

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IF INFORMATIKOS FAKULTETAS

BAKALAURO BAIGIAMASIS DARBAS

ŠAKNIES IŠ DVIEJŲ IRACIONALUMO ĮRODYMAI

PROOFS THAT SQUARE ROOT OF TWO IS IRRATIONAL

Tomas Kondratavičius

Vilnius 2019

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Darbo vadovas, vardas, pavardė_____

Darbo recenzentas_____

Darbas apgintas įrašoma data_____

Darbo įvertinimas_____

Registravimo Nr._____

Atidavimo į katedrą data_____

Turiny

Santrauka	4
Įvadas	5
Skaičiaus iracionalumas.....	6
Geometrinis įrodymas	7
Algebrinis įrodymas	8
Analizinis įrodymas	9
Įrodymai remiantis skaičių teorija.....	10
Konstruktyvus įrodymas.....	11
Išvados	12
Literatūra	13

ŠAKNIES IŠ DVIEJŲ IRACIONALUMO ĮRODYMAI

Santrauka

Šiame darbe aptariama šaknies iš dviejų iracionalumo įrodymai, pateikiami tiek konstruktyvūs, tiek prieštaros metodu įrodymai. Įrodymais supažindinama su skirtingi matematikos teorijos aparatai skirtingose matematinėse sferose. Taip pat supažindinama su iracionaliais ir racionaliais skaičiais, naudojama matematinė kalba apibrėžiant šias dvi sąvokas. Kai kuriuos rezultatus galime taikyti ir platesnėje aibių uždavinių, pavyzdžiui bendrai sveikąjį skaičiaus iracionalumo įrodymams, ar net kitiems uždaviniams.

Raktiniai žodžiai: racionalumas, iracionalumas, šaknis

PROOFS THAT SQUARE ROOT OF TWO IS IRRATIONAL

Abstract

In this work, I discuss about proofs that square root of two is irrational. Some proofs are constructive and others by contradictions. The main portion of this work shows different mathematical apparatus's and how they apply solving irrationality problem. Secondly, I introduce with irrational and rational numbers and how they are defined in mathematics as well as the history of irrational numbers. These results that you find in this text are applied for solving different problems or solving any integer number irrationality.

Key words: rationality, irrationality, square root

Ivadas

Pirmiausia yra supažindinama su iracionaliais ir racionaliais skaičiais Hipaso ir Dedekindo indeliu randant ir apibrėžiant iracionaliuosius skaičius. Taip pat šiame darbe susipažindinama su skirtingais matematikos aparatais, kaip jie funkcionuoja sprendžiant matematinę problemą: šaknies iš dviejų iracionalumo įrodymas. Parodoma, kad ne tik prieštaros metodu galima spręsti šią problemą, bet ir matematinės analizės priemonėmis galima konstruktyviai rasti sprendimą. Taipogi, sukonstruotos išvados parodo, kad tuo pačiu principu galima spręsti ir platesnius uždavinius.

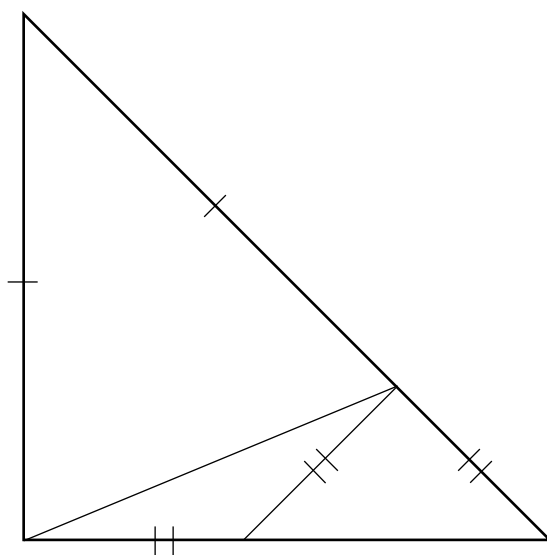
Skaičiaus iracionalumas

Spėjama, kad pirmasis atradęs iracionaliuosius skaičius yra pitagorininkas Hipasus. Jis penktajame amžiuje pateikė skaičiaus šaknis iš dviejų iracionalumo įrodymą. Idomus faktas, kad Pitagoras vengė iracionaliųjų skaičių, nes jų egzistavimas neatitiko jo filosofinių pažiūrų. Kitas žymus matematikas siejamas su iracionalių skaičių atradimu – Euklidas. Savo knygoje „Pradmenys“ pateikė geometrinius šaknies iš dviejų iracionalumo įrodymų. Toliau Ričardas Dedekindas XX a. išplėtė iracionalumo sąvoką apibrėždamas visus realiuosius skaičius kaip Dedekindio pjūvius.

