VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS BAKALAURO STUDIJŲ PROGRAMA

Edvinas Goldštein

RYMANO ξ-FUNKCIJOS LOGARITMINĖS IŠVESTINĖS REALIOS DALIES ĮVERČIAI KRITINĖJE JUOSTOJE

BOUNDS FOR THE REAL PART OF THE LOGARITHMIC DERIVATIVE OF THE RIEMANN ξ-FUNCTION IN THE CRITICAL STRIP

Bakalauro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti...

Darbo vadovas **Doc., Dr. Andrius Grigutis**

____

(data)

Vilnius

2020

Rymano ξ-funkcijos logaritminės išvestinės realios dalies įverčiai kritinėje juostoje

Santrauka

Šiame darbe nagrinėjama Rymano Xi funkcijos logaritminės išvestinės realioji dalis srityje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, kai $t \to \infty$. Nustatomi apatinis ir viršutinis įverčiai funkcijai $\mathbb{R}\mathrm{e} \sum_{\rho} \frac{1}{s-\rho}$, kur sumuojami $\zeta(s)$ nuliai, esantys tiesėje $s = 1/2 + it$. Taip pat, nagrinėjami atvejai, kai $\mathbb{R}\mathrm{e} \frac{\xi'}{\xi}(s) > 0$ ir Rymano hipotezė nepasitvirtina trimis skirtingais scenarijais.

Raktiniai žodžiai : Rymano Xi funkcija, Rymano Dzeta funkcija, logaritminė išvestinė, realios dalies įverčiai.

Bounds for the real part of the logarithmic derivative of the Riemann $\xi-$function in the critical strip

Abstract

In this work, we examine real part of logarithmic derivative of Riemann Xi function for $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ when $t \to \infty$. We set upper and lower bounds for $\mathbb{R}\mathrm{e} \sum_{\rho} \frac{1}{s-\rho}$ where the sum runs over the zeros of $\zeta(s)$ on the line $s = 1/2 + it$. We also investigate scenarios of $\mathbb{R}\mathrm{e} \frac{\xi'}{\xi}(s) > 0$ when Riemann hypothesis fails by three different cases.

Key words : Riemann Xi function, Riemann Zeta function, logarithmic derivative, bounds of the real part.

Turinys

1 Įvadas

Pirminių skaičių pasiskirstymas yra vienas iš sunkiausių matematinių uždavinių, kuris sprendžiamas iki šiol. Euleris [3] sugebėjo padaryti proveržį pirminių tyrime, atrasdamas ryšį tarp Rymano $\zeta(s)$ funkcijos, kuri užrašoma harmoninės eilutės pavidalu

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ čia } s = \sigma + it, \ \sigma > 1$$

ir pirminių skaičių

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \tag{1}$$

čia p žymi pirminius skaičius. Pagal lygybę (1) galime pamatyti, kad ζ-funkcija negali būti lygi nuliui, kai $\mathbb{R}\mathrm{e}(s) > 1$ (kadangi kiekvienas sandaugos narys artės į 1 iš viršaus, kai p^{-s} didės). Taip pat, žinoma

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s), \tag{2}$$

čia

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} \mathrm{d}x, \ \mathbb{R}\mathrm{e}(s) > 0.$$

Iš funkcinės lygties (2) galima pastebėti, kad $\zeta(s)$ funkcija įgis nulius, kai $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0$, o tai bus, su kiekvienu neigiamu lyginiu sveikuoju skaičiumi s. Teigiamiems lyginiams sveikiesiems skaičiams, $\zeta(s)$ reikšmė nebus lygi nuliui, kadangi $\Gamma(1-s)$ bus paprastas polius. Visi šie funkcijos nuliai, esantys $\mathbb{R}\mathrm{e}(s) < 0$, vadinami *trivialiais*. Nulių išsidėstymas srityje $0 < \sigma < 1$, kuri vadinama *kritine juosta*, nėra žinomas, tačiau Rymano hipotezė teigia, kad $\zeta(s)$ funkcijos nuliai, esantys kritinėje juostoje yra ant linijos $s = 1/2 + it$, vadinama *kritine tiese*. Darbo metu tiriama Rymano ξ-funkcija, apibrėžta kompleksiniams skaičiams $s = \sigma + it$,

$$\xi(s) = \frac{s}{2}(s-1)\pi^{s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$

kur $\zeta(s)$ žymi Rymano ζ-funkciją. Šios funkcijos nagrinėjimo svarba kyla iš to, kad tiek Rymano $\zeta(s)$, tiek $\xi(s)$ funkcijos turi tuos pačius nulius kritinės juostos srityje. Rymano Xi funkcija taip pat tenkina sąryšį

$$\xi(s) = \xi(1-s),$$

kuris lemia funkcijos simetriją tiesės $\mathbb{R}\mathrm{e}(s) = 1/2$ atžvilgiu. ξ-funkcija taip pat tenkina lygybę $\overline{\xi(s)} = \xi(\bar{s})$, todėl jei taškas $s_1 = \beta + i\gamma$ yra $\xi(s)$ nulis kritinėje juostoje, tai tuomet taškai $s_2 = \beta - i\gamma$, $s_3 = 1 - (\beta + i\gamma)$ ir $s_4 = 1 - (\beta - i\gamma)$ taip pat bus ξ-funkcijos nuliai. Be to, šią funkciją galima perrašyti kaip begalinę sandaugą, pavidalu

