

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS BAKALAURO STUDIJŲ
PROGRAMA

Greta Patapaitė

**Akcijų portfelio optimizavimas remiantis moderniaja portfelio
teorija**

Stock Portfolio Optimization based on Modern Portfolio Theory

Bakalauro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti

Darbo vadovas **doc. Dr. Andrius Grigutis**

(data)

Vilnius 2020

SANTRAUKA

Šiame darbe pristatoma H. Markowitz modernioji portfelio teorija ir jos pagrindiniai aspektai. Darbas sudarytas iš teorinės ir praktinės dalies. Teorinėje dalyje paaiškinamos pagrindinės portfelio optimizavimo sąvokos ir rodiklių apskaičiavimo būdai. Praktinėje dalyje sudaromi 3 optimalūs portfeliai - minimalios rizikos, maksimalios grąžos duotai rizikai ir maksimalaus Sharpe koeficiento. Šio darbo tikslas – parodyti, kad H. Markowitz teorija paremtas portfelio optimizavimas gali būti pritaikytas Lietuvos įmonių akcijoms kotiruojamoms Vilnius Nasdaq vertybinių popierių biržoje.

Raktiniai žodžiai: investicinis portfelis, optimizavimas, H. Markowitz teorija, efektyvumo frontas, Sharpe rodiklis, kovariacijų matrica, dispersija, tikėtina grąža, diversifikavimas.

SUMMARY

This thesis represents H. Markowitz Theory and its main concepts. Thesis consists of two parts: theoretical and practical application. In the first part main aspects of portfolio optimization and methods of calculating indicators are explained. Three optimal portfolios are formed in the second part - minimum risk portfolio, maximum return for a given level of risk portfolio and maximum Sharpe ratio portfolio. The aim of this article is to show how H. Markowitz theory based portfolio optimization can be applied to 10 largest stocks traded on Vilnius Nasdaq stock Exchange.

Keywords : investment portfolio, optimization, H. Markowitz theory, efficient frontier, Sharpe ratio, covariance matrix, variance, expected return, diversification.

TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS.....	4
LENTELIŲ SĄRAŠAS	4
ĮVADAS.....	5
1. TEORINĖ DALIS.....	6
1.1. Investicinio portfelio optimizavimo uždavinys.....	6
1.1.1. Akcijos	6
1.1.2. Grąža.....	7
1.2. H. Markowitz modernioji portfelio teorija.....	9
1.2.1. Laukiama investicinio portfelio grąža	10
1.2.2. Rizikos ir grąžos dispersijos analizė.....	11
1.2.3. Efektyvumo frontas.....	13
1.2.4. Sharpe rodiklis	17
1.2.5. Minimalios rizikos portfelis.....	18
1.2.6. Maksimalaus Sharpe koeficiento portfelis.....	19
2. PRAKTINĖ DALIS	21
2.1. Individuali rizika ir grąža	22
2.2. Minimalios rizikos portfelis	24
2.3. Maksimalios grąžos, duotai rizikai, portfelis	25
2.4. Maksimalaus Sharpe koeficiento portfelis	26
IŠVADOS	28
LITERATŪROS SĄRAŠAS	29
PRIEDAI.....	30

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

pav. 1. Kompanijos Apple dienos uždarymo kainų (USD) grafikas.	7
pav. 2. Normalioji kreivė ir Apple grąžų tankio grafikas, imant paprastas ir logaritmines grąžas.	8
pav. 3. Rizikos – grąžos koordinačių plokštuma.	14
pav. 4. Portfelijų, sudarytų iš rizikingų aktyvų, efektyvumo frontas.	15
pav. 5. Efektyvumo frontas įtraukiant nerizikingą aktyvą – F.	15
pav. 6 Efektyvumo fronto kitimas priklausomai nuo koreliacijos koeficiento.	17
pav. 7 Koreliacija tarp akcijų grąžų.	23
pav. 8. Minimalios rizikos portfelio efektyvumo frontas.	24
pav. 9 Maksimalios grąžos duotai rizikai efektyvumo frontas.	26

LENTELIŲ SĄRAŠAS

lentelė 1. Lietuvos įmonės ir jų kapitalizacija rinkoje. Nasdaq Baltic duomenys.	21
lentelė 2. Vidutinė savaitinė akcijų grąža.	22
lentelė 3. Akcijų rizika išreikšta standartiniu nuokrypiu.	23
lentelė 4. Akcijų svoriai minimalios rizikos portfelyje.	24
lentelė 5. Minimalios rizikos portfelio pagrindiniai rodikliai.	25
lentelė 6. Akcijų svoriai maksimalios grąžos duotai rizikai portfelyje.	25
lentelė 7. Maksimalios grąžos duotai rizikai portfelio pagrindiniai rodikliai.	26
lentelė 8. Akcijų svoriai maksimalaus Sharpe koeficiento portfelyje.	27
lentelė 9. Maksimalaus Sharpe koeficiento portfelio pagrindiniai rodikliai.	27

IVADAS

Darbo aktualumas ir problema. Tinkamas vertybinių popierių portfelio pasirinkimas – vienas esminių žingsnių norint suvaldyti rizikas, susijusias su galimu investicijų nuvertėjimu ar netgi jų praradimu. Žiniasklaidoje plačiai kalbama apie investicijų diversifikavimą¹, norint sumažinti šias rizikas, tačiau kartais, vien to, neužtenka. Patyrę investuotojai, fondų valdytojai, įmonės į pagalbą pasitelkia plačiai naudojamus investicinio portfelio optimizavimo metodus, leidžiančius ne tik ženkliai sumažinti rizikas, bet ir uždirbti norimą metinę grąžą. Dauguma optimizavimo metodų remiasi didžiulį perversmą pasaulyje padariusia H. Markowitz moderniąja portfelio teorija [1], už kurią autorius 1990m. gavo Nobelio premiją. [2] Teorija teigia, kad investicijų diversifikavimas gali sumažinti riziką ir, pasitelkiant matematinius metodus, maksimizuoti investicinę grąžą. Nors prabėgo daug metų, nuo 1952m., kuomet H. Markowitz darbas buvo publikuotas, tačiau pagrindinės jo idėjos išliko pamatu ir šių dienų investicinių portfelių optimizavimo metodams. Jo idėjos buvo išplėtos ekonomistų W. Sharpe ir M. Miller.

Tyrimo objektas: investicinis finansinių priemonių portfelis, sudarytas iš Lietuvos akcijų, įtrauktų į Vilnius Nasdaq biržos prekybos sąrašą.

Darbo tikslas: parodyti, kad H. Markowitz teorija gali būti pritaikyta Lietuvos akcijoms formuojant optimalius portfelius.

Uždaviniai: suformuoti ir palyginti minimalios rizikos, maksimalios grąžos duotai rizikai ir maksimalaus Sharpe koeficiento portfelius.

Tyrimo metodika: šiame tyrime naudojami literatūros analizės bei statistinės duomenų analizės metodai. Skaičiavimai atliekami naudojantis statistiniu paketu R ir Excel.

¹ Diversifikavimas - Tai investicijų portfelio valdymo strategija mažinti riziką vienu metu investuojant į skirtingą turtą, t. y. akcijas, obligacijas, nekilnojamąjį turtą, kurio vertės kitimas ta pačia kryptimi mažai tikėtinas. [12]

1. TEORINĖ DALIS

1.1. Investicinio portfelio optimizavimo uždavinys

Yra begalė būdų, kaip iš jau turimų pinigų uždirbti jų dar daugiau. Vienas iš tokių būdų - investavimas finansų rinkose t. y. investicinio portfelio kūrimas. Į Google paiešką įvedę „Investicinis portfelis“ randame daugybę jo apibrėžimų. Viena iš jų aiškina, kad vertybinių popierių investicinis portfelis – tai investuotojo turimų tam tikrų vertybinių popierių rinkinys, jam priklausantis nuosavybės teise. Investicinis portfelis gali būti sudarytas iš įvairių finansinių instrumentų, tokių kaip akcijos, obligacijos, nekilnojamasis turtas, gryniesi pinigai, žaliavos, įvairios išvestinės finansinės priemonės (pvz.: ateities sandoriai, opcionai ir t.t...). Investuotojas, pirkdamas vertybinius popierius, tikisi jų vertės padidėjimo per tam tikrą laiką. Kadangi rinkos nėra pastovios ir bet kokias investicijas nuolat lydi vertės svyravimai, pasirinkti priemones, į kurias bus investuojama, nėra lengva. Dėmesio centre atsiduria du pagrindiniai aspektai į kuriuos būtina atsižvelgti: rizika ir grąža. Bet kuris investuotojas siekia uždirbti kuo didesnę investicinę grąžą su kiek įmanoma mažesne rizika. Investicinė grąža gali būti apibrėžiama kaip finansinis rodiklis, parodantis per kiek laiko investicija atsipirks. Ji taip pat gali būti užrašyta procentine išraiška ir rodyti portfelio pelningumą per tam tikrą laiką. Dažniausiai pasitaikantis laiko intervalas – vieneri metai. Taigi, pagrindinė problema, kurią bandoma spręsti optimizavimo uždaviniu yra efektyvus portfelio parinkimas. Efektyvus šiame kontekste reikš rizikos – grąžos santykį. Efektyvus investicinis portfelis yra tas, kuriame, prisiimant mažiausiai rizikos, gaunama didžiausia galima grąža. Ši bendra teorija buvo aprašyta H. Markowitz darbe – „Portfelio pasirinkimas“. [1]

1.1.1. Akcijos

Akcijos – tai nuosavybės vertybiniai popieriai, kuriuos pirkdamas investuotojas įsigyja nedidelę dalį kompanijos. Pinigai uždirbami perkant ir parduodant akcijas biržose nuo jų kainos prieaugio per tam tikrą laiką. Akcijų biržos kontroliuoja bei palengvina akcijų pirkimą ir pardavimą. Visada, perkant, tikimasi, kad akcijų kaina kils ir ateityje bus galima jas parduoti brangiau. Prekiaujant akcijų biržose, galimas ir atvirkščias scenarijus, t. y. uždirbti pinigus parduodant akcijas. Tokiu atveju, investuotojas uždirba, jei akcijų vertė krenta. Visgi, nuspėti kainų pokyčius, neretai nepavyksta net patyrusiems investuotojams. Jie priklauso nuo daugybės veiksnių, tokių kaip: įmonės finansinė padėtis, šalies ekonomika, tam tikro ekonominio sektoriaus rezultatai.

1.1.2. Graža

Sakykime, nusprendėme investuoti į n pasirinktų akcijų. Akcijos i kainą, laiko momentu t , žymėsime - $p_i(t)$. Skaičiavimuose visuomet imama dienos, savaitės ar mėnesio akcijos uždarymo kaina t. y. pvz.: Apple akcijos kaina kiekvienos prekybos dienos pabaigoje:



pav. 1. Kompanijos Apple dienos uždarymo kainų (USD) grafikas.

