VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Bakalauro darbas

Investicinio portfelio optimizavimas

Investment portfolio optimization

Justinas Minkevičius (bendradarbiaujant su Aivaru Bielskiu)

VILNIUS 2020

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas Doc., Dr. Andrius Grigutis
Darbo recenzentas _____

Darbas apgintas _____
Darbas įvertintas _____

Registravimo NR. _____
Atidavimo į katedrą data _____

Investicinio portfelio optimizavimas

Santrauka

Šiame darbe nagrinėjamas investicinio portfelio, kuris susideda iš n rizikingų aktyvų optimizavimas bei prie jų pridėjus vieną nerizikingą, pastovios grąžos aktyvą, optimizavimas. Taip pat šiame darbe yra analizuojama investicijų teorija, remiantis H. Markowitz ir Sharpe teorija, įrodomi maksimalaus pelno-rizikos ir minimalios dispersijos radimo teiginiai bei sudaromi ir palyginami optimalūs portfeliai remiantis istorinėmis aktyvų kainomis.

Raktiniai žodžiai: portfelio optimizavimas, H. Markowitz teorija, minimali dispersija, pelno-rizikos koeficientas, vienodų svorių portfelis.

Investment portfolio optimization

Abstract

This work analyses optimization of an investment portfolio, which consists of n risky assets, and the optimization of n risky assets plus one risk-free, which is fixed return asset. Work briefly introduces the theory of investment, Markowitz and Sharpe's works, proves Sharpe ratio and mean variance statements, and using proven statements forms portfolios that consists of real historical data and briefly compares formed portfolios.

Key words : portfolio optimization, H. Markowitz, minimal variance, Sharpe ratio, equal weights portfolio.

Turinys

1 Įvadas **3**

2 Investicinio portfelio optimizavimo teorinė dalis **4**
2.1 Investicinio portfelio optimizavimo teiginiai ir jų įrodymai . . 7

3 Investicinio portfelio optimizavimo praktiniai pavyzdžiai **14**
3.1 Lygių svorių, minimalios dispersijos ir maksimalaus pelnorizikos portfeliai 17

4 Išvados **21**

5 Literatūra **23**

1 Įvadas

Šis darbas yra tęsinys, kurį kartu rašėme su Aivaru Bielskiu 2018 m. Nuo to laiko darbas buvo atnaujintas bei patobulintas: sutvarkyta ir plačiau išanalizuota teorinė dalis, išsiaiškinta Markowitz portfelio optimizavimo esmė ir problema. Taip pat buvo naujai sudaryta praktinė dalis, pasirinkti kiti aktyvai ir naujausio laikotarpio duomenys bei įvertintas grįžtamasis ryšys.

Gerėjant gyvenimo lygiui ir augant asmeninėms pajamoms atsiranda vis didesnė galimybė ir noras investuoti. Mažiausia rizika ir didžiausias pelningumas – yra vieni pagrindinių visų racionalių investuotojų siekiai priimant investavimo sprendimus. Tinkamas investicinio portfelio pasirinkimas bei sudarymas gali vesti investuotojus prie didesnio pelno realizavimo. Investuotojams yra svarbu apsidrausti ir paskirstyti savo biudžetą sudarant investicinį portfelį, kad portfelis nenuvertėtų ekonomikos nuosmukio metu. Investuotojai yra suinteresuoti maksimizuoti gaunamą pelną, t.y. gauti kuo didesnę grąžą ir minimizuoti investicinio portfelio riziką, todėl nenuspėjamoje rinkoje portfelio diversifikavimas investuotojams suteikia daugiau tikrumo ir pasitikėjimo.

Portfelio optimizavimas vaidina svarbų vaidmenį nustatant investuotojų portfelio strategijas. Investuotojai tikisi pasiekti maksimalią grąža ir sumažinti riziką optimizuodami portfelį. Kadangi grąžos pokyčiai yra pagrįsti rizika, todėl investuotojai turi subalansuoti prieštaravimus tarp rizikos ir grąžos dėl savo investicijų. Taigi, nėra vieno optimizuoto portfelio, kuris tenkintų visus investuotojus. Todėl portfelio optimizavimo problema yra labai svarbi jau daugelį metų. Portfelio optimizavimo problema yra svarbi jau daugelį metų. Portfelio optimizavimas yra susijęs su optimalaus portfelio strategijos pasirinkimu, kuris leidžia išlaikyti pusiausvyrą tarp maksimalios investicijų grąžos ir kuo mažesnės investavimo rizikos [4]. Pagrindinė potfelio optimizavimo problema yra kaip išskirti investavimo riziką. Markowitz teorija būtent tai ir aprašo. Jis investicinę riziką matavo naudojant dispersiją.

Norint suprasti investicinio portfelio optimizavimą, reikia žinoti ne vien apie portfelio optimizavimą, bet suprasti ir investicinio portfelio dalis – vertybinius popierius, išanalizuoti jų rizikas, investuotojų grąžos lūkesčius, rinkas bei sektorius, į kuriuos investuojama. Teorinėje dalyje (žr. 2, 2.1 skyrius) vertinant investicinio portfelio optimalų pasirinkimą yra analizuojama H. Markowitz teorija, kuri padeda sudaryti optimalų portfelį. Praktinėje dalyje(žr. 3, 3.1 skyrius), remiantis teorinėje dalyje išanalizuota H. Markowitz ir W. Sharpe teorija, yra sudaromi optimalūs ir mažiausiai rizikos turintys investiciniai portfeliai.

Temos aktualumas. Ekonomikos augimas kasmet sudaro vis palankesnes sąlygas investavimui. Investuoti atsižvelgus tik į aktyvų kainas bei investuo-

ti aklai į augančius aktyvus nėra pats geriausias investuotojų pasirinkimas. Todėl yra itin svarbu išnagrinėti, kokį poveikį daro skirtingas investicinio portfelio sudarymas ir pasirinkimas.
Darbo tikslas. Įrodyti minimalios dispersijos portfelio ir maksimalaus pelno-rizikos koeficiento teiginius ir pagal juos sudaryti bei optimizuoti investicinį portfelį.
Darbo uždaviniai:
1. Išanalizavus mokslinę literatūrą išsiaiškinti ir pateikti teiginius apie minimalią dispersiją ir maksimalų pelno-rizikos koeficientą.
2. Minimizavus dispersiją ir maksimizavus pelno-rizikos koeficientą nustatyti tokių portfelių svorius.
3. Nustačius portfeliu svorius, įvertinti optimalius portfelius.
Taikyti metodai. Mokslinės literatūros analizė, sisteminimas bei statistiniai, matematinės algebros ir analizės metodai.