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) = \frac{1}{2} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

čia ρ žymi visų netrivialių $\zeta(s)$ funkcijos nulių junginių poras didėjant pagal menamąją dalį. Tuomet ξ funkcijos logaritminė išvestinė bus lygi

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = \sum_{\rho} \frac{1}{s - \rho},$$

čia taip pat sumuojamos junginių poros pagal didėjančią menamąją dalį. Taip pat, yra žinoma, kad (žiūrėti Hinkkanen [6])

$$\mathbb{R}\mathrm{e}\, \frac{\xi'}{\xi}(s) > 0, \text{ kai}\, \mathbb{R}\mathrm{e}(s) > 1 \tag{3}$$

ir Rymano hipotezės teisingumas yra ekvivalentus sąlygai

$$\mathbb{R}\mathrm{e}\, \frac{\xi'}{\xi}(s) > 0, \text{ kai}\, \mathbb{R}\mathrm{e}(s) > \frac{1}{2}.$$

Tyrinėjant $\mathbb{R}\mathrm{e}\, \frac{\xi'}{\xi}(s)$, Lagarias [7] įrodė, kad nagrinėjamos funkcijos infimumas įgyjamas realios dalies tiesėje, kuomet $\sigma > 10$. Šis rezultatas vėliau buvo patobulintas su $\sigma > 1$ (žiūrėti Garunkštis [4]).

Šiame darbe nagrinėjama Rymano ξ funkcijos logaritminė išvestinė, norint praplėsti nelygybe (3) pažymėtą teigiamos srities plotą ir priartėti prie sąlygos $\mathbb{R}\mathrm{e}(s) > \frac{1}{2}$ kaip įmanoma arti. Šiuo metu žinomas rezultatas apie $\mathbb{R}\mathrm{e}(\frac{\xi'}{\xi}(s))$ teigiamumo sritį yra pateiktas Teorema 1.1 ir Lema 1.2. Darbo tikslas yra praplėsti teigiamumo sritį, kuri nurodyta Teorema 1.1.

Teorema 1.1 (Matiyasevich, Saidak ir Zvengrowski). *ξ-funkcijos modulis yra didėjantis pagal kiekvieną horizontalią tiesę, einančią per atvirą dešinės pusės pusplokštumę, kurioje nėra ξ-funkcijos nulių. Panašiai, modulis yra mažėjantis pagal kiekvieną horizontalią tiesę, einančią per atvirą kairės pusės pusploktštumę.*

Įrodymas. Žiūrėti Matiyasevich, Saidak ir Zvengrowski [10] □

Lema 1.2. *Tarkime, f yra holomorfinė funkcija atviroje apibrėžimo srityje ir neidentiška nuliui. Tarkime, kad $\mathbb{R}\mathrm{e}(f'(s)/f(s)) < 0$ kiekvienam $s \in D$ tokiam, kad $f(s) \neq 0$. Tuomet $|f(s)|$ yra griežtai mažėjanti priklausomai nuo $\sigma \in D$, t.y., kiekvienam tokiam $s_0 \in D$ egzistuoja toks $\delta > 0$ toks, kad $|f(s)|$ yra griežtai mažėjanti priklausomai nuo σ intervale tarp $s_0 - \delta$ ir $s_0 + \delta$.*

Atvirkščiai, jei $|f(s)|$ yra mažėjanti priklausomai nuo $\sigma \in D$, tuomet $\mathbb{R}\mathrm{e}(f'(s)/f(s) \leq 0$ kiekvienam $s \in D$ tokiems, kad $f(s) \neq 0$.

Įrodymas. Žiūrėti Matiyasevich, Saidak ir Zvengrowski [10] □

Taikant integravimą dalimis, darbe nustatytas apatinis ir viršutinis rėžiai srityje $1/2 < \sigma < 1$, kai $t \to \infty$ ξ-funkcijos realios dalies logaritminei išvestinei, sumuojant $\zeta(s)$ nulius, esančius tiesėje $= 1/2 + it$. Gautas apatinis įvertis tvirtina, kad $\mathbb{R}\mathrm{e}(f'(s)/f(s)$ išlieka teigiama, asimptotiškai arti kritinės tiesės, nepaisant galimo netrivialių nulių egzistavimo aplink kritinę tiesę. Skyriuje 2.3 nagrinėjami atvejai, kai Rymano hipotezė nepasitvirtina, t.y. egzistuoja netrivialieji nuliai ne ant kritinės tiesės ir tiriamas teigiamos srities plotas.

Sekančioje teoremoje pateikta pagrindinė gauto įverčio formuluotė.