Turėdami šios akcijos istorines kainas, pasirinktam periodui, galime apskaičiuoti akcijos grąžą intervale nuo $t - 1$ iki t :

$$r_i(t) = \frac{p_i(t) - p_i(t-1)}{p_i(t-1)}, \quad (1)$$

čia $r_i(t)$ – i -osios akcijos grąža laiko momentu t ; $p_i(t)$ – i -osios akcijos kaina laiko momentu t .

Kartais naudinga skaičiuoti ir logaritmines grąžas. Mažiems $p_i(t)$ svyravimams, turime, kad $p_i(t) \cong p_i(t-1)$ ir laikotarpio nuo $t-1$ iki t grąža yra labai maža:

$$r_i(t) = \frac{p_i(t) - p_i(t-1)}{p_i(t-1)} = \frac{p_i(t)}{p_i(t-1)} - 1 \cong 0,$$

Nedidelėms x reikšmėms taip pat galime užrašyti tokią aproksimaciją:

$$\log(1+x) \approx x.$$

Todėl, galioja

$$\log \frac{p_i(t)}{p_i(t-1)} = \left(1 + \frac{p_i(t)}{p_i(t-1)} - 1\right) \cong \frac{p_i(t)}{p_i(t-1)} - 1 = r_i(t).$$

Rinkos dalyviai turi mokėti tiksliai įvertinti ir modeliuoti finansinio turto riziką ir grąžą. Atskaitos taškas, modeliuojant turto grąžos savybes, yra tinkamai pasirinktas tikimybinis skirstinys – statistinė funkcija, apibūdinanti visas įmanomas reikšmes ir jų tikimybes, kurias

atsitiktinis dydis įgyja tam tikrame diapazone. Viena iš populiariausių prielaidų yra ta, kad investicinio turto grąžos turi normalųjį (Gauso) skirstinį. Ši prielaida supaprastina skaičiavimus. Kadangi, kiekvienos akcijos grąža turi normalųjį skirstinį, tai ir portfelio, sudaryto iš daug akcijų, grąža, turės normalųjį pasiskirstymą. Toks atsitiktinis dydis yra pilnai apibrėžiamas 2 reikšmėmis: vidurkiu (tikėtina grąža) ir dispersija (rizika).

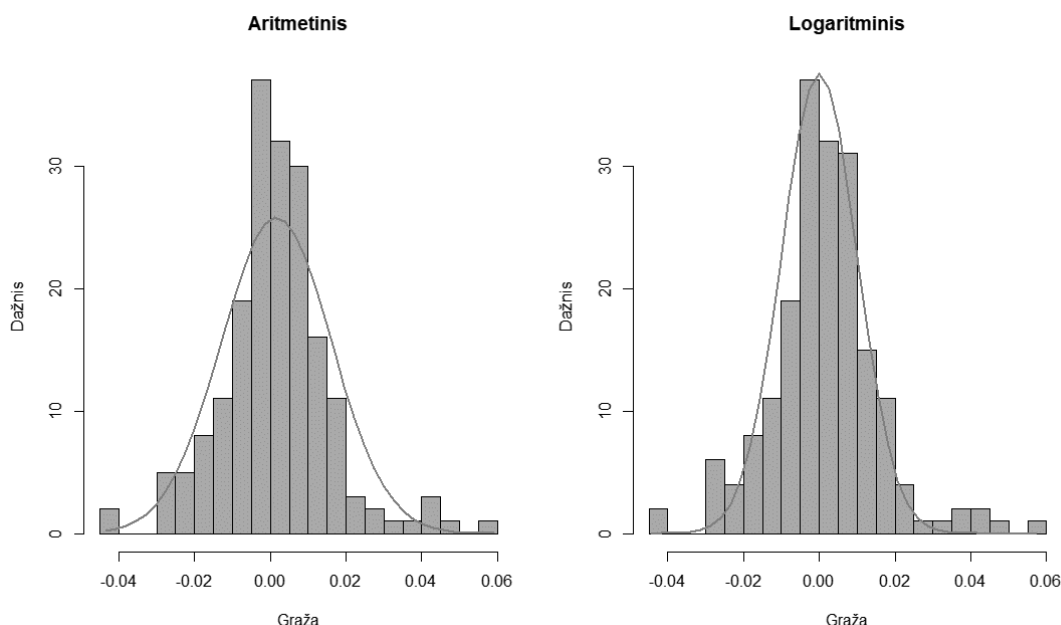
Apibrėžimas 1. Sakysime, kad atsitiktinio dydžio X tikimybiniis pasiskirstymas yra **normalusis**, jei jis įgyja reikšmes iš intervalo $[-\infty; +\infty]$, o jo tankio funkcija apibrėžiama:

$$\varphi(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0, -\infty < \mu < +\infty,$$

čia μ – vidurkis, σ^2 – dispersija. [3]

Jei atsitiktinis dydis turi normalųjį skirstinį, tai - 68% jo reikšmių patenka į vieno standartinio nuokrypio (σ) nuo vidurkio (μ) intervalą, 95% į du, o net 99,7% reikšmių į trijų standartinių nuokrypių nuo vidurkio intervalą.

Pažiūrėję į Apple akcijų grąžą, iš histogramos (Pav. 2) matyti, kad normalumo sąlyga tenkinama. Be to, logaritminės grąžos geriau atspindi normalumo kreivę, nei paprastos. Todėl, šiame pavyzdyje, skaičiavimuose patariama naudoti logaritmines grąžas.



pav. 2. Normalioji kreivė ir Apple grąžų tankio grafikas, imant paprastas ir logaritmines grąžas.

Kaip jau buvo minėta, portfelis yra tam tikras investicinių priemonių – aktyvų rinkinys. Kurdami investicinį portfelį, į jį įtrauksime bent kelių įmonių akcijas, todėl turime nuspręsti, kokią portfelio dalį užims kiekviena iš jų. Tai ir yra pagrindinė optimizavimo uždavinio problema. Apsibrėžkime matematinę portfelio sąvoką.

Apibrėžimas 2. Investiciniu portfeliu A , vadinsime aktyvų $A_1 A_2 \dots A_n$ ir jų svorių $(w_1 w_2 \dots w_n)$ kombinaciją: $A = A_1 w_1 + A_2 w_2 + \dots + A_n w_n$. Čia $w_1 w_2 \dots w_n$ - kiekvieno aktyvo svoris t. y. jo dalis portfelyje. Be to, tarsime, kad svorių vektorius tenkina:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad 0 \leq w_i \leq 1.$$

Realiuose portfeliuose svoriai gali būti ir neigiami. Tai suprantama, kaip tam tikrų pasiskolintų vertybinių popierių pardavimas. Toks atvejis šiame darbe nenagrinėjamas.

Iš ankstesnio apibrėžimo aišku, kad, portfelio grąža laiko momentu t yra:

$$R_P(t) = \sum_{i=1}^n w_i r_i(t).$$

Apibendrinant, portfelio optimizavimo uždavinio sprendinys yra svorių vektorius, nusakantis, kokią dalį portfelyje turi užimti konkretus investicinis objektas, kad grąža būtų didžiausia, pasirinktam rizikos lygiui. Likusioje šio darbo dalyje tarsime, kad investicinis portfelis yra sudarytas iš n elementų (akcijų), kurių grąžos yra $r_1, r_2, \dots, r_n$ ir $\forall i, r_i$ yra atsitiktinis dydis.

1.2. H. Markowitz modernioji portfelio teorija

Praėjusio amžiaus šeštajame dešimtmetyje H. Markowitz savo darbe „Portfelio pasirinkimas“ aprašė Moderniąją portfelio teoriją, kuri kaip mat sulaukė viso pasaulio investuotojų dėmesio. [1] Jo aprašytu investicinio portfelio kūrimo modeliu remiamasi iki šiol. 1990m. H. Markowitz kartu su ekonomistais M. Miller ir W. Sharpe buvo apdovanotas Nobelio ekonomikos mokslų atminimo premija. [2] H. Markowitz matematinius – statistinius analizės metodus pritaikė formuojant investicinį portfelį ir parodė, kaip, diversifikuojant investicijas, gali būti sukuriamas portfelis su optimalia rizika norimai grąžai gauti. Diversifikacija yra apibrėžiama kaip procesas, kurio metu, investuojama į skirtingus investicinius objektus, tam, kad būtų sumažinta rizika [4].

Prieš pasirodant jo publikacijai, investiciniai instrumentai į portfelį buvo įtraukiami įvertinant kiekvieno iš jų grąžą ir riziką individualiai. Buvo ieškoma investicijų su aukščiausia grąža ir mažiausia rizika. H. Markowitz į investicinį portfelį pažvelgė iš kitokios perspektyvos, parodydamas, kaip iš tiesų, turėtų būti sudaromas diversifikuotas portfelis. Viena iš Moderniosios portfelio teorijos idėjų yra ta, kad rizika ir grąža yra tiesiogiai susijusios. Norėdamas uždirbti didesnę grąžą investuotojas turi prisiimti ir didesnę riziką. Pasak autoriaus, būtent rizikos ir grąžos santykiu turėtų remtis investuotojas, formuodamas finansinių priemonių portfelį. Racionaliai renkantis iš dviejų investicinių portfelių, kurie, tikėtina, ateityje atneš vienodą grąžą, geriausias sprendimas būtų rinktis mažesnės rizikos portfelį.

H. Markowitz teorija yra paremta šiomis prielaidomis apie finansų rinkas ir investuotojus:

- Investuotojai siekia maksimizuoti laukiamą/tikėtiną portfelio grąžą/pelningumą. Matematiškai, laukiamas portfelio pelningumas – tai vidurkis, paskaičiuotas, remiantis istoriniais investicinių instrumentų duomenimis.
- Investuotojai į vertybinio popieriaus grąžos svyravimus žvelgia, kaip į neigiamą faktorių, galintį turėti įtakos jų portfelio pelningumui.
- Investuotojai remiasi diversifikavimo metodu ir įtraukia į portfelį bent kelis skirtingus investicinius objektus. Jei investuojama į akcijas – bent 2 akcijas.
- Investuotojai, vertindami galimą riziką remiasi portfelio sklaidos charakteristikomis – dispersija ir standartiniu nuokrypiu.
- Vertindami portfelio grąžą per tam tikrą laiką, investuotojai remiasi jos vidurkiu ir dispersija.
- Finansų rinkos yra nenuoseklios. [5]

1.2.1. Laukiama investicinio portfelio grąža

Ilgą laikotarpio grąžą visada įmanoma išskaidyti į trumpo laikotarpio grąžų sumą. Be to, esant pakankamai dideliui duomenų kiekiui, grąžos yra normaliai pasiskirsčiusios. [6] Tai jau buvo aptarta anksčiau. Ši prielaida taikoma ir H. Markowitz portfelio optimizavimo principuose.

