųjų funkcijų klasei. Taigi, galime naudoti 3 teoremą, kuri teigia:

$$[x^n]G_2(x) \sim \frac{G_2(r_n)}{r_n^n \sqrt{2\pi b(r_n)}} \quad , \text{ kai } n \rightarrow \infty,$$

čia $a(x) = x \frac{G_2'(x)}{G_2(x)}$, r_n - lygties $a(r_n) = n$ teigiamas sprendinys, $b(x) = xa'(x)$. Visų pirma išspręskime lygtį:

$$a(r_n) = r_n \frac{G_2'(r_n)}{G_2(r_n)} = r_n \frac{(\sum_{i=1}^k 2^{i-1} r_n^{i-1}) \exp\{\sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} r_n^i\}}{\exp\{\sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} r_n^i\}} = \sum_{i=1}^k 2^{i-1} r_n^i = n.$$

$$\sum_{i=1}^k 2^{i-1} r_n^i = [\text{geometrinės progresijos suma}] = \frac{2^k r_n^{k+1} - r_n}{2r_n - 1} = n$$

Kai $n \rightarrow \infty$, tinka sprendinys $r_n \sim \left(\frac{n}{2^{k-1}}\right)^{\frac{1}{k}}$.

Turime r_n , dabar įvertinsime 3 teoremos tapatybėje esančius narius:

$$G_2(r_n) = \exp\left\{\sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} \left(\frac{n}{2^{k-1}}\right)^{\frac{i}{k}}\right\};$$

$$b(r_n) = r_n \frac{G_2'(r_n)}{G_2(r_n)} + r_n^2 \frac{G_2''(r_n)}{G_2(r_n)} - r_n^2 \left(\frac{G_2'(r_n)}{G_2(r_n)}\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^k 2^{i-1} r_n^i + r_n^2 \frac{\left(\exp\{\sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} r_n^i\} \left(\sum_{i=1}^k 2^{i-1} r_n^{i-1}\right)\right)'}{\exp\{\sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} r_n^i\}} - r_n^2 \left(\sum_{i=1}^k 2^{i-1} r_n^{i-1}\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^k 2^{i-1} r_n^i + r_n^2 \left(\sum_{i=1}^k 2^{i-1} r_n^{i-1}\right)^2 + r_n^2 \sum_{i=2}^k 2^{i-1} (i-1) r_n^{i-2} - r_n^2 \left(\sum_{i=1}^k 2^{i-1} r_n^{i-1}\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^k 2^{i-1} r_n^i + \sum_{i=2}^k 2^{i-1} (i-1) r_n^i \sim 2^{k-1} r_n^k + 2^{k-1} (k-1) r_n^k = 2^{k-1} k r_n^k \sim$$

$$\sim 2^{k-1} k \frac{n}{2^{k-1}} = kn.$$

Taigi $b(r_n) \sim kn$.

$$r_n^n \sim \left(\frac{n}{2^{k-1}}\right)^{\frac{n}{k}}.$$

Viską įstatome:

$$\begin{aligned}
\frac{|\Psi(n, k)|}{n!} &\sim \frac{G_2(r_n)}{r_n^n \sqrt{2\pi b(r_n)}} \sim \frac{\exp \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} \left(\frac{n}{2^{k-1}} \right)^{\frac{i}{k}} \right\}}{\left(\frac{n}{2^{k-1}} \right)^{\frac{n}{k}} \sqrt{2\pi k n}}, \\
|\Psi(n, k)| &\sim \frac{\exp \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} \left(\frac{n}{2^{k-1}} \right)^{\frac{i}{k}} \right\}}{\left(\frac{n}{2^{k-1}} \right)^{\frac{n}{k}} \sqrt{2\pi k n}} \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{\exp\{n\}}, \\
P(\sigma \in \Psi(n, k)) &= \frac{|\Psi(n, k)|}{|\Psi(n, n)|} = \frac{|\Psi(n, k)|}{(2n-1)!!} = \frac{|\Psi(n, k)| n! 2^n}{(2n)!} \sim \\
&\sim \frac{\exp \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} \left(\frac{n}{2^{k-1}} \right)^{\frac{i}{k}} \right\}}{\left(\frac{n}{2^{k-1}} \right)^{\frac{n}{k}} \sqrt{2\pi k n}} \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{\exp\{n\}} \frac{n^n \sqrt{2\pi n} 2^n \exp\{2n\}}{\exp\{n\} n^{2n} \sqrt{4\pi n}} = \\
&= \frac{\exp \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} \left(\frac{n}{2^{k-1}} \right)^{\frac{i}{k}} \right\}}{n^{\frac{n}{k}} 2^{\frac{n}{k}} \sqrt{2k}}.
\end{aligned}$$

Taigi

$$P(\sigma \in \Psi(n, k)) \sim \frac{\exp \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} \left(\frac{n}{2^{k-1}} \right)^{\frac{i}{k}} \right\}}{n^{\frac{n}{k}} 2^{\frac{n}{k}} \sqrt{2k}},$$

kai $n \rightarrow \infty$. Teorema įrodyta.

6 Baigiamosios pastabos

Ciklainis yra gana naujas ir dar mažai ištirtas objektas. Iki šiol gauti rezultatai yra labiau susiję ciklainio ciklų skaičiumi.