2 Investicinio portfelio optimizavimo teorinė dalis

Šiame skyriuje yra apibendrinama įvairių mokslininkų indėliai į moderniąją portfelio teoriją. Taip pat apibrėžiamos svarbiausios sąvokos ir analizuojama investicijų mokslo istorija.

Tam, kad geriau suprasti investicinio portfelio optimizavimo teoriją, reikia išanalizuoti portfelio bei jį sudarančių aktyvų grąžos, rizikos bei kitų kintamųjų sąvokas. Investicinis portfelis, tai įvairių aktyvų rinkinys, kuris yra valdomas kaip vienas bendras vienetas. Portfelio sudarymo principas suteikia investuotojui galimybę geriau valdyti riziką diversifikuojant portfelį, t.y. dalinti investuojamą sumą į dalis, kad portfelis nebūtų priklausomas nuo vieno aktyvo ir, kad būtų galima išvengti investuotos sumos nuvertėjimo.

Per pastaruosius kelis dešimtmečius buvo atrasti ir pasiūlyti metodai, kaip ir kokius sprendimus investuotojui reikėtų priimti. Kartu visi šie metodai yra vadinami moderniąja portfelio teorija (MPT), kurios pradininku yra laikomas nobelio premijos laureatas, Harry Markowitz [7], kuris 20 amžiaus viduryje pirmasis pradėjo žiūrėti ne tik į aktyvo grąžą, bet ir į jo riziką, kas paskatino šio, dar naujo, mokslo gimimą. Šis ekonomistas buvo pirmasis pradėjęs naudoti matematiką ir statistiką savo darbuose, kuriuose plačiai aprašė portfelio diversifikavimo procesą ir esmę. Modernaus portfelio teorija yra ieškojimas balanso tarp maksimalios grąžos ir minimalios rizikos [6]. Tai yra šiuolaikinės finansų teorijos etapas siekiant optimalaus portfelio kūrimo, turto paskirstymo, naudingumo maksimizavimo ir investicijų diversifikavimo

[1]. Portfelio investuotojai reaguoja į neapibrėžtumą investuojant pasirenkant tokius portfelius, kurie maksimaliai padidina pelną, jei reikia pasiekti nustatytą apskaičiuotos rizikos lygį arba, atitinkamai, sumažinti dispersiją, su sąlyga, kad gaunamas iš anksto numatytas tikėtinas pelno lygis [1]. Markowitz diversifikacijos idėja priklauso nuo to, ar didėjant portfelio aktyvų skaičiui, atitinkamas kintamųjų skaičius tampa žymiai didesnis nei aktyvų skaičius, todėl portfelio rizika labiau priklausys nuo aktyvų kovariacijos, o ne nuo kiekvieno aktyvo rizikos.

Portfelio optimizavimo esmė yra diversifikuoti portfelį taip, kad tikėtina grąža nesumažėtų, sumažinus riziką. MPT naudojami matematikos ir statistikos modeliai labai aiškiai demonstruoja, kaip įmanoma diversifikuoti investicinį portfelį. Optimizavimo procedūra nustato portfelį sudarančių aktyvų proporcijas pačiu efektyviausiu būdu, kad portfelis turėtų mažiausią pažeidžiamumą (riziką). Naudodamiesi šiuo analitiniu sprendimu, investuotojams lengva nustatyti procentus, kuriuos jie turėtų turėti kiekvienam pasirinktam rizikingam turtui [4].

Rizika – vienas iš svarbiausių investavimo nežinomųjų, kuris apibūdinamas kaip netikrumas dėl ateities ir, kuris gali daryti įtaką investicinio portfelio grąžai. Taigi investuotojai naudoja įvairius rizikos nustatymo rodiklius, kad galėtų įvertinti riziką, susijusią su investicijų grąžomis. H. Markowitz [7] riziką apibrėžė kaip grąžų variaciją apie vidurkį ir portfelio riziką matavo standartinio nuokrypio pagalba. Portfelio standartinį nuokrypį (riziką) žymėsime $\sigma_B > 0$, kuris apibrėžiamas formule

$$\sigma_B = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \mu_B)^2}, \tag{1}$$

čia σ_B - portfelio B standartinis nuokrypis, kitaip tariant rizikingumas, r_i - i-tojo aktyvo grąža, o μ_B - Portfelio B vidutinė grąža.

Tarkime turime n aktyvų, juos pažymėsime $A_1, A_2, ..., A_n$, jų grąžos yra apibrėžiamos pagal formulę

$$r = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \tag{2}$$

čia P_t žymi aktyvo kainą momentu t, o P_{t-1} momentu $t-1$. Skirtumas tarp t ir $t-1$ yra vienas periodas, kuris gali būti apibrėžtas dienomis, savaitėmis, mėnesiais, metais ar bet kokiu kitu laisvai pasirenkamu periodu.

Sakykime, kad investuotojas valdo turtą T eurų, taigi, sudarant naują portfelį investuotojas visą turtą paskirstys tam tikromis dalimis kiekvienam aktyvui. Portfelį pažymėkime B ir toliau apibrėšime tikėtiną investicinio

portfelio grąžos formulę

$$\mu_B = E(r_B) = \sum_{i=1}^{n} b_i E(r_i), \tag{3}$$

čia μ_B yra portfelio tikėtina grąža, b_i - investuota į aktyvą i proporcijos dalis, $E(r_i)$ tikėtina i-tojo aktyvo grąža.

H. Markowitz [7] riziką apibendrino kaip turimo portfelio grąžos dispersiją, kurią toliau analizavo kitas Nobelio premijos laureatas William Forsyth Sharpe [12].

Šarpo rodiklis, dar vadinamas pelno-rizikos koeficientu, dažnai naudojamas ieškoti koreguotos pagal riziką portfelio ar aktyvo grąžos [3]. Pelno-rizikos koeficientas yra apskaičiuojamas pagal formulę

$$S_B = \frac{\mu_B - r_f}{\sigma_B}, \tag{4}$$

čia μ_B portfelio generuojama grąža, r_f - nerizikingo aktyvo grąža, o σ_B - portfelio standartinis nuokrypis. Šis koeficientas investuotojams parodo, kokią grąžos dalį investuotojas gauna už papildomai prisiimtą riziką.