Kaip ir prieš tai, tarkime, kad investuojame į n skaičių akcijų. Tuomet, tikėtina i -osios akcijos grąža ateityje, laiko momentu $t = m$, kurią pažymėsime μ_i , $i = 1, \dots, n$ yra:

$$\mu_i = E(r_i(m)) = \frac{\sum_{t=1}^{m-1} r_i(t)}{m-1}, \quad (2)$$

čia $r_i(m)$ – i -osios akcijos grąža laiko momentu m ; t - laikas, $t = 1, \dots, m$. [7]

Jei nuo konkrečios akcijos grąžos pereitume prie viso portfelio ir jo charakteristikų, tuomet analogiškai tikėtina portfelio grąža laiko momentu $t = m$ gali būti apskaičiuota naudojantis formule:

$$\mu_P = E(R_P(m)) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i(m)),$$

čia w_i – i -osios akcijos svoris/dalis portfelyje; n – akcijų skaičius; $R_P(m)$ – portfelio grąža laiko momentu m .

Tikėtina investicinio portfelio grąža – tai apskaičiuotas galimas investicijos rezultatas. [8] Dažniausiai jis siejamas su tai investicijai įprasta grąža, todėl skaičiuojamas istorinių duomenų vidurkis.

1.2.2. Rizikos ir grąžos dispersijos analizė

Rizika – tai tikimybė, kad tikėtina grąža nebus realizuota. Kiekvienas racionalus investuotojas siekia uždirbti kuo didesnę grąžą su kiek įmanoma mažesne rizika. Vis dėlto, praktikoje rizikingesnės investicinės priemonės paprastai turi ir didesnę tikėtiną grąžą, kaip atlygį už prisiimtą riziką. Skirtumas tarp rizikingos investicijos tikėtiną grąžos ir nerizikingos yra vadinamas rizikos premija. [9] Jei rizikos premijos nebūtų tik labai nedidelė investuotojų dalis rinktųsi rizikingus vertybinius popierius, nes jiems tai tiesiog neapsimokėtų. Nepaisant to, galima rasti optimalius sprendimus tarp tikėtiną grąžos ir rizikos. Vienas iš būdų yra investicijų diversifikavimas.

Kuriant investicinį portfelį, rizikai matuoti, naudojamos duomenų sklaidos skaitinės charakteristikos - dispersija arba vidutinis standartinis nuokrypis jas skaičiuojant aplink tikėtiną reikšmę. Aktyvo i grąžos dispersija yra apskaičiuojama naudojantis šia formule:

$$\sigma_i^2 = Var(r_i) = \frac{\sum_{t=1}^m (r_i(t) - \mu_i)^2}{m - 1},$$

čia $r_i(t)$ - i -osios akcijos grąža laiko momentu t ; $t = 1, \dots, m$; $\mu_i = E(r_i)$ - tikėtina i -osios akcijos grąža. [1]

Standartinis nuokrypis yra šaknis iš dispersijos, taigi šiuo atveju:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^m (r_i(t) - \mu_i)^2}{m - 1}}. \quad (3)$$

Dispersija ir standartinis nuokrypis parodo vidutinį atstumą tarp visų variacinės eilutės stebėjimų (šiuo atveju grąžos) ir vidurkio. [10] Be to, didesnė dispersija ir standartinis nuokrypis rodo didesnę riziką.

Standartinis nuokrypis yra Moderniosios portfelio teorijos rizikos matas. Kalbant apie tokį matą, taip pat reikalinga prielaida, kad tiriami duomenys yra normaliai pasiskirstę.

Viso investicinio portfelio grąžos dispersija yra apskaičiuojama:

$$\sigma_P^2 = Var(R_P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i \neq j} w_i w_j \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2,$$

čia σ_i^2 - i -ojo investicinio instrumento grąžos dispersija; $\sigma_{ij} = Cov(r_i, r_j)$ - kovariacija tarp r_i ir r_j . Be to, $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$. [9] Kovariacija gali būti išreikšta per koreliacijos koeficientą:

$$\sigma_{ij} = Cov(r_i, r_j) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j,$$

čia ρ_{ij} - koreliacija tarp r_i ir r_j ; σ_i ir σ_j - standartiniai r_i ir r_j nuokrypiai.

Bendra portfelio rizika, išmatuota pagal jo dispersiją, susideda iš sisteminės ir nesisteminės (specifinės) rizikų. Sisteminės rizikos dalis formulėje - $\sum_{i \neq j} w_i w_j \sigma_{ij}$. Ji susijusi su kovariacijomis tarp investicinio portfelio grąžų. Kovariacijos įvertina 2-jų atsitiktinių dydžių tiesinę

nepriklausomybę. Jei du dydžiai yra nepriklausomi, jų kovariacija lygi 0. Portfelio sudarymo kontekste, kovariacija parodo, kad tam tikrų aktyvų kombinacijų rizika, gali būti mažesnė nei individualaus aktyvo rizika ir tuo paaiškinama diversifikacijos idėja. Formulės dalis - $\sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2$ apibrėžia nesisteminę riziką, susijusią su kiekvienos individualios grąžos dispersija.

Investicinio portfelio grąžos yra daugiamačiai normaliai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. [1]

Teiginys 1. *Daugiamatis normaliai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių (grąžų) vektorius yra pilnai apibrėžiamas tikimybių vektoriumi ir jo kovariacijų matrica.*

Taigi, formules galime perrašyti matriciniu pavidalu:

$$R_P = \sum_{i=1}^n w_i r_i = R W^T = (r_1 \ r_2 \ r_3 \ \dots \ r_n) * \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = W V W^T = (w_1 \ w_2 \ w_3 \ \dots \ w_n) * \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Jei turime m laiko intervalų, tai kovariacijos formulė:

$$\sigma_{ij} = Cov(r_i r_j) = \frac{\sum_{t=1}^m (r_i(t) - \mu_i) (r_j(t) - \mu_j)}{m}.$$

Matematinė H. Markowitz modelio išraiška:

$$\begin{aligned} \max \mu_P &= \max \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \\ \min \sigma_P &= \min \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}}, \\ 0 &\leq w_i \leq 1, i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1. \end{aligned}$$

Apibrėžimas 3. *Du atsitiktinius dydžius, kurių kovariacija lygi 0 vadinsime nekoreliuotaisiais.* Kalbant apie koreliaciją, žinome, kad tai, kaip ir kovariacija, yra dviejų susijusių atsitiktinių dydžių skaitinė charakteristika. Koreliacijos koeficientas svyruoja tarp -1 ir 1, kur 0 reiškia, kad jie yra statistiškai nepriklausomi, -1 rodo neigiamą priklausomybę, 1 - teigiamą.

Teiginys 2. *Jei portfelio aktyvų grąžos yra nekoreliuotos, t. y. $\sigma_{ij} = 0$, kai $i \neq j$, tada portfelio grąžų dispersija artėja link 0, augant investicijų skaičiui n. Tai reiškia, kad investicinis portfelis yra puikiai diversifikuotas ir rizika mažėja.* [9] Pavyzdžiui, imkime $w_i = \frac{1}{n}$, tada

$$\sigma_P^2 = \text{Var}(R_P) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{n^2} \leq \frac{\sigma_{\max}^2}{n},$$

čia $\sigma_{\max} \equiv \max_i \sigma_i$. Šis pavyzdys rodo diversifikacijos praktinį pritaikymą.

Vis dėlto, kai investicinių instrumentų grąžos yra koreliuotos, diversifikacija turi ribas.

Teiginys 3. *Dabar tarkime, kad visos grąžos turi vienodą dispersiją - s^2 , o grąžų koreliacija yra konstanta - z . Tada $\sigma_{ij} = \text{Cov}(r_i r_j) = z s^2$, kai $i \neq j$ ir $w_i = \frac{1}{n}$. Tuomet portfelio grąžos dispersija yra:*

$$\sigma_P^2 = \text{Var}(R_P) = \sum_{i \neq j} \frac{z s^2}{n^2} + \sum_{i=1}^n \frac{s^2}{n^2} = n(n-1) \frac{z s^2}{n^2} + \frac{s^2}{n} = z s^2 + (1-z) \frac{s^2}{n},$$

ir ji negali būti sumažinta labiau nei kovariacijos vidurkis $z s^2$. [9]

Augant portfeliui, įtraukiant į jį naujas investicijas, specifinė ir sisteminė rizikos elgiasi labai skirtingai. Būtent tai ir parodo aprašyti pavyzdžiai. Apibendrinant, galime padaryti tokias išvadas:

- Jei portfelis yra gerai diversifikuotas, jam augant, specifinė/nesisteminė rizika artėja į 0.
- Jei portfelis yra gerai diversifikuotas, jam augant, sisteminė rizika konverguoja į visų investicijų porų portfelyje kovariacijų vidurkį (H. Markowitz savo darbe „Portfelio Pasirinkimas“ tai pavadino – kovariacijos vidurkio dėsnio (angl. Law of the average Covariance)).
- Sisteminė rizika nėra panaikinama diversifikacijos metodu.

1.2.3. Efektyvumo frontas

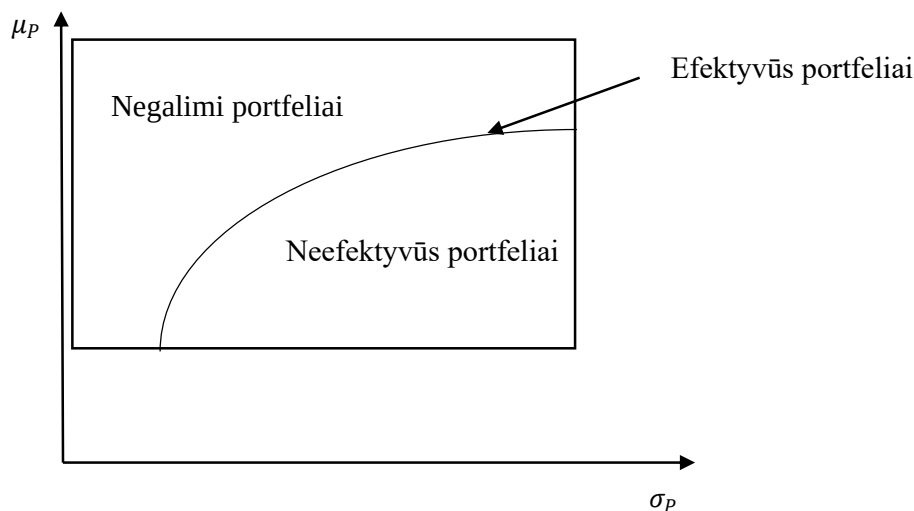
Tarkime, kad investuojame į n pasirinktų akcijų iš kurių sudarome 3 investicinius portfelius A, B ir C. Šią portfelių aibę pažymėkime $\mathbb{C} = \{A, B, C\}$.