Tai kas yra iracionalusis skaičius? Pirmiausia reikėtų kalbėti apie racionaliuosius. Racionalieji yra skaičiai, kuriuos galima išreikšti trupmena $\frac{p}{q}$, kur skaitiklis p yra sveikasis skaičius, o vardiklis q nelygus nuliui sveikasis skaičius. Akivaizdu, kad bet kuriam racionaliam skaičiui galima surasti skaičius p ir q tokius, kad p ir q neturėtų bendro daliklio. Kita vertus iracionalieji skaičiai yra skaičiai, kurie nėra racionalieji, t.y. neegzistuoja, tokie sveikieji p ir q , kur q nelygus nuliui skaičiai, kad iracionalus skaičius lygtų $\frac{p}{q}$.

Geometrinis įrodymas

Pasinaudosime Pitagoro teorema, ši teigia, kad stačiojo trikampio statinių ilgių kvadratų suma yra lygi įžambinės ilgio kvadratui. Imkime statųjį trikampį, kurio abiejų statinių ilgiai būtų lygūs 1, tuomet įžambinės ilgis: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Jeigu $\sqrt{2}$ yra racionalusis, tuomet $\exists a, b$ sveikieji, kur b nelygus nuliui, tokie, kad $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Parinkime mažiausius a ir b . Tuomet trikampį, kurio abiejų statinių ilgiai yra 1, galima suvesti į trikampį, kurio visų briaunų ilgiai yra sveikieji skaičiai. Pavyzdžiui jeigu padidinsim kiekvieną briauną b kartų, nes $1^2 + 1^2 = \sqrt{2}^2 = \frac{a^2}{b^2}$, todėl $b^2 + b^2 = a^2$.



Iš šio brėžinio matyti, kad galima sukonstruoti mažesnę statųjį trikampį, kurio statiniai yra $a - b$ ir įžambinė $2b - a$. Vėl gi pagal Pitagoro teoremą: $(a - b)^2 + (a - b)^2 = (2b - a)^2$, todėl $1^2 + 1^2 = \frac{(2b - a)^2}{(a - b)^2} = \sqrt{2}^2$. Kadangi $a - b < a$, tai gauname prieštarą sąlygai, kad a parinktas minimalus. Šio įrodymo idėją galima rasti A. P. Kiselev geometrijos vadovėlyje.

Algebrinis įrodymas

Šiam įrodymui prireiks pagrindinės aritmetikos teoremos, kuri sako, kad kiekvienas sveikąjį skaičių galima vieninteliu būdu išreikšti pirminių skaičių sandauga.

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$$

Tarkime $\sqrt{2}$ yra racionalus, tada pagal apibrėžimą $\exists a, b$ sveikieji skaičiai, kur q nelygus nuliui, tokie, kad $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, tada $2b^2 = a^2$. Užrašykime skaičių a ir b skaidinius pirminiais skaičiais. Pagal pagrindinę aritmetikos nelygybę $\exists p_i, q_i$ – pirminiai ir $\exists a_i, b_i$ – natūralūs, tokie, kad $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$ ir $b = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \cdots q_k^{b_k}$, iš skaidinių matyti, kad a^2 ir b^2 turės lyginį skaičių pirminių daliklių, tačiau tada $2b^2$ turės nelyginį skaičių pirminių daliklių, bet tai juk būti negalim, nes $2b^2 = a^2$. Todėl prieštarą įrodo, kad $\sqrt{2}$ yra iracionalus.

Kitas algebrinis įrodymas remiasi žiedo algebra. Tarkime $W = a + b\sqrt{2}$, a, b sveikieji. Akivaizdu, kad W yra uždara aibė sandaugos ir sudėties operacijų atžvilgiu. Pažymėkime $\alpha = (\sqrt{2} - 1), \alpha \in W$. Akivaizdu, kad $0 < \alpha < 1$ ir

$$\alpha^k \rightarrow 0$$

,kai $k \rightarrow \infty$. Tarkime $\sqrt{2}$ racionalus, tuomet $\exists p, q : \sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Iš to kaip apibrėžėme W išplaukia:

$$\alpha^k = e + f\sqrt{2} = \frac{eq + fp}{q} \geq \frac{1}{q}$$

Prieštara.

Analizinis įrodymas

Tarkime funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tokia, kad $f_n(x) = x(\sqrt{2} - 1)^n$. Kiekvienam taškui $x \in \mathbb{R}$, akivaizdu, kad $f_n(x) \rightarrow 0$, kai $n \rightarrow \infty$, nes $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$. Tarkime $\sqrt{2}$ yra racionalusis, tuomet $\exists a, b$ sveikieji, b nelygus nuliui, tokie, kad $\sqrt{2}b = a$. Tuomet kiekvienam n yra teisinga:

$$(\sqrt{2})^n b = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} b, & \text{kai } n - \text{lyginis} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} p, & \text{kai } n - \text{nelyginis} \end{cases}$$

Abiem atvejais $(\sqrt{2})^n b$ yra sveikas skaičius, tuomet pagal Niutono binomo formulę:

$$(\sqrt{2} - 1)^n b = \sum_k \binom{n}{k} \sqrt{2}^k (-1)^{n-k} b \in \mathbb{Z}$$

,nes sumos nariai visi yra sveikieji skaičiai, bet tuomet, kadangi $0 < (\sqrt{2} - 1)^n b$, todėl gauname prieštarą, kad $f_n(x) \rightarrow 0$.