Labai svarbus investicinio portfelio optimizavimo procese yra ir efektyvumo frontas. Portfelis vadinsis efektyviu, jei neegzistuoja kitas už jį pranašesnis portfelis. Efektyvumo frontas yra efektyvių portfelių aibė, o portfeliai, kurie jai priklauso, vadinami efektyviai diversifikuotais [2]. Kitaip tariant, efektyvumo frontas yra optimalių portfelių rinkinys, siūlantis aukščiausią numatomą grąžą apibrėžtam rizikos lygiui arba žemiausią riziką tam tikrai numatomai grąžai [6]. Portfeliai, esantys žemiau efektyvumo ribos, nėra optimalūs, nes jie nesuteikia pakankamai grąžos tam tikrai rizikos lygiui. Portfeliai, kurie yra dešinėje virš efektyvumo ribos, yra taip pat neoptimalūs, nes jie kelia didesnę riziką nustatytai grąžai.

Viena didžiausių problemų, su kuria susiduria portfelio valdytojai, yra proporcijų paskirstymas savo turimam portfeliui. Šią problemą analizavo Arthur D. Roy [1]. Jis atsakė į klausimą, kad jeigu yra žinomi pirmi du grąžų momentai, kitaip tariant jų tikėtinos grąžos ir kovariacijų matrica, tai kokios aktyvų dalys maksimizuotų portfelio pelno-rizikos koeficientą? Toks portfelis, kurį aprašė D. Roy [1] vadiname Tangentiniu portfeliu, kuris yra dar apibrėžiamas kaip „liestinės“ portfelis, nes nubrėžę tiesę iš nerizikingos aktyvo grąžos gausime didžiausią pelno-rizikos koeficientą ir taip pat ši tiesė bus šio portfelio liestinė. Ši liestinė yra maksimalus pelno-rizikos koeficientas efektyvumo fronte, šiuo teiginiu bus remiamasi įrodant antrąjį teiginį (13).

Išanalizavus optimizavimo esmę, galima įrodyti portfelių minimalios dispersijos ir maksimalaus pelno-rizikos teiginius bei jais remiantis formuoti portfelius.

2.1 Investicinio portfelio optimizavimo teiginiai ir jų įrodymai

Visi žemiau pateikti įrodymai yra parengti remiantis E. Zivot ir M. Engels teorijos medžiagomis [5], [9].

Lema 1. *Sakykime, kad tam tikroje erdvės $\mathbb{R}^n$ srityje apibrėžta tam tikra funkcija $u = f(x_1, ..., x_n)$ turinti m sąlygų:*

$$y_1(x_1, ..., x_n) = 0, ..., \quad y_m(x_1, ..., x_n) = 0. \tag{5}$$

Taškas $a = (a_1, ..., a_n)$, tenkinantis (1) lygybes, vadinamas funkcijos f sąlyginio ekstremumo tašku, jeigu šio taško aplinkos taškuose $x \in \mathbb{R}^n$, tenkinamos (1) lygybės, $f(x) \geqslant f(a)$ arba $f(x) \leqslant f(a)$.
Sąlyginio ekstremumo radimo Lagranžo metodas:

1) Sudaroma pagalbinė funkcija

$$L(x) = f(x) + \lambda_1 y_1(x) + ... + \lambda_m y_m(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

su neapibrėžtais daugikliais $\lambda_1, ..., \lambda_m$.

2)Parašomos būtinos sąlyginio ekstremumo sąlygos:

$$L'_{x_1} = L'_{x_2} = ... = L'_{x_n} = L'_{\lambda_1} = ... = L'_{\lambda_m} = 0.$$

3) Surandami antro punkto sistemos sprendiniai - taškai, kuriuose funkcija L gali turėti ekstremumus.

4) Nustatomas funkcijos L antrojo diferencialo ženklas tuose taškuose, kai kintamųjų diferencialus $dx_1, ..., dx_n$ sieja formulės, gaunamos diferencijuojant (1) sąlygas.

Apibrėžimas 1. *Funkcija vadinama iškila aukštyn (žemyn) intervale (a;b), jeigu visi tos funkcijos taškai tame intervale yra po liestine (virš liestinės), nubrėžtos per bet kurį funkcijos tašką.*

Teiginys 1. *Tarkime $A_1, A_2, ..., A_n$ rizikingi aktyvai, t.y jų standartiniai nuokrypiai yra teigiami ($\sigma_{A_1}, \sigma_{A_2}, ..., \sigma_{A_n} > 0$), o portfelis $B = b_1A_1 + b_2A_2 + ... + b_nA_n$ sudarytas iš $A_1, A_2, ..., A_n$ su svoriais $b_1, b_2, ..., b_n$, $b_1 + b_2 + ... + b_n = 1$. Pažymėkime $\sigma_{ij} = cov(r_i, r_j)$, o*

$$\Sigma_{n\times n} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

yra kovariacijų matrica. Matrica $\Sigma^{-1}_{n\times n}$ *yra jos atvirkštinė. Portfelio B Dispersija*

$$\sigma_B^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + 2 \sum_{1\le i\le j\le n} cov(\sigma_i, \sigma_j)$$

yra minimali, kai Portfelio dalys $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *yra*

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{\Sigma^{-1}_{n\times n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}{(1,...,1)\Sigma^{-1}_{n\times n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}. \tag{7}$$

Įrodymas. Šiam teiginiui įrodyti reikia surasti, kada portfelio B dispersija yra mažiausia t.y.

$$\min \sigma^2_{B,b} = b_1^2\sigma_1^2 + b_2^2\sigma_2^2 + ... + b_n^2\sigma_n^2 + 2b_1b_2\sigma_{12} +$$
$$+2b_1b_3\sigma_{13} + 2b_1b_n\sigma_{1n} + ... + 2\sigma_{23} + 2b_nb_{n-1}\sigma_{nn-1},$$
$$kai \quad b_1 + b_2 + ... + b_n = 1.$$

Norint parodyti, su kokia reikšme dispersija pasieks minimumą naudosime Lagranžo metodą, kuris aprašytas lemoje. Funkcijos σ_B^2 su sąlyga $b_1 + b_2 + ... + b_n$ Lagranžo išraiška yra tokia:

$$L(b_1 + b_2 + ... + b_n, \lambda) = b_1^2\sigma_1^2 + b_2^2\sigma_2^2 + ... + b_n^2\sigma_n^2 + 2b_1b_2\sigma_{12} + 2b_1b_3\sigma_{13} +$$
$$+2b_1b_n\sigma_{1n} + \cdots + 2\sigma_{23} + 2b_nb_{n-1}\sigma_{nn-1} + \lambda(b_1 + b_2 + ... + b_n - 1).$$