Apibrėžimas 4. *Jei $\sigma_A \leq \sigma_B \leq \sigma_C$ ir $ER_A \geq ER_B \geq ER_C$, tai investicinis portfelis A vadinamas **efektyviu** portfelių aibės $\mathbb{C}$ atžvilgiu.*

Moderniosios portfelio teorijos tikslas yra rasti efektyviausią investicinį portfelį, suformuotą iš pasirinktų investicinių priemonių. Efektyvus portfelis yra toks, kuris atneša didžiausią grąžą su pasirinktu rizikos koeficientu arba pasirinkus norimą gauti grąžą, jis yra mažiausiai rizikingas. Visų įmanomų portfelių, iš pasirinktų aktyvų, aibė, gali būti pavaizduota grafiškai, o joje įmanoma nustatyti efektyvumo frontą.

Apibrėžimas 5. *Efektyvumo frontas – tai portfelių aibės poaibis, sudarytas iš efektyvių elementų.*

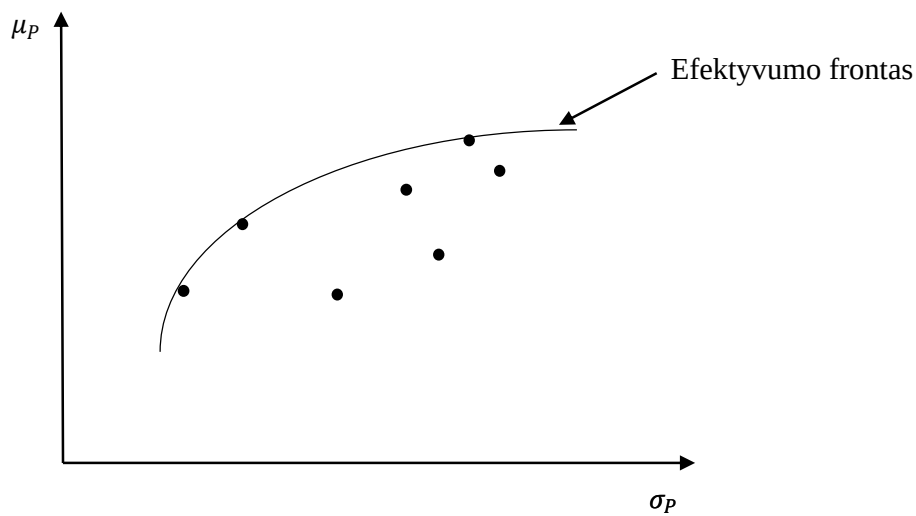
Remiantis Moderniąja portfelio teorija investuotojai neturėtų turėti portfelių, kurie nėra išsidėstę ant efektyvumo fronto linijos. Taip atrodo rizikos – grąžos koordinatų plokštuma atvaizduojanti portfelių aibę:



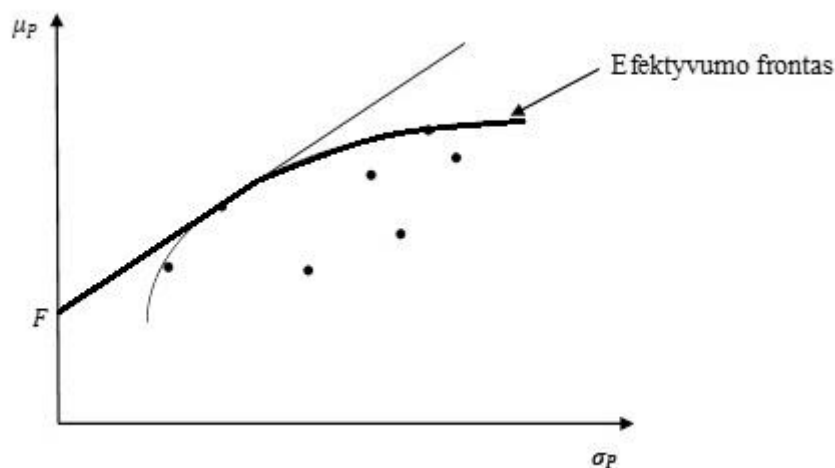
pav. 3. Rizikos – grąžos koordinatų plokštuma.

Investicinis portfelis gali būti sudarytas iš rizikingų ir nerizikingų aktyvų. 4-ame paveiksle matomas rizikingų portfelių aibės efektyvumo frontas. Po efektyvumo frontu „guli“ visi galimi portfeliai. Optimalūs portfeliai visuomet yra išsidėstę ant fronto linijos. Kalbant apie investicinio portfelio sudėtį ir išsidėstymą, verta atkreipti dėmesį, kad portfeliai, kurių didžiąją dalį sudaro pakankamai saugios investicijos, kaip pvz.: skolos vertybiniai popieriai – obligacijos, bus išsidėstę grafiko apačioje. Tokių investicijų ir grąža ir rizika yra mažesnė. Tuo tarpu, portfeliai, kurie didžiąja dalimi sudaryti iš rizikingų investicijų, kaip akcijos, bus išsidėstę aukščiau.

Rizikingų investicijų grąža nėra žinoma iš anksto, o rizika niekada nėra lygi 0. Tuo tarpu, nerizikingų – grąža žinoma iš anksto, dispersija lygi 0. 5 paveiksle F žymi nerizikingą investiciją, kurios dispersija yra 0, o tikėtina grąža - μ_F . Jei į portfelį, šalia rizikingų investicijų yra įtraukiamos nerizikingos, tai portfelio efektyvumo frontas keičiasi. Šiuo atveju, nustatius rizikingų aktyvų portfelių efektyvumo frontą, brėžiama liestinė kertanti nerizikingą aktyvą F ir taip randamas, portfelių, turinčių nerizikingą aktyvą efektyvumo frontas. Jis 5 paveiksle pažymėtas tamsesne spalva. Portfelis, kurį liečia nubrėžta liestinė yra maksimalaus Sharpe koeficiento portfelis, o liestinė vadinama kapitalo paskirstymo linija.



pav. 4. Portfelį, sudarytų iš rizikingų aktyvų, efektyvumo frontas.



pav. 5. Efektyvumo frontas įtraukiant nerizikingą aktyvą – F.

Portfelio efektyvumo frontas priklauso ir nuo koreliacijos koeficiento. Nagrinėkime, kaip jis keičiasi, kai turime tobulą teigiamą priklausomybę, tobulą neigiamą priklausomybę ir kai jos nėra. Nagrinėjamas objektas – portfelį aibė A , kurią sudaro 2 rizikingi aktyvai A_1 ir A_2 , t. y. $\sigma_{A_1} > 0$ ir taip pat $\sigma_{A_2} > 0$. Tokia aibė apibrėžiama:

$$A = wA_1 + (1 - w)A_2, 0 \leq w \leq 1.$$

Tada, portfelį tikėtina grąža ir dispersija yra lygi:

$$\mu_A = w\mu_{A_1} + (1 - w)\mu_{A_2},$$

$$\sigma_A^2 = w^2\sigma_{A_1}^2 + (1 - w)^2\sigma_{A_2}^2 + 2w(1 - w)\text{Cov}(r_{A_1}, r_{A_2}).$$

I atvejis: $\rho(r_{A_1}, r_{A_2}) = 1$.

Kai koreliacijos koeficientas lygus 1, portfelio dispersija yra

$$\sigma_A^2 = w^2 \sigma_{A_1}^2 + (1-w)^2 \sigma_{A_2}^2 + 2w(1-w) \sigma_{A_1} \sigma_{A_2}$$

$$\sigma_A^2 = (\sigma_{A_1} w + \sigma_{A_2} (1-w))^2,$$

o vidurkis lygus

$$\mu_A = w \mu_{A_1} + (1-w) \mu_{A_2}$$

$$\mu_A = \mu_{A_1} + \frac{\mu_{A_2} - \mu_{A_1}}{\sigma_{A_2} - \sigma_{A_1}} (\sigma_A - \sigma_{A_1}).$$

Tokiu atveju, įvairūs portfeliai, prieinami investuotojui, yra išsidėstę ant tiesės tarp portfelių, kur 100% investuojama į A_1 arba 100% investuojama į A_2 (Pav.6).

II atvejis: $\rho(r_{A_1}, r_{A_2}) = 0$.

Jei koreliacijos tarp portfelio grąžų nėra, tai

$$\sigma_A^2 = w^2 \sigma_{A_1}^2 + (1-w)^2 \sigma_{A_2}^2.$$

Galime rasti minimalios dispersijos portfelį sprenddami $\frac{\partial \sigma_A}{\partial w} = 0$ (žr. 1.2.5) Gauname, kad

$$w = \frac{\sigma_{A_2}^2}{\sigma_{A_1}^2 + \sigma_{A_2}^2}.$$

Tuomet portfelio grąža lygi

$$\mu_A = \frac{\sigma_{A_2}^2 \mu_{A_1} + \sigma_{A_1}^2 \mu_{A_2}}{\sigma_{A_1}^2 + \sigma_{A_2}^2}$$

Galimi portfeliai yra išsidėstę ant kreivės (Pav. 6) užrašomos išraiška:

$$w = \frac{\sigma_{A_2}^2 - \sqrt{\sigma_{A_2}^4 - (\sigma_{A_1}^2 + \sigma_{A_2}^2)(\sigma_{A_2}^2 - \sigma_A^2)}}{\sigma_{A_1}^2 + \sigma_{A_2}^2}$$

ir

$$\mu_A = w \mu_{A_1} + (1-w) \mu_{A_2}.$$

III atvejis: $\rho(r_{A_1}, r_{A_2}) = -1$.