Teorema 1.3. *Tarkime, kad $1/2 < \sigma < 1$, o $a = \sigma - 1/2$. Taip pat, tarkime, kad c žymi dalį $\zeta(s)$ funkcijos nulių, esančių ant tiesės $s = 1/2 + it$, o*

$$A(t) = -4.408 + \pi \log(0.358t) \cdot \frac{\sqrt{(a^2 + 0.25)}}{2\sqrt{2}a} - 0.34 \log(t),$$
$$B(t) = \frac{\pi - a}{a} + \log\left(\frac{t+1}{2\pi}\right) + \frac{4.008 + 0.34 \log(t)}{a^2}.$$

Tuomet

$$\frac{2ac}{a^2 + 0.25} \cdot A(t) < \mathbb{R}\mathrm{e} \sum_{\rho = 1/2 + i\gamma} \frac{1}{s - \rho} < 2ac \cdot B(t),$$

kai $t \to \infty$.

Pastaba: F-jos $A(t)$ ir $B(t)$ yra negriežtai augančios $\log t$ greičiu, kai $t \to \infty$.

Teoremos įrodymas pateiktas praktinės dalies skyriuje.

2 Rymano Xi funkcijos vertinimas

2.1 Pagalbiniai teiginiai

Lema 2.1 (Sumavimas dalimis). *Tarkime* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *yra kompleksinių skaičių seka ir f(u) yra tolydžiai diferencijuojama funkcija intervale* $[1, x]$. *Jei* $A(u) = \sum_{n \le u} a_n$, *tuomet*

$$\sum_{n \le x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(u)f'(u)\mathrm{d}u.$$

Įrodymas. Žiūrėti Murty [8] □

Lema 2.2. *Tarkime N(t) yra funkcijos ζ(s) nulių skaičius stačiakampyje* $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$. *Jei* $T \ge e$, *tuomet*

$$\left| N(T) - \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} - \frac{7}{8} \right| \le 0.17 \log T + 1.998 + \frac{25}{48\pi T}.$$

Įrodymas. Žiūrėti Trugdian [9] □

Lema 2.3. *Tarkime* $t > 1$, *tuomet*

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t} < \arctan t < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2t}$$

Įrodymas. Vertinant iš apačios, turime

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_t^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} < \arctan t + \int_t^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \arctan t + \frac{1}{t},$$

tuomet, vertinant iš viršaus

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_t^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} > \arctan t + \int_t^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x^2} = \arctan t + \frac{1}{2t}.$$

□

Lema 2.4. *Tarkime, kad* $a^2 < 2bx$, *kur* $a \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, b, $x > 0$, *tuomet*

$$(b-x)^2 < \frac{(b^2-x^2)^2}{a^2+b^2+x^2} < 2(b-x)^2.$$

Įrodymas. Vertinant iš viršaus, turime

$$\frac{(b^2-x^2)^2}{a^2+b^2+x^2} = (b-x)^2 \frac{(b+x)^2}{a^2+b^2+x^2} < (b-x)^2 \frac{b^2+2bx+x^2}{b^2+x^2} = (b-x)^2(1 + \frac{2bx}{b^2+x^2})$$
$$< (b-x)^2(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}) < 2 \cdot (b-x)^2.$$

Tuomet, vertinant iš apačios

$$\frac{(b^2-x^2)^2}{a^2+b^2+x^2} = (b-x)^2\frac{(b+x)^2}{a^2+b^2+x^2} = (b-x)^2\frac{b^2+2bx+x^2}{a^2+b^2+x^2} > 1\cdot(b-x)^2.$$

□

Lema 2.5. *Tarkime, kad $a = \sigma - 1/2$, kai $1/2 < \sigma < 1$, $b > 0$, $k > 0$ bei $a^2 < 2bk$. Tuomet*

$$\sum_{k>0}\frac{2a}{a^2+0.25+2(b-k)^2} < \sum_{k>0}\left(\frac{a}{a^2+(b-k)^2}+\frac{a}{a^2+(b+k)^2}\right) < \sum_{k>0}\frac{2a}{a^2+(b-k)^2} \tag{4}$$

Įrodymas. Pirmiausia, perrašius nelygybės (4) vidurinį nelygybės narį pavidalu gauname

$$\sum_{k>0}(\frac{a}{a^2+(b-k)^2}+\frac{a}{a^2+(b+k)^2}) = \sum_{k>0}\frac{a^3+a(b+k)^2+a^3+a(b-k)^2}{(a^2+(b-k)^2)(a^2+(b+k)^2)} =$$

$$\sum_{k>0}\frac{2a^3+ab^2+2ac^2+2abc-2abc}{a^4+2a^2b^2+b^4+k^4-2b^2c^2} = \sum_{k>0}\frac{2a(a^2+b^2+k^2)}{a^2(a^2+b^2+k^2)+a^2(b^2+k^2)+(b^2-k^2)^2} =$$

$$\sum_{k>0}\frac{2a}{\frac{a^2(a^2+b^2+k^2)}{a^2+b^2+k^2}+\frac{a^2(b^2+k^2)}{a^2+b^2+k^2}+\frac{(b^2-k^2)^2}{a^2+b^2+k^2}} = \sum_{k>0}\frac{2a}{a^2+\frac{a^2(b^2+k^2)}{a^2+b^2+k^2}+\frac{(b^2-k^2)^2}{a^2+b^2+k^2}},$$