Iš apibrėžimo matome, kad $\sigma^2_{B,b}$ yra iškila žemyn, todėl egzistuoja vienintelis ekstremumas, kuris ir bus funkcijos minimumas. Toliau yra užrašoma Lagranžo pirmos eilės sąlygos, t.y. išvestinės pagal kiekvieną nežinomąjį, kurios yra:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial L}{\partial b_1} = 2b_1\sigma_1^2 + 2b_2\sigma_{12} + 2b_3\sigma_{13} + 2b_n\sigma_{1n} + \lambda \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial b_2} = 2b_2\sigma_2^2 + 2b_1\sigma_{12} + 2b_3\sigma_{23} + 2b_n\sigma_{2n} + \lambda \\ : \\ : \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = b_1 + b_2 + ... + b_n - 1 \end{cases}. \tag{8}$$

Šių išvestinių lygčių sistema (8) duoda n tiesinių lygčių su n nežinomųjų. Šios lygčių sistemos gali būti išspręstos ieškant globalaus minimumo dispersijos portfelio svoriams $b_1, ..., b_n$. Lygčių sistema (8) gali būti išreikšta matricų pavidalu:

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{12} & 2\sigma_2^2 & \dots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ 2\sigma_{1n} & 2\sigma_{2n} & \dots & 2\sigma_{nn}^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

(9) Visą tai galima užrašyti trumpiau:

$$\begin{pmatrix} \Sigma & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}, kai$$

$$\Sigma = \Sigma_{n \times n} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1}^T = (1, 1, ..., 1)$$

Ir dar trumpiau: $A_b z_b = b$, kai

$$\begin{pmatrix} \Sigma & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{pmatrix} = A_b, \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \lambda \end{pmatrix} = z_b \quad ir \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

Abi lygybės $A_b z_b = b$ puses padauginus iš A_b^{-1} , gauname $z_m = A_b^{-1} b$.
Tada pradinę lygčių sistemą (8) ieškant minimalaus portfelio svorių, galima išreikšti ir tokiomis lygybėmis:

$$\begin{cases} \mathbf{0}_{n\times 1} = \frac{\partial L}{\partial b} = 2\Sigma \mathbf{b} + \lambda \mathbf{1} \\ \mathbf{0}_{1\times 1} = \frac{\partial L}{\partial b} = \mathbf{b}^T \mathbf{1} - 1 \end{cases} . \tag{10}$$

Naudodami pirmąją sistemos (10) lygtį $\mathbf{0}_{n\times 1}$, randame $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\lambda \Sigma^{-1} \mathbf{1} \tag{11}$$

Padauginę (11) abi puses iš $\mathbf{1}^T$ ir naudodami antrąją sistemos (10) lygtį $\mathbf{0}_{1\times 1}$, randame λ:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^T \mathbf{b} &= -\frac{1}{2}\lambda \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} \\ \Rightarrow \lambda &= -2\frac{1}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \end{aligned} \tag{12}$$

Galiausiai gautą λ įstatome į pirmąją sistemos (10) lygtį $\mathbf{0}_{n\times 1}$ ir gauname, kad

$$\mathbf{b} = -\frac{1}{2}(-2)\frac{1}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \Sigma^{-1} \mathbf{1} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}.$$

□

Teiginys 2. *Tarkime $A_1, A_2, ..., A_n$ rizikingi aktyvai, t.y jų standartiniai nuokrypiai yra teigiami ($\sigma_{A_1}, \sigma_{A_2}, ..., \sigma_{A_n} > 0$), o portfelis $B = b_1 A_1 + b_2 A_2 + ... + b_n A_n$ sudarytas iš $b_1, b_2, ..., b_n$. Pažymėkime $\sigma_{ij} = cov(r_i, r_j)$, o $\Sigma_{n\times n}$ (6) yra kovariacijų matrica. Matrica $\Sigma_{n\times n}^{-1}$ yra jos atvirkštinė. Portfelio pelno-rizikos koeficientas (angl. Sharpe ratio) [12]:*

$$S_B = \frac{Er_b - r_f}{\sigma_B}$$

yra maksimalus, kai jo svoriai $b_1, ..., b_n$ yra

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{\Sigma_{n\times n}^{-1} \begin{pmatrix} Er_1 - r_f \\ Er_2 - r_f \\ \vdots \\ Er_n - r_f \end{pmatrix}}{(1, ..., 1)\Sigma_{n\times n}^{-1} \begin{pmatrix} Er_1 - r_f \\ Er_2 - r_f \\ \vdots \\ Er_n - r_f \end{pmatrix}}. \tag{13}$$

Įrodymas. Įrodant šį teiginį yra remiamasi jau anksčiau aprašytais efektyvumo frontu ir tangentiniu portfeliu. Tarkime $\mu_b^T\mathbf{b} = \mu_A$ ir $\mathbf{1}^T\mathbf{b} = 1$. Reikia rasti minimumą funkcijai $\mathbf{b}^T\Sigma\mathbf{b}$ su sąlyga, kad $\mathbf{A}^T\mathbf{b} = \mathbf{D}$, čia

$$\mathbf{A} = (\mu_b\mathbf{1}) \quad ir \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mu_A \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Taikydami Lagranžo metodą, tokiu pačiu principu kaip pirmojo teiginio įrodyme, gauname

$$\begin{cases} \mathbf{0}_{n\times 1} = \frac{\partial L}{\partial b} = 2\Sigma\mathbf{b} + \mathbf{A}\lambda_0 \\ \mathbf{0}_{1\times 1} = \frac{\partial L}{\partial b} = \mathbf{A}^T\mathbf{b} - \mathbf{D}. \end{cases} \tag{14}$$

Pažymime, kad $\lambda = -\frac{1}{2}\lambda_0$, tada (14) pirmąją lygtį $\mathbf{0}_{n\times 1}$ galime išreikšti per $\mathbf{b}$, taip:

$$2\Sigma\mathbf{b} + \mathbf{A}\lambda_0 = 2\Sigma\mathbf{b} - 2\mathbf{A}\lambda \Rightarrow \mathbf{b} = \Sigma^{-1}\mathbf{A}\lambda. \tag{15}$$

Abi (15) lygybės puses padauginus iš $\mathbf{A}^T$ gauname:

$$\mathbf{A}^T\Sigma^{-1}\mathbf{A}\lambda = \mathbf{D}.$$

Dabar pažymime $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T\Sigma^{-1}\mathbf{A}$, čia $\mathbf{C}$ yra simetrinė, nes $\mathbf{C}^T = (\mathbf{A}^T\Sigma^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T(\Sigma^{-1})^T\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\Sigma^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{C}$, dabar galima C parašyti kaip matricą tokiu pavidalu:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}, \tag{16}$$

o šios matricos (16) atvirkštinė būtų:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{xz - y^2}\begin{pmatrix} z & -y \\ -y & x \end{pmatrix} \tag{17}$$