Jei koreliacija neigiama, tai

$$\sigma_A^2 = w^2 \sigma_{A_1}^2 - (1-w)^2 \sigma_{A_2}^2.$$

Iš čia gauname σ_A išraišką:

$$\sigma_A = \sigma_{A_1} w + \sigma_{A_2} (1-w).$$

Galime pasirinkti w taip, kad $\sigma_P = 0$:

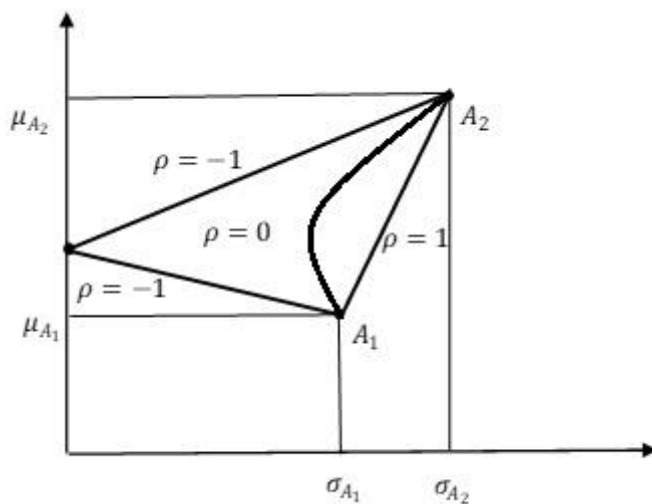
$$w = \frac{\sigma_{A_2}}{\sigma_{A_2} + \sigma_{A_1}}.$$

Portfelio grąža tokiu atveju:

$$\mu_A = \frac{\sigma_{A_2}\mu_{A_1} + \sigma_{A_1}\mu_{A_2}}{\sigma_{A_1} + \sigma_{A_2}}.$$

Paveikslas 6 vaizduoja galimos portfelio aibės efektyvumo frontus atsižvelgiant į koreliacijos koeficientą tarp portfelio aktyvų grąžų. Dėl koreliacijos koeficiento tarp aktyvų, galima sudaryti portfelius, kurie bus mažiau rizikingi, nei individualūs aktyvai, bet su didesne tikėtina grąža, nei turime mažiausią tikėtiną kažkurio aktyvo grąžą. Pasirinkę norimą grąžą, galime rasti portfelį su mažiausia rizika tai grąžai pasiekti ir atvirkščiai.

Remiantis šia teorija sudaromi ir maksimalios grąžos duotai rizikai portfeliai. Rizika, tokiu atveju, yra fiksuotas iš anksto žinomas skaičius.



pav. 6 Efektyvumo fronto kitimas priklausomai nuo koreliacijos koeficiento.

1.2.4. Sharpe rodiklis

Lyginant įvairius portfelius, reikalingas įrankis kiekvieno iš jų efektyvumui įvertinti. Viena iš ilgalaikių investicijų efektyvumo matavimo priemonių yra Sharpe rodiklis (dar vadinamas pelno – rizikos koeficientu). Žinome, kad investuotojui turi būti kompensuota už investavimą į rizikingus vertybinius popierius ir nerizikingų aktyvų neįtraukimą į savo portfelį. Sharpe rodiklis parodo kiek papildomos grąžos yra gaunama už rizikingo aktyvo turėjimą savo portfelyje. Jis yra apskaičiuojamas naudojantis šia formule:

$$S_P = \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P},$$

čia r_f – nerizikinga palūkanų norma, μ_P – laukiama portfelio grąža, σ_P – standartinis nuokrypis.

Didesnis Sharpe rodiklis rodo geresnį rezultatą.

Apibrėžimas 6. *Sharpe rodiklis yra kapitalo paskirstymo linijos krypties koeficientas.*

Tiesės $y = kx + b$ krypties koeficientas dar vadinamas tiesės posvyriu. Jei tiesės grafikas eina per taškus (x_1, y_1) ir (x_2, y_2) , tai krypties koeficientas apskaičiuojamas, naudojantis šia formule:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Šiuo atveju, kapitalo paskirstymo linija eina per tašką F , kurio koordinatės $(0; r_f)$ ir, tarkime, per kažkokį tašką A , kuris žymi portfelį, sudarytą iš rizikingų aktyvų, su koordinatėmis $(\sigma_A; \mu_A)$. Iš čia gauname,

$$S_P = \frac{\mu_A - r_f}{\sigma_A}.$$

Be to, remiantis efektyvaus portfelio apibrėžimu (žr.1.2.3) aišku, kad

$$\frac{\mu_A - r_f}{\sigma_A} \geq \frac{\mu_B - r_f}{\sigma_B},$$

kai $\sigma_A \leq \sigma_B$ ir $\mu_A \geq \mu_B$.

Nerizikinga palūkanų norma, tai teorinė, investicijos su nuline rizika, gražos norma. Nerizikingai palūkanų normai r_f nustatyti paprastai naudojamos saugiomis laikomų šalių, tokių kaip Jungtinės Amerikos valstijos, ilgalaikių skolos vertybinių popierių –vyriausybės obligacijų mokamos palūkanos. Jei portfelį palyginimui naudojame tą patį skaičiavimo metodą, tai nerizikinga palūkanų norma gali būti ir neįtraukiama - $r_f = 0$.

1.2.5. Minimalios rizikos portfelis

Minimalios rizikos portfelis - tai portfelį aibės elementas, turintis mažiausią dispersiją (riziką). Geometriškai, minimalios rizikos portfelis yra kairiausias efektyvumo fronto taškas.

Kaip ir anksčiau, nagrinėkime portfelį, sudarytą iš dviejų rizikingų aktyvų:

$$A = wA_1 + (1 - w)A_2, 0 \leq w \leq 1,$$

ir

$$\sigma_A^2 = w^2\sigma_{A_1}^2 + (1 - w)^2\sigma_{A_2}^2 + 2w(1 - w)Cov(r_{A_1}, r_{A_2}).$$

Perrašykime formulę:

$$\sigma_A^2 = w^2\sigma_{A_1}^2 + 1 - 2w\sigma_{A_2}^2 + w^2\sigma_{A_2}^2 + 2wCov(r_{A_1}, r_{A_2}) - 2w^2Cov(r_{A_1}, r_{A_2})$$

Norėdami rasti aktyvų svorį w , kuris minimizuotų dispersiją, ieškome σ_A^2 išvestinės pagal w . Taigi,

$$(\sigma_A^2(w))' = 2w\sigma_{A_1}^2 - 2\sigma_{A_2}^2 + 2w\sigma_{A_2}^2 + 2Cov(r_{A_1}, r_{A_2}) - 4wCov(r_{A_1}, r_{A_2}).$$

Ieškome funkcijos minimumo prilygindami gautą išvestinę 0 ir sprendami lygtį w atžvilgiu.

Gauname, kad portfelio A dispersija yra minimali, kai svoris w lygus:

$$w = \frac{\sigma_{A_2}^2 - Cov(r_{A_1}, r_{A_2})}{\sigma_{A_1}^2 + \sigma_{A_2}^2 - 2Cov(r_{A_1}, r_{A_2})}.$$

Apibrėžimas 7. Funkcijos $f(x)$ reikšmė $f(x_2)$ - vadinama funkcijos **minimumu**, kai egzistuoja tokia taško x_2 aplinka $(x_2 - \delta, x_2 + \delta)$, kurioje su visiems x teisinga nelygybė $f(x) \geq f(x_2)$. Funkcijos minimumo taško reikšmė (kaip ir maksimumo), taip pat dar vadinama jos ekstremumu.

Būtina ekstremumo sąlyga: jei diferencijuojama funkcija $f(x)$ kažkokiame taške $x = x_0$ turi ekstremumą, tai jos pirmosios eilės išvestinė lygi 0, t. y.: $f'(x_0) = 0$. Tačiau, tai nėra pakankama sąlyga, todėl funkcijos išvestinė taške x_0 gali būti lygi 0, tačiau tame taške ekstremumo neturėti.

Pakankama ekstremumo sąlyga: taške x_0 funkcija $f(x)$ turi ekstremumą, jei funkcijos išvestinė pereinama per tašką x_0 keičia ženklą:

1. jei $f'(x_0)$ keičia ženklą iš pliuso į minusą – maksimumą;
2. jei $f'(x_0)$ keičia ženklą iš minuso į pliusą – minimumą.

Teorema 1. Jei taške x_0 funkcijos $f(x)$ pirmoji išvestinė lygi 0, o antroji išvestinė $f''(x_0)$ taško x_0 aplinkoje yra tolydi ir $f''(x_0) \neq 0$, tai taške x_0 funkcija įgyja:

1. maksimumą - kai $f''(x_0) < 0$;
2. minimumą, kai $f''(x_0) > 0$.

Grįžkime prie portfelio A ir raskime antrąją išvestinę:

$$(\sigma_A^2(w))'' = 2\sigma_{A_1}^2 + 2\sigma_{A_2}^2 - 4Cov(r_{A_1}, r_{A_2}) > 0.$$

Iš čia aišku, kad gautas taškas iš tiesų yra funkcijos minimumo taškas.

1.2.6. Maksimalaus Sharpe koeficiento portfelis

Sharpe koeficientas apskaičiuojamas naudojantis formule:

$$S_P = \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}.$$

Norėdami rasti maksimalaus Sharpe koeficiento portfelį sprendžiame lygtį:

$$\max_w S_P = \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}.$$

Rasime maksimalų Sharpe koeficientą portfeliui $A = wA_1 + (1 - w)A_2, 0 \leq w \leq 1$.

Pažymėkime:

$$r_1 - r_f = R_{A_1} = R_1;$$

$$r_2 - r_f = R_{A_2} = R_2;$$

$$\sigma_{12} = Cov(r_{A_1}, r_{A_2});$$

$$\sigma_1 = \sigma_{A_1}; \sigma_2 = \sigma_{A_2};$$

$$w_1 = w_{A_1}; w_2 = w_{A_2} = 1 - w_{A_1}.$$

Tada

$$S_P = (w_1 R_1 + w_2 R_2) * (w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12})^{-1/2}.$$

Ieškome Sharpe koeficiento išvestinės pagal w_1 :

$$(S_P)' = (w_1 R_1 + w_2 R_2) * \left(-\frac{1}{2} (w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12})^{-3/2} \right) * \\ * 2w_1 \sigma_1^2 + 2w_2 \sigma_{12} + (w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12})^{-1/2} * R_1.$$

Padauginame gautą lygybę iš

$$(w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12})^{1/2}.$$

Gauname

$$(S_P)' = (w_1 R_1 + w_2 R_2) * (-(w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12})^{-1} * w_1 \sigma_1^2 + w_2 \sigma_{12} + R_1 = \\ = \frac{-(w_1 R_1 + w_2 R_2)(w_1 \sigma_1^2 + w_2 \sigma_{12})}{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12}} + R_1 = \\ = \frac{-(w_1 R_1 + w_2 R_2)(w_1 \sigma_1^2 + w_2 \sigma_{12}) + R_1(w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12})}{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12}}.$$

Prilyginę gautą išraišką 0 turime:

$$R_1(w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12}) - (w_1 R_1 + w_2 R_2) * (w_1 \sigma_1^2 + w_2 \sigma_{12}) = 0 \\ w_1^2 R_1 \sigma_1^2 + w_2^2 R_1 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 R_1 \sigma_{12} - w_1^2 R_1 \sigma_1^2 - w_1 w_2 R_1 \sigma_{12} - w_1 w_2 R_2 \sigma_1^2 - w_2^2 R_2 \sigma_{12} = 0 \\ w_2^2 R_1 \sigma_2^2 - w_2^2 R_2 \sigma_{12} = w_1 w_2 R_2 \sigma_1^2 - w_1 w_2 R_1 \sigma_{12} \\ w_2 R_1 \sigma_2^2 - w_2 R_2 \sigma_{12} = w_1 R_2 \sigma_1^2 - w_1 R_1 \sigma_{12}.$$

Atlikę pakeitimą $w_2 = 1 - w_1$ ir suprastinę dalį lygties gauname tokią išraišką:

$$R_1 \sigma_2^2 - R_2 \sigma_{12} = w_1 (R_2 \sigma_1^2 - R_1 \sigma_{12} + R_1 \sigma_2^2 - R_2 \sigma_{12}),$$

iš čia

$$w_1 = \frac{R_1 \sigma_2^2 - R_2 \sigma_{12}}{R_2 \sigma_1^2 - R_1 \sigma_{12} + R_1 \sigma_2^2 - R_2 \sigma_{12}} \\ w_1 = \frac{R_1 \sigma_2^2 - R_2 \sigma_{12}}{R_1 \sigma_2^2 + R_2 \sigma_1^2 - (R_1 + R_2) \sigma_{12}}.$$

Jeigu grįžtume prie portfelio A žymėjimų, tai gautą išraišką galima perrašyti:

$$w_{A_1} = \frac{R_{A_1} \sigma_{A_2}^2 - R_{A_2} Cov(R_{A_1}, R_{A_2})}{R_{A_1} \sigma_{A_2}^2 + R_{A_2} \sigma_{A_1}^2 - (R_{A_1} + R_{A_2}) Cov(R_{A_1}, R_{A_2})}.$$

Gauta maksimalaus Sharpe koeficiento išraiška dviejų rizikingų aktyvų portfelio sudaryme.