Yaglom ir Yaglom [1] (Problem 78, pp. 25, 155-156) apskaičiavo, kokia tikimybė sudaryti vieną n eilės ciklą n eilės ciklainyje:

$$P(k_n(\sigma) = 1) = \frac{2^{2n-1} n! (n-1)!}{(2n)!} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Winkler [2] (pp. 3, 6-7) surado ciklų skaičiaus n eilės ciklainyje matematinę viltį:

$$Ex \left[\sum_{i=1}^n k_i(\sigma) \right] = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2} \log n.$$

Yra pastebėtas ryšys tarp ciklainių ir keitinių. Tegu $\alpha(n, k)$ žymi kiek skirtingų būdų n keitinyje gali būti k ciklų, o $\beta(n, k)$ kiek skirtingų būdų n eilės ciklainyje gali susidaryti k ciklų. N. Pippenger [3] įrodė, kad $\beta(n, k) = 2^{n-k} \alpha(n, k)$.

Šiame darbe bandoma įvertinti ciklainių, neturinčių ilgų ciklų, asimptotinę elgseną. E. Manstavičius ir R. Petuchovas yra gavę analogiškus rezultatus keitiniam [5].

Kadangi ciklainiai priklauso ansamblių klasei, galima naudoti jų savybes, o Arratia, Barbour ir Tavaré [4] jų yra pateikę ne vieną.

Mes bandėme įvertinti tikimybių asimptotikas, kad atsitiktinio ciklainio ilgiausių ciklų eilė neviršys fiksuoto režio. Pirmuoju atveju įvertinta tikimybės asimptotika, kad atsitiktinio ciklainio ilgiausių ciklų eilė neviršys 2:

$$P(\sigma \in \Psi(n, 2)) \sim \frac{\exp\{\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n} - \frac{1}{8}\}}{n^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n+2}{2}}}.$$

Antruoju atveju įvertinta tikimybės asimptotika, kad atsitiktinio ciklainio ilgiausių ciklų eilė neviršys fiksuoto k :

$$P(\sigma \in \Psi(n, k)) \sim \frac{\exp\left\{\sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} \left(\frac{n}{2^{k-1}}\right)^{\frac{i}{k}}\right\}}{n^{\frac{n}{k}} 2^{\frac{n}{k}} \sqrt{2k}}.$$

Antrasis atvejis yra mažiau tikslus už pirmąjį, kadangi taikant Hayman'o teoremą ([6] 183 p. Theorem 5.4.1) bendresniu atveju rastas tik asimptotinis, o ne tikslus, lygties $a(r_n) = n$ sprendinys.

7 Summary

Cyclation is a pretty new and not much investigated object. So far obtained results are more related to amount of cycles within the cyclation.

Yaglom ir Yaglom [1] (Problem 78, pp. 25, 155-156) estimated the probability that there is only one cycle in an n -cyclation:

$$P(k_n(\sigma) = 1) = \frac{2^{2n-1} n! (n-1)!}{(2n)!} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Winkler [2] (pp. 3, 6-7) found number of cycles in a n-cyclation expected value:

$$Ex\left[\sum_{i=1}^n k_i(\sigma)\right] = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2}\log n$$

There is a connection between cyclations and permutations. Let $\alpha(n,k)$ be amount of options to make k cycles in a n-permutation and $\beta(n,k)$ be amount of options to make k cycles in a n-cyclation. N. Pippenger [3] proved that $\beta(n,k) = 2^{n-k}\alpha(n,k)$.

In this work we are estimating the number of cyclations, missing long cycles, asymptotic behaviour. E. Manstavičius and R. Petuchovas estimated the same results for permutations.

Since cyclations belongs to class of assemblies, we can use their features and Arratia, Barbour ir Tavaré provided many of them in [4].

We estimated the probability asymptotics that random cyclation's longest cycle won't be longer than a fixed number. In the first case we estimated the probability with a fixed number=2:

$$P(\sigma \in \Psi(n, 2)) \sim \frac{\exp\{\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{n} - \frac{1}{8}\}}{n^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n+2}{2}}}.$$

In the second case the fixed number was k and we obtained:

$$P(\sigma \in \Psi(n, k)) \sim \frac{\exp\left\{\sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{i} \left(\frac{n}{2^{k-1}}\right)^{\frac{i}{k}}\right\}}{n^{\frac{n}{k}} 2^{\frac{n}{k}} \sqrt{2k}}.$$

The second case is less accurate because while applying Hayman's theorem ([3] 183 p. Theorem 5.4.1) we only got an asymptotic, but not the precise solution of equation $a(r_n) = n$.

8 Literatūra

- [1] A.M. Yaglom ir I.M. Yaglom. Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions- Volume I: Combinatorial Analysis and Probability Theory. Dover publications, 1987
- [2] P. Winkler. Mathematical Mind-Benders. A.K. Peters Limited. 2007.
- [3] Nicholas Pippenger, Random Cyclations, The electronical journal of combinatorics 20(4) (2013), #P9.

- [4] R. Arratia, A.D. Barbour, S. Tavaré. Logarithmic Combinatorial Structures: a Probabilistic Approach, European Mathematical Society. 1993.
- [5] Eugenijus Manstavičius ir Robertas Petuchovas, Local probabilities for random permutations without long cycles, The electronic journal of combinatorics 23(1) (2016), #P1.58.
- [6] Herbert Wilf, Generatingfunctionology, second edition, 1994.