Ir iš (17) gauname, kad

$$\mathbf{b}^T\Sigma^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \tag{18}$$

Kai mūsų kintamieji x, y ir z yra tokie

$$\begin{cases} x = \mu_b^T\Sigma^{-1}\mu_b \\ y = \mu_b^T\Sigma^{-1}\mathbf{1} \\ z = \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1} \end{cases} \tag{19}$$

Tada grįžtame atgal į lygybę (11)$\Rightarrow\sigma^2$: $\sigma_b^2 = \mathbf{b}^T\Sigma\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\Sigma\Sigma^{-1}\mathbf{A}\lambda = \mathbf{b}^T\mathbf{A}\lambda = (\mathbf{A}^T\mathbf{b})^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{D}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}$, tada σ_b^2 ir $\mathbf{b}_{EF}$ galima išreikšti tokiais pavidalais:

$$\sigma_A^2 = (\mu_A 1)\frac{1}{xz - y^2}\begin{pmatrix} z & -y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_A \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{xz - y^2}(z\mu_A^2 - 2y\mu + x). \tag{20}$$

$$\mathbf{b}_{EF} = \Sigma^{-1}\mathbf{A}\lambda = \Sigma^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D} = \frac{z\mu_A - y}{xz - y^2}\Sigma^{-1}\mu + \frac{x - y\mu_A}{xz - y^2}\Sigma^{-1}\mathbf{1} =$$

$$= \frac{1}{xz - y^2}\Sigma^{-1}((x\mathbf{1} - y\mu) + (z\mu - y\mathbf{1}\mu_A). \tag{21}$$

Tangentinio portfelio pelno-rizikos koeficientas (Šarpo rodiklis) yra didžiausias [3]. Naudodamiesi standartiniu nuokrypiu, kurį gavome iš efektyvumo fronto (20), turime tangentinio portfelio kampą:

$$\frac{\triangle\sigma_A}{\triangle\mu_A} = \frac{\sqrt{\frac{1}{xz-y^2}(z\mu_A^2 - 2y\mu + x)} - 0}{\mu_{tg} - 0}. \tag{22}$$

Kampas, kuris yra efektyvumo fronto tangentiniame taške, (22) yra jo išvestinė:

$$\frac{\partial\sigma_A}{\partial\mu_A} = \frac{1}{2}(\frac{1}{xz - y^2}(z\mu_A^2 - 2y\mu_A + x))^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{xz - y^2(2z\mu_A - 2y)},$$

šioje vietoje pakeičiame

$$\mu_A = \mu_{tg}$$

ir gauname išvestinę

$$\frac{z\mu_{tg} - y}{(xz - y^2)\sqrt{\frac{1}{xz-y^2}(\mu_{tg} - 2y\mu_{tg} + x)}},$$

kampai turi būti vienodi

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{xz-y^2}(z\mu_{tg}^2 - 2y\mu_{tg} + x)}}{\mu_{tg}} = \frac{z\mu_{tg} - y}{(xz - y^2)\sqrt{\frac{1}{xz-y^2}(\mu_{tg} - 2y\mu_{tg} + x)}}. \tag{23}$$

Lygybę (23) padauginę iš abiejų lygybės pusių daliklių gauname

$$(xz-y^2)(\frac{1}{xz - y^2}(z\mu^{2_{tg}} - 2y\mu_{tg} + x)) = z\mu_{tg}^2 - y\mu_{tg} \Rightarrow 2y\mu_{tg} - y\mu_{tg} = x \Rightarrow \mu_{tg} = \frac{x}{y}.$$

Gautą μ_{tg} įstatome į standartinį nuokrytį σ_A (20) ir gauname

$$\sigma_{tg} = \sqrt{\frac{1}{xz - y^2}(z\frac{x^2}{y^2} - 2y\frac{x}{y} + x} = \sqrt{\frac{x(xz - y^2)}{y^2(xz - y^2)}} = \frac{\sqrt{y}}{x},$$

dabar gautą μ_{tg} įstatome į b_{EF} (21) ir randame maksimalaus pelno-rizikos portfelį

$$b_{tg} = \frac{z\frac{x}{y} - y}{xz - y^2}\Sigma^{-1}\mu_b + \frac{x - y\frac{x}{y}}{xz - y^2}\Sigma^{-1}\mathbf{1} = \frac{1}{y}\Sigma^{-1}\mu,$$

grįžtame prie to, kad $y = \mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}$ ir žinodami, kad:

$$\mu_b = \begin{pmatrix} Er_1 - r_f \\ Er_2 - r_f \\ \vdots \\ Er_n - r_f \end{pmatrix},$$

gauname

$$\mathbf{b} = \frac{\Sigma^{-1}\mu_b}{\mu_{b^T}\Sigma^{-1}\mathbf{1}} = \frac{\Sigma^{-1}\mu_b}{\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mu_b}$$

□

3 Investicinio portfelio optimizavimo praktiniai pavyzdžiai

Šiame skyriuje bus pristatyta praktinė anksčiau įrodytų teiginių (žr. 2, 2.1 skyrius), pirmojo ir antrojo interpretacija. Tyrimui paimti penki skirtingi aktyvai: Amazon (AMZN), Domino's Pizza (DPZ), Netflix (NFX), Nvidia (NVDA) ir Facebook (FB). Šių penkių aktyvų dieninės uždarymo kainos imamos nuo 2014-01-01 iki 2018-12-31 [8] ir skaičiuojamos jų grąžos naudojantis grąžos formule

$$R = \frac{B_t - B_{t-1}}{B_{t-1}} \quad ,$$

čia

- (B_t) Investicijos vertė periodo pabaigoje
- (B_{t-1}) Investicijos vertė periodo pradžioje

Žemiau pateiktoje 1 – oje lentelėje yra pateikiamos aktyvų uždarymo kainos. Kitoje lentelėje yra pateikiamos aktyvų grąžos (žr. 2 lentelę)

	AMZN	DPZ	NFLX	NVDA	FB
2014-01-02	397.97	64.58	51.83	15.01	54.71
2014-01-03	396.44	64.62	51.84	14.83	54.56
2014-01-06	393.63	64.73	51.37	15.03	57.2
...	...	...	...	...	...
2018-12-27	1461.64	245.47	255.57	130.58	134.52
2018-12-28	1478.02	246.93	256.08	133.05	133.2
2018-12-31	1501.97	244.99	267.66	132.90	131.09