2. PRAKTINĖ DALIS

Šioje darbo dalyje H. Markowitz Modernioji portfelio teorija pritaikoma praktiškai, atrinktoms Lietuvos akcijoms, kurios kotiruojamos Nasdaq Vilnius vertybinių popierių biržoje.

Remiantis H. Markowitz teorija yra sudaromi:

- minimalios rizikos portfelis;
- maksimalios grąžos, duotai rizikai, portfelis;
- maksimalaus Sharpe koeficiento portfelis.

Duomenys: 10-ies didžiausių Lietuvos įmonių, pagal rinkos kapitalizaciją, akcijos, laikotarpiu nuo 2015/01/01 iki 2020/01/01. Reikalaujama, kad akcijos būtų įtrauktos į biržos prekybos sąrašą bent 5 metus, tam, kad turėtume pakankamą akcijų kainų istoriją. Skaičiavimuose naudojamos savaitinės akcijų kainos, kurios apskaičiuojamos, imant 5 dienų akcijų kainų vidurkį, kadangi tiek laiko per savaitę birža yra atidaryta. Tyrime naudojami statistiniai duomenys paimti iš Nasdaq Baltic oficialios svetainės. [11]

Akcijų sąrašas: Telia Lietuva (TEL1L); Ignitis gamyba (LNR1L); Šiaulių bankas (SAB1L); Klaipėdos nafta (KNF1L); Rokiškio sūris (RSU1L); Linas Agro Group (LNA1L); Apranga (APG1L); Auga Group (AUG1L); Grigeo (GRG1L); Pieno žvaigždės (PZV1L).

Įmonė ir jos trumpinys	Kapitalizacija 2020 (EUR)
1. Telia Lietuva (TEL1L)	786,53mln.
2. Ignitis gamyba (LNR1L)	411,48mln.
3. Šiaulių bankas (SAB1L)	230,68mln.
4. Klaipėdos nafta (KNF1L)	138,29mln.
5. Rokiškio sūris (RSU1L)	92,54mln.
6. Linas Agro Group (LNA1L)	91,39mln.
7. Apranga (APG1L)	89,85mln.
8. Auga Group (AUG1L)	85,96mln.
9. Grigeo (GRG1L)	74,24mln.
10. Pieno žvaigždės (PZV1L)	40,85mln.

lentelė 1. Lietuvos įmonės ir jų kapitalizacija rinkoje. Nasdaq Baltic duomenys.

Prielaidos, taikomos tyrimo duomenims ir investuotojo elgsenai, renkantis optimalų portfelį:

1. Investuotojas siekia maksimizuoti grąžą ir minimizuoti riziką. Esant vienodai grąžai, renkasi mažesnės rizikos portfelį;
2. Į portfelį įtraukiami tik rizikingi aktyvai - akcijos, t. y. tokių aktyvų grąža – nežinoma (laikoma, kad ji numatoma – skaičiuojamos tikėtinos reikšmės), o $\sigma_p \neq 0$;
3. Investicinio portfelio aktyvų grąžos turi normalųjį skirstinį;
4. Tikėtinos aktyvų grąžos, dispersijos ir kovariacijos yra apskaičiuojamos ir žinomos visiems investuotojams;
5. Kiekvienos akcijos svoris – neneigiamas skaičius.
6. Skolintų akcijų pardavimo atvejis bei įmonių mokami dividendai į skaičiavimus neįtraukiami.

2.1. Individuali rizika ir grąža

Pirmiausia, pasinaudoję formulėmis (1) ir (2), apskaičiuokime vidutinę savaitinę kiekvienos akcijos grąžą. Iš 2 lentelės duomenų matyti, kad didžiausia grąža per pastaruosius 5 metus pasižymėjo Šiaulių banko (SAB1L) ir Auga Group (AUG1L) akcijos. Jos vidutiniškai augo 0,27% per savaitę. Taip pat mažai nuo šių įmonių atsiliko Rokiškio sūrio (RSU1L) akcijos, kurių vertė padidėdavo vidutiniškai 0,25% per savaitę. Žiūrint į šių įmonių bendrus 5 metų rezultatus matyti, kad akcijų vertė atitinkamai išaugo 251,69%, 82,91% ir 82,61%. [11] Visgi, dalies akcijų vidutinė grąža - neigiama. Įmonė Pieno žvaigždės (PZV1L) vidutiniškai prarasdavo po 0,17% akcijos vertės kiekvieną savaitę. Šiek tiek mažiau nuvertėjo Ignitis (LNR1L), Aprangos (APG1L) ir Linas Agro Group (LNA1L) akcijos.

	Akcija	Graża (%)
1	SAB1L	0.27
2	AUG1L	0.27
3	RSU1L	0.25
4	GRG1L	0.15
5	TEL1L	0.10
6	KNF1L	0.08
7	LNA1L	-0.06
8	APG1L	-0.07
9	LNR1L	-0.08
10	PZV1L	-0.17

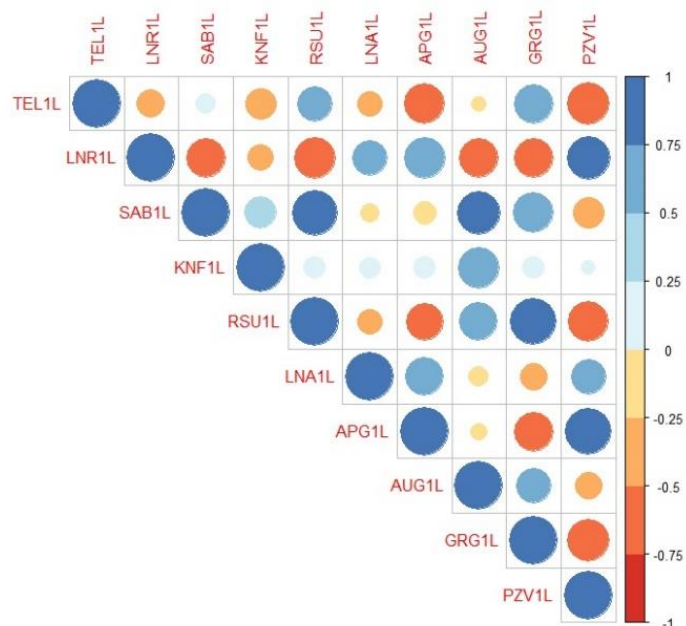
lentelė 2. Vidutinė savaitinė akcijų grąža.

Nesunkiai galime apskaičiuoti ir kiekvienos akcijos standartinį nuokrypį (3), t. y. riziką, susijusią su konkrečios akcijos pirkimu.

	Akcija	Standartinis nuokrypis
1	RSU1L	0.55
2	APG1L	0.38
3	PZV1L	0.21
4	GRG1L	0.15
5	SAB1L	0.11
6	TEL1L	0.1
7	AUG1L	0.1
8	LNR1L	0.09
9	KNF1L	0.08
10	LNA1L	0.03

lentelė 3. Akcijų rizika išreikšta standartiniu nuokrypiu.

Tam, kad portfelis būtų tinkamai diversifikuotas, turime atsižvelgti ir į portfelio grąžų koreliacijos koeficientus. Investuotojui svarbu, kad vienų akcijų vertei krentant, ta pačia tendencija nepasektų ir kitos. Pasižiūrėjus į akcijų grąžų koreliacijų lentelę, stiprus statistinis ryšys fiksuojamas 5-iose porose: SAB1L ir RSU1L; SAB1L ir AUG1L; LNR1L ir PZV1L; RSU1L ir GRG1L; APG1L ir PZV1L. Visgi, didžioji dalis akcijų porų pasižymėjo neigiama arba nedidele teigiama koreliacija.



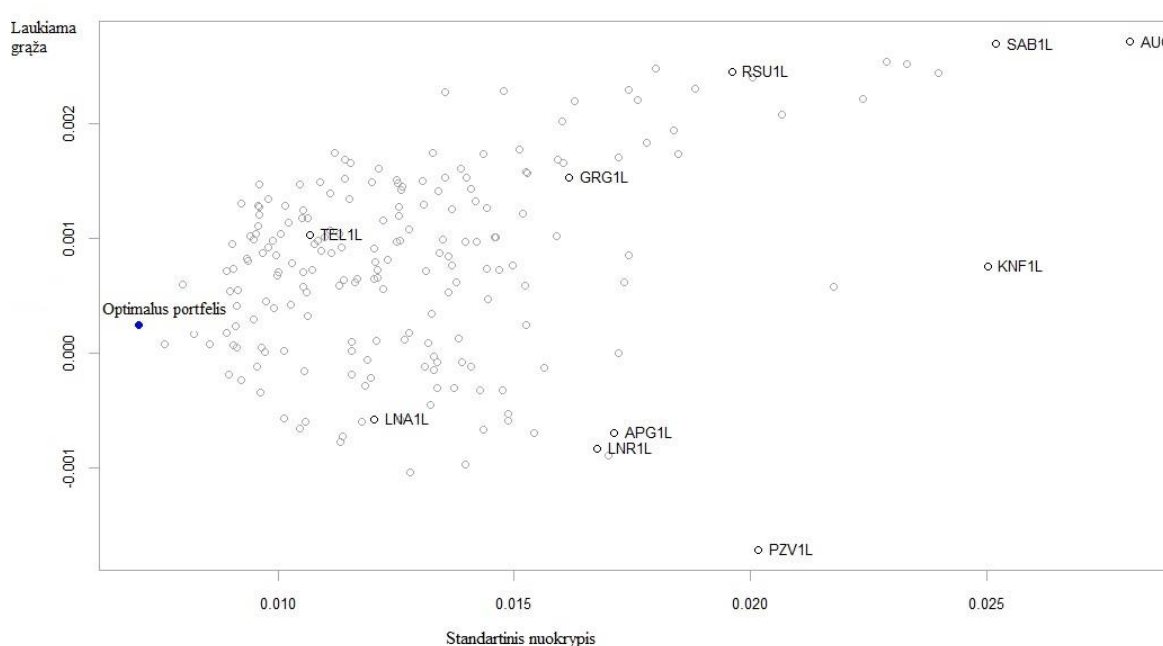
pav. 7 Koreliacija tarp akcijų grąžų.