tuomet vardiklyje gautą koeficientą $\frac{a^2(b^2+k^2)}{a^2+b^2+k^2}$ galime palyginti iš abiejų pusių. Kadangi $a = \sigma - 1/2$, kur $1/2 < \sigma < 1$, tai $a^2 \in (0, \frac{1}{4})$ bei

$$0 < \frac{a^2(b^2+k^2)}{(a^2+b^2+k^2)} < \frac{1}{4}, \text{ atitinkamai, kai } b^2+k^2 \to 0 \text{ ir } b^2+k^2 \to \infty,$$

tuomet turėsime

$$\sum_{k>0}\frac{2a}{a^2+0.25+\frac{(b^2-k^2)^2}{a^2+b^2+k^2}} < \sum_{k>0}(\frac{a}{a^2+(b-k)^2}+\frac{a}{a^2+(b+k)^2}) < \sum_{k>0}\frac{2a}{a^2+\frac{(b^2-k^2)^2}{a^2+b^2+k^2}},$$

pasinaudojus Lema 2.4 ir įvertinus $\frac{(b^2-k^2)^2}{a^2+b^2+k^2}$ iš abiejų pusių, gauname nelygybes

$$\sum_{k>0}\frac{2a}{a^2+0.25+\frac{(b^2-k^2)^2}{a^2+b^2+k^2}} > \sum_{k>0}\frac{2a}{a^2+0.25+2(b-k)^2}$$

ir

$$\sum_{k>0}\frac{2a}{a^2+\frac{(b^2-k^2)^2}{a^2+b^2+k^2}} < \sum_{k>0}\frac{2a}{a^2+(b-k)^2}.$$

□

Lema 2.6. *Tarkime, kad a, t yra fiksuoti ir $a, t > 0$. Tuomet*

$$\int_t^\infty \frac{2a}{a^2+(t-x)^2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{(\pi t\sqrt{b})/\sqrt{a}+\log\left(\frac{t^2}{a}\right)}{2(a+bt^2)}.$$

Įrodymas.

$$\int_t^\infty \frac{1}{a+b(t-x)^2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_t^\infty \frac{1}{(a+b(t-x)^2)(t-t+x)}\mathrm{d}x$$
$$= -\int_t^\infty \frac{1}{(a+b(t-x)^2)(t-t+x)}\mathrm{d}(t-x)$$
$$= -\int_t^\infty \left(\frac{bt+b(t-x)}{b(t-x)^2(a+bt^2)+a(a+bt^2)}+\frac{1}{t(a+bt^2)-(t-x)(a+bt^2)}\right)\mathrm{d}(t-x).$$

Toliau integralą išskaidysime į tris mažesnius ir nagrinėkime kiekvieną iš jų

$$1) -\int_t^\infty \frac{bt}{b(t-x)^2(a+bt^2)+a(a+bt^2)}\mathrm{d}(t-x) = \int_t^\infty \frac{-bt}{a(a+bt^2)\left(\frac{b(t-x)^2}{a}+1\right)}\mathrm{d}(t-x)$$
$$= \frac{-bt}{a(a+bt^2)}\int_t^\infty \frac{1}{\frac{b(t-x)^2}{a}+1}\mathrm{d}(t-x)$$
$$= \frac{-bt}{a(a+bt^2)}\sqrt{\frac{a}{b}}\int_t^\infty \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}(t-x)\right)^2+1}\mathrm{d}\left((t-x)\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = -\left.\frac{\sqrt{b}t\arctan\frac{\sqrt{b}(t-x)}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a}(a+bt^2)}\right|_t^\infty,$$

$$2) -\int_t^\infty \frac{bu}{b(t-x)^2(a+bt^2)+a(a+bt^2)}\mathrm{d}(t-x) = \left.\frac{-\log\left(a+b(t-x)^2\right)}{2(a+bt^2)}\right|_t^\infty,$$

$$3) -\int_t^\infty \frac{1}{t(a+bt^2)-(t-x)(a+bt^2)}\mathrm{d}(t-x) = \frac{-1}{(a+bt^2)}\int_t^\infty \frac{1}{t-(t-x)}\mathrm{d}(t-x)$$
$$= \left.\frac{\log x}{a+bt^2}\right|_t^\infty,$$

todėl,

$$\int_t^\infty \frac{1}{a+b(t-x)^2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \left.\frac{\log\left(\frac{x^2}{a+b(t-x)^2}\right)+\left(2\sqrt{b}t\arctan\frac{\sqrt{b}(x-t)}{\sqrt{a}}\right)/\sqrt{a}}{2(a+bt^2)}\right|_t^\infty$$
$$= \frac{(\pi t\sqrt{b})/\sqrt{a}+\log\left(\frac{t^2}{a}\right)}{2(a+bt^2)}.$$

□

Lema 2.7. *Tarkime, kad t fiksuotas ir $t > 0$, tuomet*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\log(x)+(t-x)\log(x-t)}{(t-x)} = 0.$$

Įrodymas. Patikrinkime ribą iš viršaus

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\log(x) + (t-x)\log(x-t)}{(t-x)} < \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(x^x \cdot x^{(t-x)}\right)}{(t-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(x^t\right)}{(t-x)}.$$