Įrodymai remiantis skaičių teorija

Vienas tikriausiai paprastesnių įrodymų šaknies iš dviejų iracionalumo įrodymų. Tarkime $\sqrt{2}$ yra racionalus, pagal apibrėžimą, $\exists p, q$ sveikieji skaičiai, kur q nelygus nuliui, tokie, kad $\sqrt{2}q = p$. Parinkime p ir q , kad neturėtų bendrų daliklių, tuomet pakėlę abi lygybės puses kvadratu turėsime: $2q^2 = p^2$. Kadangi 2 dalina $2q^2$, tai 2 dalins ir p^2 , todėl ir p dalinsis iš 2. Pagal apibrėžimą, jei $2|p$, tai $\exists k$ natūralus, toks, kad $p = 2k$. Įstatę į $2q^2 = p^2$ gausime $q^2 = 4k^2$, bet tada ir $2|q$, o tai negali būti, nes tuomet 2 yra bendras p ir q daliklis, prieštara.

Sekantis įrodymas kiek paprastesnis. Tarkime $x = \sqrt{2}$ yra racionalus, bet ne sveikasis skaičius. Tuomet egzistuoja minimalus sveikasis skaičius n toks, kad xn yra sveikasis. Pažymėkime $m = n(x - [x])$. Kadangi $0 < x - [x] < 1$, tai $0 \leq m < n$. Kadangi $m = nx - n[x]$ yra sveikasis ir $mx = nk - nx[x]$ taip pat yra sveikasis, todėl toks n nėra mažiausias, prieštara.

Konstruktivus įrodymas

Kol kas nagrinėjome įrodymus prieštaros metodu, dabar išnagrinėkime konstruktyvų įrodymo pavyzdį. Tam mums prireiks lemos.

Tarkime $\delta \in \mathbb{R}^+$. Tarkime egzistuoja seka sudaryta iš teigiamų racionaliųjų skaičių $\frac{r_n}{s_n}$ tokie, kad r_n ir s_n neturėtų bendrų daliklių ir

$$s_n \left| \delta - \frac{r_n}{s_n} \right| \rightarrow 0$$

, kai $n \rightarrow \infty$. Tuomet δ yra iracionalus.

Lemos įrodymas: tarkime $\delta = \frac{p}{q}$, kur p ir q neturi bendrų daliklių. Tuomet egzistuoja daugiausia vienas indeksas $n = n_0$ toks, kad $\delta = \frac{r_n}{s_n}$. Tada, kai $n > n_0$:

$$s_n \left| \delta - \frac{r_n}{s_n} \right| = \frac{|ps_n - qr_n|}{q} \geq \frac{1}{q}$$

, kai $n \rightarrow \infty$ gausime prieštarą q pasirinkimui,

Dabar įrodysime, kad $\sqrt{2}$ iracionalus. Tarkime $\delta = \sqrt{2}$. Sukonstruosime dvi teigiamų sveikųjų skaičių sekas:

$$r_{n+1} = r_n + 2s_n$$

$$s_{n+1} = r_n + s_n$$

, kur $r_0 = s_0 = 1$. Iš indukcijos matyti, kad $r_n > s_n$ ir $2s_n^2 = r_n^2 + (-1)^n$. Tuomet

$$\frac{1}{s_n^2} = \left| 2 - \frac{r_n^2}{s_n^2} \right| = \left| \sqrt{2} - \frac{r_n}{s_n} \right| \left| \sqrt{2} + \frac{r_n}{s_n} \right|$$

Todėl

$$s_n \left| \sqrt{2} - \frac{r_n}{s_n} \right| \leq s_n \left| 2 - \frac{r_n^2}{s_n^2} \right| \leq \frac{1}{s_n} \rightarrow 0$$

, kai $n \rightarrow \infty$. Pagal lemą $\sqrt{2}$ iracionalus.

Išvados

Šaknies iš dviejų iracionalumo įrodymų aibė yra plati, joje galime rasti daugelį taikomų matematikos aparatų ir ši įrodymų aibė sudaryta ne tik iš prieštaros metodo įrodymų, bet ir tiesioginių, konstruktyvių įrodymų. Be to, įrodymai, kurie tinka šaknies iš dviejų iracionalumui galima suvesti į bet kurio sveikąjo skaičiaus šaknies iracionalumo įrodymą. Ar net suvesti į visai kito uždavinio įrodymą.

Literatūros sąrašas

P. J. Davis and R. Hersh, *The Mathematical Experience*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1981, p. 299

N. C. Ferreño, Yet Another Proof of the Irrationality of $\sqrt{2}$, *Am Math Monthly*, 2009, p. 68-69

M. Lasckovitch, *Conjecture and Proof*, MAA, 2001. p. 4-5

V. H. Moll, *Numbers and Functions: From a Classical-Experimental Mathematician's Point of View*, AMS, 2012, p. 45