2.2. Minimalios rizikos portfelis

Sudarant minimalios rizikos portfelį buvo siekta minimizuoti portfelio standartinę nuokrypį. 5 lentelėje pateikti gauti rezultatai. Apskaičiavus kiekvienos akcijos svorį portfelyje, matyti, kad Grigeo (GRG1L) ir Pieno žvaigždžių (PZV1L) akcijos į portfelį nebuvo įtrauktos. Didžiąją dalį portfelio sudaro Telia (TEL1L) ir Ignitis gamyba (LNR1L) akcijos atitinkamai po 30.47% ir 29.92%. Pažiūrėjus, kaip atrodo tokio portfelio efektyvumo frontas (Pav. 8), matyti, kad portfelis pasižymi mažesne rizika nei bet kuri akcija individualiai.

	Akcija	Svoris(%)
1	TEL1L	30.47%
2	LNR1L	29.92%
3	SAB1L	10.18%
4	KNF1L	8.40%
5	RSU1L	8.37%
6	LNA1L	5.22%
7	APG1L	4.02%
8	AUG1L	3.41%
9	GRG1L	0.00%
10	PZV1L	0.00%

lentelė 4. Akcijų svoriai minimalios rizikos portfelyje.



pav. 8. Minimalios rizikos portfelio efektyvumo frontas.

Portfelio rizika (standartinis nuokrypis)	0,706 %
Portfelio vidutinė savaitinė grąža	0,036 %
Sharpe koef. ($r_f = 0$)	0,035

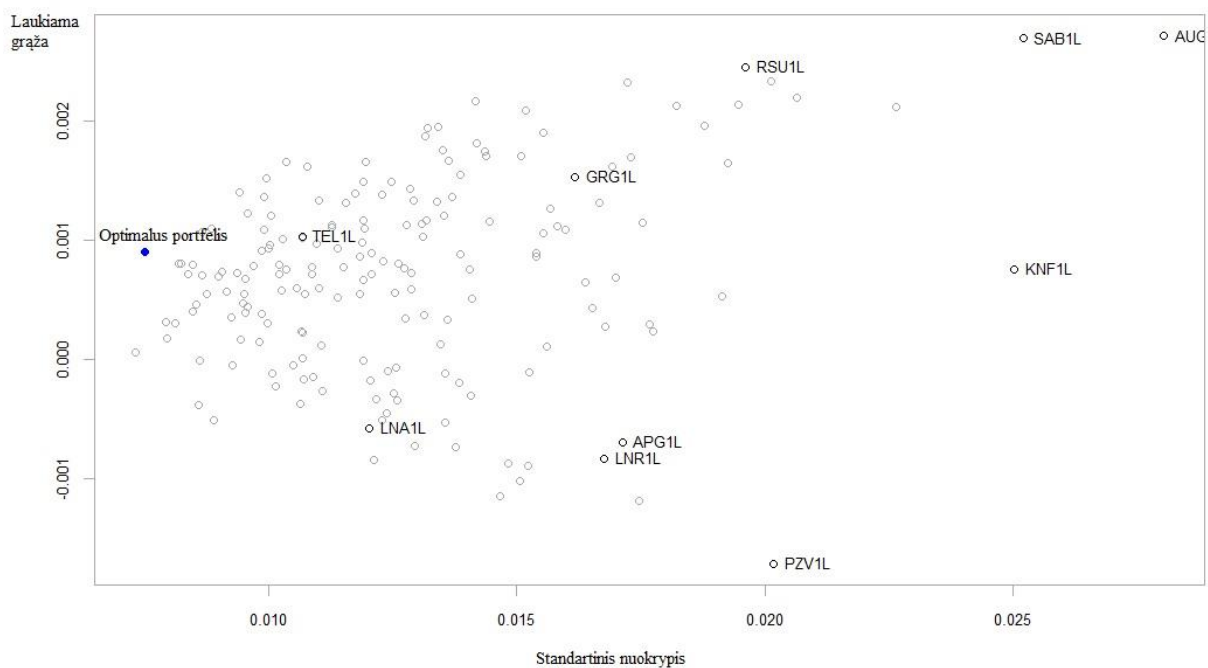
lentelė 5. Minimalios rizikos portfelio pagrindiniai rodikliai.

2.3. Maksimalios grąžos, duotai rizikai, portfelis

Maksimalios grąžos duotai rizikai portfelis buvo sudaromas atsižvelgiant į mažiausią savaitinę riziką pasižyminčia akcija. Gautame portfelyje vėl didžiąją dalį jo sudaro Telia (TEL1L) akcijos - 37.17%. Taip pat nemaža dalis turėtų būti investuota ir į Ignitis gamybos (LNR1L) akcijas. Rezultatai panašūs į minimalios rizikos portfelio rezultatus. Grigeo (GRG1L) ir Pieno žvaigždžių (PZV1L) akcijų į tokį portfelį taip pat neįtrauktume. Jei pažiūrėtume kaip atrodo portfelio efektyvumo frontas (Pav. 9), matytume, kad jis yra šiek tiek aukščiau nei minimalios rizikos portfelis. Tokio portfelio grąža yra didesnė, nors išlaikoma palyginti maža rizika.

	Akcija	Svoris(%)
1	TEL1L	37.17%
2	LNR1L	22.60%
3	SAB1L	12.22%
4	KNF1L	10.91%
5	RSU1L	6.68%
6	LNA1L	4.85%
7	APG1L	3.26%
8	AUG1L	2.31%
9	GRG1L	0.00%
10	PZV1L	0.00%

lentelė 6. Akcijų svoriai maksimalios grąžos duotai rizikai portfelyje.



pav. 9 Maksimalios grąžos duotai rizikai efektyvumo frontas.

Portfelio rizika (standartinis nuokrypis)	0,750 %
Portfelio vidutinė savaitinė grąža	0,099 %
Sharpe koef. ($r_f = 0$)	0,119

lentelė 7. Maksimalios grąžos duotai rizikai portfelio pagrindiniai rodikliai.

2.4. Maksimalaus Sharpe koeficiento portfelis

Analogiškai ankstesniems portfeliams sudarome maksimalaus Sharpe koeficiento portfelį. Akcijų svoriai pateikti 8 lentelėje. Taip sudaryto portfelio vidutinė savaitinė grąža siektų 0,06%, rizika – 0,12%, o Sharpe rodiklis, imant nerizikingą palūkanų normą $r_f = 0$ būtų lygus 2. Vėl pastebėjime, kad didžiąja dalimi portfelis būtų sudarytas iš Telia (TEL1L) akcijų. Jų dalis tokiame portfelyje - 39.55%.

	Akcija	Svoris (%)
1	TEL1L	39.55%
2	LNA1L	18.13%
3	GRG1L	13.75%
4	RSU1L	13.71%
5	AUG1L	8 %
6	SAB1L	5.29%
7	LNR1L	1.57%
8	KNF1L	0
9	APG1L	0
10	PZV1L	0

lentelė 8. Akcijų svoriai maksimalaus Sharpe koeficiento portfelyje.

Portfelio rizika (standartinis nuokrypis)	0,06 %
Portfelio vidutinė savaitinė grąža	0,12 %
Sharpe koef. ($r_f = 0$)	2

lentelė 9. Maksimalaus Sharpe koeficiento portfelio pagrindiniai rodikliai.

IŠVADOS

Šiame darbe pritaikius H. Markowitz teoriją buvo suformuoti 3 optimalūs portfeliai iš Lietuvos akcijų įtrauktų į Vilnius Nasdaq biržos prekybos sąrašą. Gauti rezultatai parodė 3 skirtingai suformuotų portfelių pranašumą prieš investavimą į individualias akcijas. Vis dėl to, H. Markowitz teorija remiasi vien grąžos ir rizikos santykiu, kuris įvertinamas apskaičiavus akcijų grąžų vidurkį ir standartinę nuokrypį. Sunku pasakyti, ar taip sudaryti portfeliai pasižymėtų efektyvumu, nes istoriniai akcijų rodikliai negarantuoja tokių pačių grąžų ateityje. Sudarant portfelius reikėtų įvertinti daugiau išorinių parametrų (įmonės finansinė situacija, pelningumo rodikliai, ateities perspektyvos, šalies BVP augimas ir pan.) ir nesiremti vien tik vidurkio – dispersijos analize, nes akcijų kainai įtaką gali daryti begalė veiksnių, kuriuos sunku nuspėti.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

- [1] H. Markowitz, „Portfolio Selection,“ *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.
- [2] „Nobel Prize,“ [Tinkle]: <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1990/press-release/>.
- [3] J. Kruopis, „Tikimybiniai modeliai,“ įtraukta *Matematinė statistika*, Vilnius, "Mokslas", 1977, pp. 62-65.
- [4] C. U. Press, *Cambridge Advanced Learner's Dictionary & Thesaurus*.
- [5] C.-F. Lee, A. Lee ir J. Lee, *Handbook of Quantitative Finance and Risk Management*, Springer Science+Business Media, 2010.
- [6] T. Mazzoni *Modern Portfolio Theory In A First Course in Quantitative Finance*, Cambridge, Cambridge University Press, 2018, pp. 100-119.
- [7] G. Chacko ir L. Viceira, *Dynamic Consumption and Portfolio Choice with Stochastic*, Review of Financial Studies, 2005.
- [8] „Investavimo menas,“ SEB, [Tinkle]: https://www.seb.lt/sites/default/files/web/pdf/Investavimo_menas.pdf.
- [9] Y.-D. Lyuu, *Financial Engineering and Computation*, Cambridge University Press, 2001.
- [10] E. Gilbert-Kawai. ir M. Wittenberg, „Standard deviation and variance. In Essential Equations for Anaesthesia: Key Clinical Concepts for the FRCA and EDA,“ Cambridge, Cambridge University Press, 2014, pp. 189-190.
- [11] „Nasdaq Baltic,“ [Tinkle]: <https://nasdaqbaltic.com/statistics/lt>.
- [12] „Swedbank,“ [Tinkle]: <https://blog.swedbank.lt/zodynelis/diversifikavimas>.
- [13] J. L. Snell ir C. M. Grinstead, *Introduction to probability*, Orange Grove Texts Plus, 2009.