Kadangi turime ribas formatu $\frac{\infty}{\infty}$, galime taikyti l'Hospitalio taisyklę

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(x^t\right)}{(t-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{t}{x} \cdot \frac{1}{(t-x)^2} = 0.$$

Patikrinkime ribą iš apačios

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\log(x) + (t-x)\log(x-t)}{(t-x)} > \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left((x-t)^{(x-t)} \cdot (x-t)^{(t-x)}\right)}{(t-x)}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\log(1)}{(t-x)} = 0.$$

□

Lema 2.8. *Tarkime a, γ_1 fiksuoti ir $a, \gamma_1 > 0$, tuomet*

$$\int_{\gamma_1}^{\infty} \log\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{2a}{a^2 + (t-x)^2} \mathrm{d}x < 2\pi + 2a \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right) \log(t+1) - \log(2\pi) - 1\right],$$

Įrodymas.

$$\int_{\gamma_1}^{\infty} \log\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{2a}{a^2 + (t-x)^2} \mathrm{d}x = \int_{\gamma_1}^{t+1} \log\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{2a}{a^2 + (t-x)^2} \mathrm{d}x +$$
$$\int_{t+1}^{\infty} \log\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{2a}{a^2 + (t-x)^2} \mathrm{d}x := A + B,$$
$$A = \int_{\gamma_1}^{t+1} \log\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{2a}{a^2 + (t-x)^2} \mathrm{d}x < \log\left(\frac{t+1}{2\pi}\right) \int_{\gamma_1}^{t+1} \frac{2a}{a^2 + (t-x)^2} \mathrm{d}x =$$
$$= \log\left(\frac{t+1}{2\pi}\right) \left[2\arctan\left(\frac{1}{a}\right) + 2\arctan\left(\frac{t-\gamma_1}{a}\right)\right] < 2\pi - 2a.$$

Skaičiuojant antrąjį narį B, taikoma Lemą 2.7

$$\begin{aligned}
&B = \int_{t+1}^{\infty} \log\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{2a}{a^2 + (t-x)^2} \mathrm{d}x < \int_{t+1}^{\infty} \log\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{2a}{(t-x)^2} \mathrm{d}x = \\
&2a \cdot \frac{(t-x)\log(x-t) + t(-\log(2\pi)) + x\log(x)}{t(t-x)} \Bigg|_{t+1}^{\infty} = \\
&= 2a \cdot \left[0 - \frac{(-1)\log(1) + t(-\log(2\pi)) + (t+1)\log(t+1)}{t(-1)}\right] \\
&= 2a \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)\log(t+1) - \log(2\pi)\right].
\end{aligned}$$

□

Lema 2.9. *Tarkime* $a, \gamma_1 > 0$ *bei* $t > \gamma_1$. *Tuomet*

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_1}^{\infty} \log\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{2a}{a^2 + 0.25 + 2(t-x)^2} \mathrm{d}x > \log\left(\frac{\gamma_1 t}{(2\pi)^2}\right) \cdot \frac{a\pi}{\sqrt{2(a^2+0.25)}} \\
&- \log\left(\frac{\gamma_1}{2\pi}\right) \cdot \frac{a}{t - \gamma_1}
\end{aligned}$$

Įrodymas. Iš apačios vertinam pritaikius Lemą 2.3

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_1}^{\infty} \log\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{2a}{a^2 + 0.25 + 2(t-x)^2} \mathrm{d}x = \int_{\gamma_1}^{t} \log\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{2a}{a^2 + 0.25 + 2(t-x)^2} \mathrm{d}x + \\
&\int_{t}^{\infty} \log\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{2a}{a^2 + 0.25 + 2(t-x)^2} \mathrm{d}x := A^{low} + B^{low}.
\end{aligned}$$

Vertiname A^{low} narį pritaikius Lemą 2.3

$$\begin{aligned}
&A^{low} : \int_{\gamma_1}^{t} \log\left(\frac{x}{2\pi}\right) \frac{2a}{a^2 + 0.25 + 2(t-x)^2} \mathrm{d}x > \log\left(\frac{\gamma_1}{2\pi}\right) \int_{\gamma_1}^{t} \frac{2a}{a^2 + 0.25 + 2(t-x)^2} \mathrm{d}x \\
&= \log\left(\frac{\gamma_1}{2\pi}\right) \cdot 2a \frac{-\arctan\left(2(t-x)/\sqrt{2(a^2+0.25)}\right)}{\sqrt{2(a^2+0.25)}} \Bigg|_{\gamma_1}^{t} \\
&> \log\left(\frac{\gamma_1}{2\pi}\right) \cdot \left[\frac{2a}{\sqrt{2(a^2+0.25)}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2(a^2+0.25)}}{2(t-\gamma_1)}\right)\right] \\
&= \log\left(\frac{\gamma_1}{2\pi}\right) \cdot \frac{a\pi}{\sqrt{2(a^2+0.25)}} - \log\left(\frac{\gamma_1}{2\pi}\right) \cdot \frac{a}{t - \gamma_1}.
\end{aligned}$$