1 lentelė: Aktyvų uždarymo kainos

	AMZN	DPZ	NFLX	NVDA	FB
2014-01-03	-0.38%	0.06%	0.08%	-1.20%	-0.27%
2014-01-06	-0.71%	0.17%	-0.97%	1.34%	4.84%
2014-01-07	1.12%	0.82%	-5.58%	1.64%	1.26%
...	...	...	...	...	...
2018-12-27	-0.63%	-0.18%	0.75%	-1.45%	0.25%
2018-12-28	1.12%	0.60%	0.20%	1.89%	-0.98%
2018-12-31	1.62%	-0.78%	4.52%	-0.11%	-1.58%

2 lentelė: Aktyvų grąžos

Remiantis 2 lentele toliau skaičiuojame kiekvieno aktyvo tikėtiną metinę grąžą, tai padarysime paskaičiavę viso laikotarpio dieninių grąžų vidurkį ir padauginę jį iš 252 (vidutinis aktyvais prekiaujamų dienų skaičiaus per metus) μ_{B_N}. Taip pat paskaičiuosime standartinį nuokrypį σ_{B_N}, norint gauti metinį rodiklį, reikia gauta rezultatą padauginti iš 252 šaknies. Šie skaičiavimai atliekami formulių (1) ir (3) pagalba.

Žemiau pateiktose lentelėse pateikiami dviejų laikotarpių duomenys. Pirmo laikotarpio (nuo 2014-01-01 iki 2018-12-31) duomenys bus naudojami portfelių svoriams rasti. Antrame laikotarpyje (2019-01-01 iki 2020-01-01) patikrinsime grįžtamąjį ryšį.

	AMZN	DPZ	NFLX	NVDA	FB
μ_{B_N} (2014-2018)	31.88%	29.46%	42.08%	52.09%	22.70%
σ_{B_N} (2014-2018)	30.99%	25.01%	43.03%	40.26%	29.94%
μ_{B_N} (2019-2020)	23.35%	22.04%	26.88%	65.39%	48.71%
σ_{B_N} (2019-2020)	22.78%	28.53%	34.62%	40.56%	27.68%

3 lentelė: Aktyvų tikėtinos metinės grąžos ir standartiniai nuokrypiai

Vidurkis ir standartinis nuokrypis skaičiuojami Microsoft (MS) Excel funkcijų "AVERAGE" ir "STDEV.P" pagalba.

Gavus tikėtinas metines aktyvų grąžas ir standartinius nuokrypius (žr. 3 lentelė). Toliau skaičiuojama koreliacija tarp visų aktyvų. Koreliacija skaičiuojama pagal formulę:

$$\rho_{B_x B_y} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_{x_i})(y_i - \mu_{y_i})}{\sigma_{B_x}\sigma_{B_y}}.$$

Žemiau pateikiama koreliacijų matrica

	AMZN	DPZ	NFLX	NVDA	FB
AMZN	1	0.314	0.446	0.361	0.540
DPZ	0.314	1	0.265	0.238	0.279
NFLX	0.446	0.265	1	0.320	0.393
NVDA	0.361	0.238	0.320	1	0.352
FB	0.540	0.279	0.393	0.352	1

4 lentelė: Aktyvų koreliacijos matrica

Aktyvų tarpusavio koreliacijos apskaičiuojamos MS Excel "CORREL" pagalba.

Apskaičiavus visus reikalingus parametrus, dabar galima apskaičiuoti visų aktyvų kovariacijas. Jos skaičiuojamos pagal formulę

$$\sigma_{B_x B_y} = \sigma_{B_x} \sigma_{B_y} \rho_{B_x B_y}.$$

Tolimesniems skaičiavimams reikia apskaičiuoti kovariacijų matricos atvirkštinę matricą Σ^{-1}, ji skaičiuojama MS Excel "COVARIANCE.P" funkcijos pagalba, kovariacijų matrica atrodys taip

	AMZN	DPZ	NFLX	NVDA	FB
AMZN	0.00038	0.00009	0.00023	0.00017	0.00019
DPZ	0.00009	0.00024	0.00011	0.00009	0.00008
NFLX	0.00023	0.00011	0.00073	0.00022	0.00020
NVDA	0.00017	0.00009	0.00022	0.00064	0.00016
FB	0.00019	0.00008	0.00020	0.00016	0.00035

5 lentelė: Kovariacijų matrica

Atvirkštinė kovariacijų matrica atrodys taip (žr. 6 lentelę). Jai rasti buvo panaudota MS Excel "MINVERSE" funkcija.

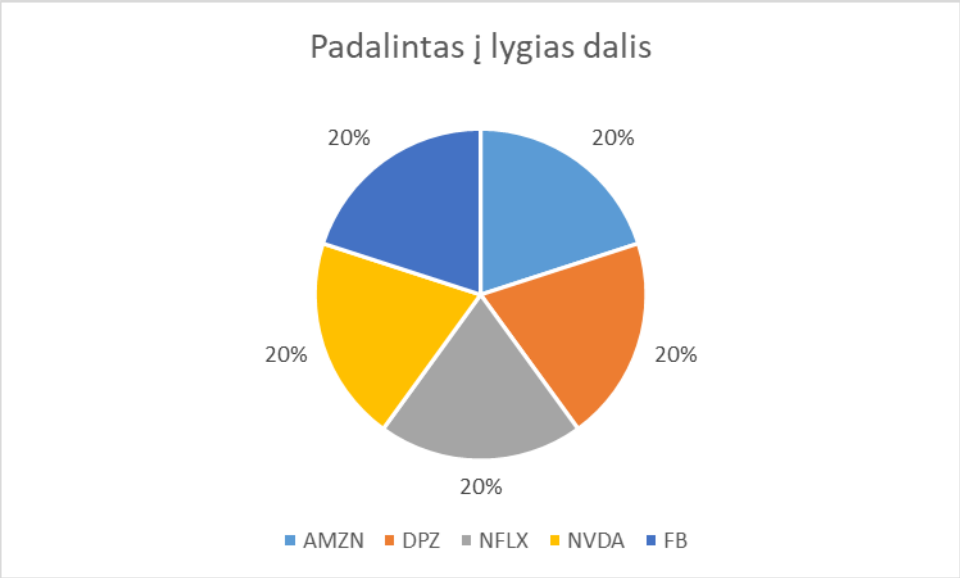
	AMZN	DPZ	NFLX	NVDA	FB
AMZN	4275.92	-631.76	-696.66	-425.74	-1648.61
DPZ	-631.76	4668.76	-313.77	-298.95	-414.82
NFLX	-696.66	-313.77	1836.39	-270.98	-446.52
NVDA	-425.74	-298.95	-270.98	1927.71	-451.41
FB	-1648.61	-414.82	-446.52	-451.41	4295.72

6 lentelė: Atvirkštinė kovariacijų matrica

3.1 Lygių svorių, minimalios dispersijos ir maksimalaus pelno-rizikos portfeliai

Sudaryti investicinius portfelius galima įvairiais būdais. Tačiau norint optimizuoti juos, reikia žinoti kaip būtų naudingiausia tai padaryti. Todėl šioje dalyje bus sudaroma ir analizuojama lygių svorių, maksimalios grąžos bei minimalios rizikos portfeliai.