PRIEDAI

Naudojamo statistinio paketo R versija - 3.6.3.

Programos R kodas:

```
# Naudojamos bibliotekos
library(tseries)
library(quantmod)
library(Quandl)
library(PortfolioAnalytics)
library(DEoptim)
library(corrplot)
library(dplyr)
library(lubridate)
library(tidyr)
library(ggplot2)
library(RColorBrewer)
library(scales)
library(xts)
library(readxl)
library(quadprog)
library(ROI)
library(ROI.plugin.glpk)
library(ROI.plugin.quadprog)
library(ROI.plugin.symphony)

# 1. Teorinė dalis
# Kompanijos Apple dienos uždarymo kainų (USD) grafikas laikotarpiu
# 2015/01/01 – 2020/01/01. (Pav.1)
start <- as.Date("2015-01-01")
end <- as.Date("2020-01-01")
getSymbols("AAPL", src = "yahoo", from = start, to = end)
plot(AAPL[, "AAPL.Close"], main = "Apple")

# Apple gražų grafikai - aritmetinės ir geometrinės gražos
AAPL.returns <- allReturns(AAPL)

AAPL.A.returns <- periodReturn(AAPL[,
"AAPL.Adjusted"], period='daily', subset=NULL, type='arithmetic', leading=TRUE)
AAPL.G.returns <- periodReturn(AAPL[,
"AAPL.Adjusted"], period='daily', subset=NULL, type='log', leading=TRUE)

par(mfrow=c(1,2))
aapl.hist1 = hist(AAPL.A.returns, plot=F, breaks=30)
hist(AAPL.A.returns, main="Arithmetic", col="cornflowerblue",
     xlab="returns",
     breaks=aapl.hist1$breaks)
xfit<-seq(min(AAPL.A.returns), max(AAPL.A.returns), length=40)
yfit<-dnorm(xfit, mean=mean(AAPL.A.returns), sd=sd(AAPL.A.returns))
yfit <- yfit*diff(aapl.hist1$mids[1:2])*length(AAPL.A.returns)
lines(xfit, yfit, col="red", lwd=2)

aapl.hist2 = hist(AAPL.G.returns, plot=F, breaks=30)
hist(AAPL.G.returns, main="Geometric", col="cornflowerblue",
     xlab="returns",
     breaks=aapl.hist2$breaks)
xfit<-seq(min(AAPL.G.returns), max(AAPL.G.returns), length=40)
yfit<-dnorm(xfit, mean=mean(AAPL.G.returns), sd=sd(AAPL.G.returns))
yfit<-dnorm(xfit, mean=0, sd=0.01)
yfit <- yfit*diff(aapl.hist2$mids[1:2])*length(AAPL.G.returns)
lines(xfit, yfit, col="red", lwd=2)
```

2. Praktinė dalis

Duomenų nuskaitymas iš failo. Keičiam dienos duomenis i savaitinius #imdami savaitės vidurkį.

1ž. Randama paskutinė savaitės diena

```
dd <- readxl::read_xlsx('data/data.xlsx') %>%
  mutate(wk = lubridate::week(ymd(Data)),
         yr = lubridate::year(ymd(Data)),
         Data_wk = paste0(yr, ' wk ', wk)) %>%
  select(-wk, -yr) %>%
  arrange(Data) %>%
  group_by(Data_wk) %>%
  mutate(last_day_wk = tail(Data, 1))
```

2ž. Skaičiuojamas savaitės akcijų kainų vidurkis

```
ddavg <- dd %>%
  summarise_at(vars(TEL1L:PZV1L), funs(round(mean(. , na.rm = T), 3))) %>%
  inner_join(dd %>%
  select(Data_wk, last_day_wk) %>%
  distinct(Data_wk, .keep_all = T), 'Data_wk') %>%
  arrange(last_day_wk) %>%
  select(-Data_wk) %>%
  mutate(last_day_wk = as.Date(last_day_wk))
```

Duomenis pasiverčiam į laiko eilutę

```
ts <- as.xts(ddavg %>% select(-last_day_wk), order.by = ddavg %>% pull(last_day_wk))
```

Vidutinės akcijų savaitinės grąžos

```
gg <- lapply(ts, function(x) dailyReturn(x, type="arithmetic")) %>%
  bind_rows() %>%
  as.data.frame
```

Vidutinės savaitinės akcijų grąžos %

```
rets <- gg %>%
  summarise_at(vars(TEL1L:PZV1L),
  funs(round(100*mean(. , na.rm = T), 2))) %>%
  gather(Akcija, Graza) %>%
  arrange(-Graza)
```

Akcijų dispersijos

```
vars <- ddavg %>%
  summarise_at(vars(TEL1L:PZV1L), funs(round(sd(. , na.rm = T), 2)^2)) %>%
  gather(Akcija, Dispersija) %>%
  arrange(-Dispersija)
```

```
sds <- ddavg %>%
```

```
  summarise_at(vars(TEL1L:PZV1L), funs(round(sd(. , na.rm = T), 2))) %>%
  gather(Akcija, Standartinis_nuokrypis) %>%
  arrange(- Standartinis_nuokrypis)
```

Koreliacija tarp akcijų grąžų

```
corrplot(cor(ddavg %>% select(-last_day_wk)), type = "upper", col = brewer.pal(n = 8, name = "RdYlBu"))
```

2.2. Minimalios rizikos portfelis

```
pf <- portfolio.spec(assets=colnames(gg))
```

2.2. Portfelio apribojimai

```
pf <- add.constraint(pf, type="full_investment") # Portfelio akcijų svorių suma lygi 1
pf <- add.constraint(pf, type="long_only") # Akcijų svoris neneigiamas #skaičius
```

2.2. Portfelio tikslas - rizikos įvertinimas

```
pf <- add.objective(pf, type="risk", name="StdDev")
```

```

# 2.2. Minimalios rizikos portfelio optimizavimas
rownames(gg) <- ddavg$last_day_wk
portf_risk <- optimize.portfolio(R = gg,
                                portfolio=pf,
                                optimize_method="ROI",search_size=20000,trace=T)

# 2.2. Vidutinis standartinis nuokrypis - rizika
portf_risk$opt_values$StdDev*100

# 2.2. Portfelio vidutinė grąža
Return.portfolio(gg,
weights=portf_risk$weights, verbose=TRUE)$returns %>%
mean*100

# 2.2. Sharpe rodiklis
SharpeRatio(
gg,
Rf = 0,
p = 0.95,
FUN = "StdDev",
weights = portf_risk$weights
)

# 2.2. Išsaugome svorius į failą 'data/weights_var.csv'
write.csv(data.frame(Akcija = names(portf_risk$weights), `Svoris` = rev(sort(100*portf_risk$weights))),
stringsAsFactors = F), 'data/weights_var.csv', row.names = F)

# 2.2. Minimalios rizikos portfelio efektyvumo frontas
chart.RiskReward(portf_risk, risk.col = "StdDev",
chart.assets = T, rp = T)

# 2.3. Maksimalios grąžos, duotai rizikai, portfelis
pf <- portfolio.spec(assets=colnames(gg))

# 2.3. Portfelio apribojimai
pf <- add.constraint(pf, type="full_investment")
pf <- add.constraint(pf, type="long_only")

# 2.3. Portfelio tikslas - grąžos įvertinimas, kai rizika apribota #minimalia reikšme
pf <- add.objective(pf, type="risk", name="StdDev", target = min(vars$Dispersija))
pf <- add.objective(pf, type = "return", name = "mean")

# 2.3. Maksimalios grąžos, duotai rizikai, portfelio optimizavimas
rownames(gg) <- ddavg$last_day_wk
portf_risk <- optimize.portfolio(R = gg,
                                portfolio=pf,
                                optimize_method="ROI",search_size=20000,trace=T)

# 2.3. Vidutinis standartinis nuokrypis - rizika
portf_risk$opt_values$StdDev*100

# 2.3. Portfelio vidutinė grąža
Return.portfolio(gg,
weights=portf_risk$weights, verbose=TRUE)$returns %>%
mean*100

# 2.3. Sharpe rodiklis
SharpeRatio(
gg,
Rf = 0,
p = 0.95,
FUN = "StdDev",
weights = portf_risk$weights
)

```



```

)

# 2.3. Išsaugome svorius į failą 'data/weights_return.csv'
write.csv(data.frame(Akcija = names(portf_risk$weights), `Svoris` = rev(sort(100*portf_risk$weights)),
                    stringsAsFactors = F), 'data/weights_return.csv', row.names = F)

# 2.3. Maksimalios grąžos duotai rizikai portfelio efektyvumo frontas
chart.RiskReward(portf_risk, risk.col = "StdDev",
                 chart.assets = T, rp = T)

# 2.4. Maksimalaus Sharpe koeficiento portfelis
sharp_max <- function(dis) {
  sharp <- NULL
  rf_asset <- rets %>% filter(Graza > 0) %>% arrange(Graza) %>% slice(1) %>% pull(Akcija)

  pf <- portfolio.spec(assets=colnames(gg))

# 2.4. Portfelio apribojimai
  pf <- add.constraint(pf, type="full_investment")
  pf <- add.constraint(pf, type="long_only")

  pf <- add.objective(pf, type="risk", name="StdDev", target = disp)
  pf <- add.objective(pf, type = "return", name = "mean")

# 2.4. Maksimalaus Sharpe koeficiento portfelio optimizavimas
  rownames(gg) <- ddavg$last_day_wk
  portf_risk <- optimize.portfolio(R = gg,
                                portfolio=pf,
                                optimize_method="ROI")
  ss <- unname(SharpeRatio(
    gg,
    Rf = gg %>% select(rf_asset),
    p = 0.95,
    FUN = "StdDev",
    weights = portf_risk$weights
  ))
  ss
}

sharp <- lapply(seq(0, 0.003, 0.0001), function(x) data.frame(StdDev = x, Sharp = sharp_max(x))) %>%
  bind_rows %>%
  filter(!is.na(Sharp))

# Sharpe koeficientas priklausomai nuo rizikos kitimo
ggplot(sharp, aes(x=StdDev, y=Sharp)) +
  geom_line()+
  scale_x_continuous(breaks = seq(0, 0.003, 0.0005)) +
  labs(x="Laikotarpis", y = "Sharpo koef.")+
  theme_minimal()

# Maksimalaus Sharpe koeficiento portfelio svoriai ir rodikliai apskaičiuoti naudojantis Excel programa.

```