Vertinant antrąjį B^{low} narį

$$B^{low}: \int_t^\infty \log\left(\frac{x}{2\pi}\right)\frac{2a}{a^2+0.25+c+dx^2}\mathrm{d}x > \log\left(\frac{t}{2\pi}\right)\int_t^\infty \frac{2a}{a^2+0.25+c+dx^2}\mathrm{d}x$$
$$= \log\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cdot 2a\frac{-\arctan\left(2(t-x)/\sqrt{2(a^2+0.25)}\right)}{\sqrt{2(a^2+0.25)}}\Big|_t^\infty$$
$$> \log\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cdot 2a\left[\frac{\pi/2}{\sqrt{2(a^2+0.25)}}\right] = \log\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cdot\frac{a\pi}{\sqrt{2(a^2+0.25)}}.$$

□

Lema 2.10. *Tarkime $a>0$, o $\gamma_1 = 14.134725...$, kai $\zeta(1/2+i\gamma_1)=0$.. Be to, u žymi netrivialių nulių $\rho=\beta+i\gamma$ menamąsias dalis funkcijos $\zeta(s)$, tuomet*

$$\sum_{\gamma>0}\frac{2a}{a^2+(t-\gamma)^2} < 2\pi + 2a\left[(1+\frac{1}{t})\log(t+1)-\log(2\pi)-1\right]+$$
$$\frac{2a}{a^2}\cdot\left(4.008+0.34\log(t)+\frac{0.17}{t}\right)+0.17a\left(\frac{\pi t/a-\log(t^2/a^2)}{a^2+t^2}\right)$$

Įrodymas. Pritaikius tiriamai sumai Lemą 2.1, turime

$$\sum_{\gamma>0}\frac{2a}{a^2+(t-\gamma)^2} = -\int_{\gamma_1}^\infty N(u)f'(u)\mathrm{d}u,$$

čia $f(u)=\frac{2a}{a^2+(t-u)^2}$ bei $N(u)$ žymi laiptinę funkciją iš Lemos 2.2 su atitinkamomis reikšmėmis viršutiniam ir apatiniam įverčiui:

$$N_{up}(u) = \frac{u}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi e}+0.17\log u+2.873+\frac{25}{48\pi u},$$
$$N_{low}(u) = \frac{u}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi e}-0.17\log u-1.123-\frac{25}{48\pi u}.$$

Atsižvelgiant į $f(u)$ išvestines, kur $f'(u)\geq 0$, jei $u\leq t$ ir $f'(u)<0$, jei $u>t$ bei $N_{low}(u)$ ir $N_{up}(u)$ esant tolydžioms funkcijoms, turime

$$\sum_{u>0}\frac{2a}{a^2+(t-u)^2} \leq -\int_{\gamma_1}^t N_{low}(u)f'(u)\mathrm{d}u - \int_t^\infty N_{up}(u)f'(u)\mathrm{d}u$$
$$= -\int_{\gamma_1}^\infty \frac{u}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi e}f'(u)\mathrm{d}u + \int_{\gamma_1}^t\left(0.17\log u+1.123+\frac{25}{48\pi u}\right)f'(u)\mathrm{d}u$$
$$-\int_t^\infty\left(0.17\log u+2.873+\frac{25}{48\pi u}\right)f'(u)\mathrm{d}u := A_1^{up}+A_2^{up}+A_3^{up}.$$

Vertinam narį A_1^{up} iš viršaus

$$A_1^{up} = -\int_{\gamma_1}^{\infty} \frac{u}{2\pi}\log\left(\frac{u}{2\pi e}\right)f'(u)\mathrm{d}u = \frac{\gamma_1}{2\pi}\log\left(\frac{\gamma_1}{2\pi e}\right)f(\gamma_1) + \int_{\gamma_1}^{\infty}\frac{\log\frac{u}{2\pi}}{2\pi}f(u)\mathrm{d}u,$$

kur paskutinis integralas vertinamas pagal Lemą 2.8, todėl

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma_1}{2\pi}\log\left(\frac{\gamma_1}{2\pi e}\right)f(\gamma_1) + \int_{\gamma_1}^{\infty}\frac{\log\frac{u}{2\pi}}{2\pi}f(u)\mathrm{d}u\\
&< \frac{\gamma_1}{2\pi}\log\left(\frac{\gamma_1}{2\pi e}\right)\frac{2a}{a^2+(t-\gamma_1)^2} + 2\pi + 2a\left[(1+\frac{1}{t})\log(t+1) - \log(2\pi) - 1\right].
\end{aligned}$$

Vertinam narį A_2^{up} iš viršaus

$$\begin{aligned}
A_2^{up} &= \int_{\gamma_1}^{t}\left(0.17\log u + 1.123 + \frac{25}{48\pi u}\right)f'(u)\mathrm{d}u\\
&< (f(t) - f(\gamma_1))\left(0.17\log(t) + 1.123 + \frac{25}{48\pi\gamma_1}\right)\\
&= \left(\frac{2a}{a^2} - \frac{2a}{a^2+(t-\gamma_1)^2}\right)\left(0.17\log(t) + 1.123 + \frac{25}{48\pi\gamma_1}\right).
\end{aligned}$$