Vienas iš paprasčiausių strategijų yra sudaryti aktyvų portfelį lygiomis dalimis (žr. 1 pav.). Minimalios dispersijos portfelis yra vertybinių popierių



1 pav.: Lygių dalių portfelis

rinkinys, kuris yra derinamas siekiant sumažinti viso portfelio kainų nepastovumą. Žemiau pateikiami šio portfelio pirmo laikotarpio rezultatai.

	Grąža (μ_{B_N})	Dispersija (σ_{B_N})	Šarpo rodiklis
Portfelis A	35.64%	0.338	1.053

7 lentelė: Lygių dalių portfelio rezultatai

Norint išrinkti mažiausiai rizikingą, bet atnešantį bent minimalios grąžos portfelį, domintų tik aktyvų kainos, jų grąžos ir aktyvų rizikingumas, kuris, kaip jau anksčiau buvo apibrėžta, yra standartinis nuokrypis. Remiantis įrodytu pirmu teiginiu (7) ir atliktais skaičiavimais dabar galima modeliuoti

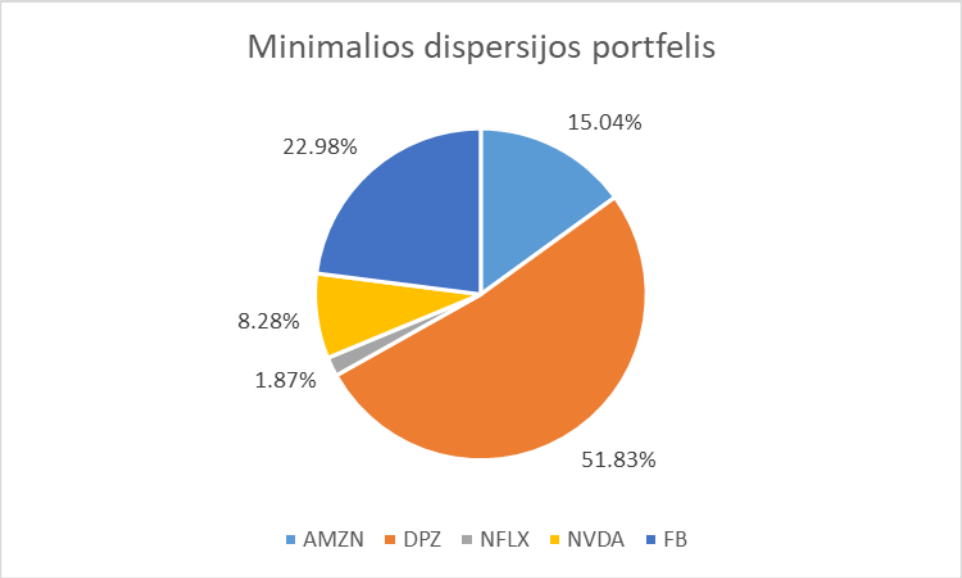
optimalų portfelį pagal H. Markowitz [7] pateiktą minimalios dispersijos metodą portfeliui, kuris sudarytas iš anksčiau apibrėžtų penkių rizikingų aktyvų

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \frac{\Sigma^{-1}_{n\times n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(1,1,1,1,1)\Sigma^{-1}_{n_x n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Atlikus veiksmus gauname, kad svoriai optimaliam portfeliui su parinktais aktyvais yra

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1504 \\ 0.5183 \\ 0.0187 \\ 0.0828 \\ 0.2298 \end{pmatrix}.$$

Šiuo atveju norint išvengti rizikos, tačiau iš to ir uždirbti, viskas investuojama į portfelį, kuris turi mažiausią riziką ir neturi neigiamos vidutinės grąžos (žr. 2 pav.).



2 pav.: Minimalios dispersijos portfelis

8-toje lentelėje matomi šio portfelio pirmo laikotarpio rezultatai.

	Grąža (μ_{B_N})	Dispersija (σ_{B_N})	Šarpo rodiklis
Portfelis B	30.38%	0.286	1.061

8 lentelė: Minimalios dispersijos portfelio rezultatai

Remiantis įrodytu antru teiginiu (13) ir teigiant, kad nerizikingas aktyvas, į kurį investuojama r_f yra 2%, t.y. 0.02, galima suskaičiuoti optimalų pelnorizikos portfelį, sudarytą iš anksčiau apibrėžtų aktyvų:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \frac{\Sigma^{-1}_{n_x n} \begin{pmatrix} 0.299 \\ 0.275 \\ 0.401 \\ 0.501 \\ 0.207 \end{pmatrix}}{(1,1,1,1,1,)\Sigma^{-1}_{n_x n} \begin{pmatrix} 0.299 \\ 0.275 \\ 0.401 \\ 0.501 \\ 0.207 \end{pmatrix}}.$$

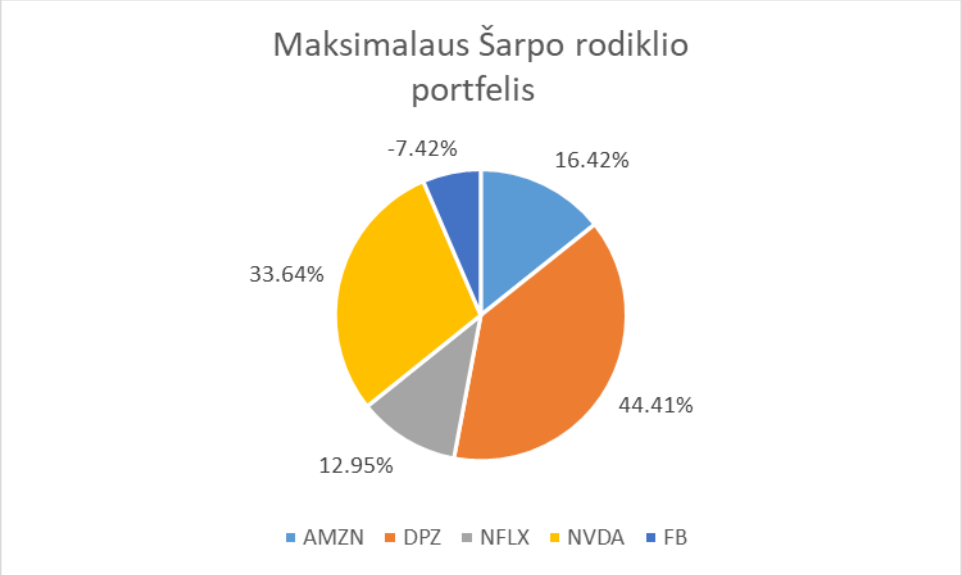
Atlikus veiksmus gauname, kad svoriai, pagal kuriuos reikėtų investuoti į

kiekvieną aktyvą, yra:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1642 \\ 0.4441 \\ 0.1295 \\ 0.3364 \\ -0.0742 \end{pmatrix}.$$