Vertinam narį A_3^{up} iš viršaus, taikant Lemą 2.6

$$\begin{aligned}
A_3^{up} &= -\int_{t}^{\infty}\left(0.17\log u + 2.873 + \frac{25}{48\pi u}\right)f'(u)\mathrm{d}u\\
&< \left(2.873 + \frac{25}{48\pi t}\right)f(t) - 0.17\int_{t}^{\infty}\log(t)f'(u)\mathrm{d}u\\
&= \left(2.873 + \frac{25}{48\pi t}\right)f(t) + 0.17\left[f(t)\log(t) + \int_{t}^{\infty}\frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u\right]\\
&< \left(2.873 + \frac{25}{48\pi t}\right)\frac{2a}{a^2} + 0.17\left[\frac{2a}{a^2}\log(t) + \frac{\pi t - a\log(t^2/a^2)}{a^2+t^2}\right].
\end{aligned}$$

□

Lema 2.11. *Tarkime $a > 0$, o $\gamma_1 = 14.134725...$, kur $\zeta(1/2 + i\gamma_1) = 0$. Be to, γ žymi netrivialių nulių $\rho = \beta + i\gamma$ menamąsias dalis funkcijos $\zeta(s)$, tuomet*

$$
\begin{aligned}
\sum_{\gamma>0} \frac{2a}{a^2+0.25+2(t-\gamma)^2} &> -0.43 \cdot \frac{2a}{a^2+0.25+2(t-\gamma_1)^2} \\
&+ \log(0.358t) \cdot \frac{a\pi}{\sqrt{2(a^2+0.25)}} - \log\left(\frac{\gamma_1}{2\pi}\right) \cdot \frac{a}{t-\gamma_1} \\
&- \frac{2a}{a^2+0.25}\left(4.008 + 0.34\log(t) + \frac{0.17}{t}\right) \\
&- 0.17a\left(\frac{\pi t\sqrt{2}/(\sqrt{a^2+0.25}) - \log(t^2/(a^2+0.25))}{2t^2+a^2+0.25}\right)
\end{aligned}
$$

Įrodymas. Pritaikius tiriamai sumai Lemą 2.1, turime

$$
\sum_{\gamma>0} \frac{2a}{a^2+0.25+2(t-\gamma)^2} = -\int_{\gamma_1}^{\infty} N(u)f'(u)\mathrm{d}u,
$$

kai $f(u) = \frac{2a}{a^2+(t-u)^2}$ bei $N(u)$ žymi laiptinę funkciją iš Lemos 2.2 su atitinkamomis reikšmėmis viršutiniam ir apatiniam įverčiui:

$$
\begin{aligned}
N_{up}(u) &= \frac{u}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi e} + 0.17\log u + 2.873 + \frac{25}{48\pi u}, \\
N_{low}(u) &= \frac{u}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi e} - 0.17\log u - 1.123 - \frac{25}{48\pi u}.
\end{aligned}
$$

Atsižvelgiant į $f(u)$ išvestines, kai $f'(u) \geq 0$, jei $u \leq t$ ir $f'(u) < 0$, jei $u > t$ bei $N_{low}(u)$ ir $N_{up}(u)$ esant tolydžioms funkcijoms, turime

$$
\begin{aligned}
&\sum_{u>0} \frac{2a}{a^2+0.25+2(t-u)^2} \geq -\int_{\gamma_1}^{t} N_{up}(u)f'(u)\mathrm{d}u - \int_{t}^{\infty} N_{low}(u)f'(u)\mathrm{d}u \\
&= -\int_{\gamma_1}^{\infty} \frac{u}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi e}f'(u)\mathrm{d}u + \int_{t}^{\infty}(0.17\log u + 1.123 + \frac{25}{48\pi u})f'(u)\mathrm{d}u \\
&- \int_{\gamma_1}^{t}(0.17\log u + 2.873 + \frac{25}{48\pi u})f'(u)\mathrm{d}u := A_1^{low} + A_2^{low} + A_3^{low}
\end{aligned}
$$

Vertinam narį A_1^{low} iš apačios

$$
A_1^{low} = -\int_{\gamma_1}^{\infty} \frac{u}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi e}f'(u)\mathrm{d}u = \frac{\gamma_1}{(2\pi)}\log\frac{\gamma_1}{2\pi e}f(\gamma_1) + \int_{\gamma_1}^{\infty}\frac{\log\frac{u}{2\pi}}{2\pi}f(u)\mathrm{d}u,
$$

čia paskutinis integralas vertinamas pagal Lemą 2.9, todėl

$$\frac{\gamma_1}{(2\pi)} \log \frac{\gamma_1}{2\pi e} f(\gamma_1) + \int_{\gamma_1}^{\infty} \frac{\log \frac{u}{2\pi}}{2\pi} f(u) \mathrm{d}u$$
$$> \frac{\gamma_1}{(2\pi)} \log \frac{\gamma_1}{2\pi e} \cdot \frac{2a}{a^2 + 0.25 + 2(t-\gamma_1)^2} + \log\left(\frac{\gamma_1 t}{(2\pi)^2}\right) \cdot \frac{a\pi}{\sqrt{2(a^2+0.25)}}$$
$$- \log\left(\frac{\gamma_1}{2\pi}\right) \cdot \frac{a}{t-\gamma_1}.$$