Matome, kad svoriai yra ne vien teigiami, bet ir neigiami. Kuomet svoriai yra neigiami, vadinasi vyksta trumpa prekyba (angl. short sale) – skolintų akcijų pardavimas, tikintis akcijų kainos kritimo [6]. Tokios akcijos yra pasiskolinamos ir parduodamos dabartiniu metu, o po kurio laiko yra atperkamos ir grąžinamos [2].

Norint sudaryti portfelį, kuris atneštų didžiausią grąžą, tam yra svarbios istorinės kiekvieno aktyvo kainos ir grąžos. Todėl maksimalus pelno-rizikos portfelis yra sudarytas investuotant į didžiausią grąžos ir rizikos santykį turinčius aktyvus (žr. 3 pav.). Portfelio rezultatai matomi 9-toje lentelėje.



3 pav.: Maksimalaus Šarpo rodiklio portfelis

	Grąža (μ_{B_N})	Dispersija (σ_{B_N})	Šarpo rodiklis
Portfelis C	39.61%	0.331	1.197

9 lentelė: Maksimalaus Šarpo rodiklio portfelio rezultatai

4 Išvados

Viso tyrimo esmė - praktiškai pritaikyti Markowitz modelį, jog būtų sudarytas optimalus portfelis, apimantis vertybinius popierius, kuriais buvo prekiaujama 2014-2020 m. akcijų rinkoje. Buvo išsiaiškinta, kad investuoti į portfelius yra geriau nei investuoti atskirai į akcijas. Investuodami į efektyvius portfelius, investuotojai gali gauti maksimalią investicijų grąžą, atsižvelgiant į maksimalų pelno-rizikos koeficientą ir minimalią riziką. Tai yra Markowitz teorijos diversifikavimo esmė, atsižvelgti į turto kovariaciją ir koreliaciją. Taigi, investuotojai, žinodami, kaip tinkamai pritaikyti Markowitz modelius, gali pagerinti savo investavimo rezultatus.

10 – toje ir 11-toje lentelėje pateikiami pirmo ir antro laikotarpio portfelių rezultatai ir sandara. Jie pateikiami tokia tvarka, A - Lygių dalių portfelis, B - Minimalios dispersijos portfelis ir C - Maksimalaus pelno-rizikos portfelis. Šie portfeliai yra tokie:

	AMZN	DPZ	NFLX	NVDA	FB
A	20%	20%	20%	20%	20%
B	15.04%	51.83%	1.87%	8.28%	22.98%
C	16.42%	44.41%	12.95%	33.64%	-7.42%

10 lentelė: Galutiniai portfelių svoriai

O portfelių gauti rezultatai abiejų laikotarpių metu yra:

	2014-2018			2019-2020		
	μ_{B_N}	σ_{B_N}	Šarpo rodiklis	μ_{B_N}	σ_{B_N}	Šarpo rodiklis
Portfelis A	35.64%	0.338	1.053	37.27%	0.308	1.209
Portfelis B	30.38%	0.286	1.061	32.05%	0.286	1.121
Portfelis C	39.61%	0.331	1.197	35.48%	0.325	1.092

11 lentelė: Galutiniai portfelių svoriai

Suformavus skirtingus portfelius, galima matyti, jog pirmuoju laikotarpiu geriausiai pasirodė maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfelis (C), kuris turi didžiausią rizikos ir grąžos santykį. Vienodų svorių portfelis (A) taip pat yra geras variantas investuoti, jis mažai atsilieka nuo C portfelio. Nors minimalios rizikos portfelis (B) pirmuoju laikotarpiu pasirodė prasčiausiai, bet reikia nepamiršti, kad norit investuoti nerizikingai, toks portfelis yra gera taktika. Antrajame laikotarpyje portfelio B pelno-rizikos koeficientas aplenkė C portfelį, o rizika išliko tokia pati kaip ir pirmuoju laikotarpiu.

Apibendrinus galima teigti, kad pasirenkant portfelį su vienodais svoriais, gauname ne ką prastesnį rezultatą nei optimizuotų portfelių.

5 Literatūra

[1] A. D. Roy. Safety first and the holding of assets, University of Cambridge, 1952, p. 431-439.

[2] A. Grigutis. Portfeliai sudaryti iš rizikingų aktyvų, 2018, p. 1-16.

[3] A. Kourtis. The Sharpe ratio of estimated efficient portfolios, Finance Research Letters, 2016, Elsevier, vol. 17(C), p. 72-78.

[4] B. Li, Y. Sun, G. Aw, K. L. Teo. Uncertain portfolio optimi-zation problem under a minimax risk measure, Applied Mathematical Modelling, 2019, vol. 76, p. 274-281.

[5] E. Zivot. Portfolio Theory with Matrix Algebra, University of Washington, 2013, p. 1-37.

[6] G. West. An introduction to Modern Portfolio Theory: Marko-witz, CAP-M, APT and Black-Litterman, Financial Modelling Agency, 2006, p. 1-28.

[7] H. M. Markowitz. Portfolio Selection, The Journal of Finance, 1952, p. 77-91.

[8] Istorinės aktyvų kainos, https://finance.yahoo.com

[9] M. Engels. Portfolio Optimization: Beyond Markowitz, Master's Thesis, 2004, p. 5-18.

[10] P. L. Leung, H. Y. Ng, W. K. Wong. An improved estima-tion to make Markowitz's portfolio optimization theory users friendly and estimation accurate with application on the US stock market in-vestment, European Journal of Operational Research, 2012, Elsevier, vol. 222(1), p. 85-95.

[11] R. Campbell, R. Huisman, R. Koedijk. Optimal portfolio selection in a value-at-risk framework, J. Bank. Finance, 25 (9), 2001, p. 1789-1804.

[12] W. J. Sharpe. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk, Journal of Finance, 1964, Vol. 19, No. 3. p. 425-442.