Vertinam narį A_2^{low} iš apačios, taikant Lemą 2.6

$$A_2^{low} = \int_t^{\infty} (0.17 \log u + 1.123 + \frac{25}{48\pi u}) f'(u) \mathrm{d}u > -(1.123 + \frac{25}{48\pi t}) f(t)$$
$$+ 0.17 \int_t^{\infty} \log(t) f'(u) \mathrm{d}u = -(1.123 + \frac{25}{48\pi t}) f(t)$$
$$- 0.17 \left[f(t) \log(t) + \int_t^{\infty} \frac{f(u)}{u} \mathrm{d}u \right]$$
$$> -(1.123 + \frac{25}{48\pi t}) \cdot \frac{2a}{a^2+0.25}$$
$$- 0.17 \left[\log(t) \cdot \frac{2a}{a^2+0.25} + a \cdot \frac{\pi t\sqrt{2}/(\sqrt{a^2+0.25}) - \log(t^2/(a^2+0.25))}{2t^2 + a^2 + 0.25} \right].$$

Vertinam narį A_3^{low} iš apačios

$$A_3^{low} = -\int_{\gamma_1}^{t} (0.17 \log u + 2.873 + \frac{25}{48\pi u}) f'(u) \mathrm{d}u$$
$$> -(0.17 \log t + 2.873 + \frac{25}{48\pi\gamma_1})(f(t) - f(\gamma_1)) =$$
$$= -\left(0.17 \log t + 2.873 + \frac{25}{48\pi\gamma_1}\right)\left(\frac{2a}{a^2+0.25} - \frac{2a}{a^2+0.25+2(t-\gamma_1)^2}\right).$$

□

Toliau bus pateiktas Teoremos 1.3 įrodymas.

2.2 Pagrindinio teiginio apie įvertį įrodymas

Teoremos 1.3 įrodymas. Tarkime, kad $1/2 < \sigma < 1$. Tuomet, kadangi $\zeta(\rho) = \zeta(\overline{\rho})$, turime lygybę

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\mathrm{e} \sum_{\rho=1/2+i\gamma} \frac{1}{s-\rho} &= \sum_{\rho=1/2+i\gamma} \frac{\sigma-1/2}{(\sigma-1/2)^2+(t-\gamma)^2} \\ &= \sum_{\gamma>0} \left(\frac{(\sigma-1/2)}{(\sigma-1/2)^2+(t-\gamma)} + \frac{(\sigma-1/2)}{(\sigma-1/2)^2+(t+\gamma)} \right).\end{aligned}$$

Tuomet, pagal viršutinę lygybę bei Lemą 2.5, turime

$$\frac{2(\sigma-1/2)}{(\sigma-1/2)^2+0.25+2(t-\gamma_1)^2} < \mathbb{R}\mathrm{e} \sum_{\rho=1/2+i\gamma} \frac{1}{s-\rho} < \frac{2(\sigma-1/2)}{(\sigma-1/2)^2+(t-\gamma_1)^2}$$

Tarkime, kad c žymės dalį Rymano $\zeta(s)$ funkcijos nulius, esančius ant ašies $s = 1/2+it$. Tuomet, bendras kiekis netrivialių nulių $N(t)$, esančių stačiakampyje sudarytame iš ašių $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$ gali būti išreikštas kaip $N(t) = cN(T) + (1-c)N(T)$. Tuomet, pažymėję $a = \sigma - 1/2$ ir taikant Lemą 2.10 įverčiui iš viršaus rasti su $cN(T)$, turime

$$\begin{aligned}&\frac{2(\sigma-1/2)}{(\sigma-1/2)^2+\frac{(t^2-\gamma^2)^2}{(\sigma-1/2)^2+t^2+\gamma^2}} < c\left[2\pi + 2a\left[(1+\frac{1}{t})\log(t+1) - \log(2\pi) - 1\right] + \right. \\ &\left.\frac{2a}{a^2}\left(4.008 + 0.34\log(t) + \frac{0.17}{t}\right) + 0.17a\left(\frac{\pi t/a - \log(t^2/a^2)}{a^2+t^2}\right)\right] \\ &< 2ca\left[\frac{\pi-a}{a} + \log\left(\frac{t+1}{2\pi}\right) + \frac{4.008+0.34\log t}{a^2}\right],\ t\to\infty.\end{aligned}$$

Analogiškai, taikant Lemą 2.11 įverčiui iš apačios rasti su $cN(T)$

$$\begin{aligned}&\frac{2(\sigma-1/2)}{(\sigma-1/2)^2+0.25+2(t-\gamma_1)^2} \\ &> c\left[-0.43\cdot\frac{2a}{a^2+0.25+2(t-\gamma_1)^2} + \log(0.358t)\cdot\frac{a\pi}{\sqrt{2(a^2+0.25)}}\right. \\ &- \log\left(\frac{\gamma_1}{2\pi}\right)\cdot\frac{a}{t-\gamma_1} - \frac{2a}{a^2+0.25}\left(4.008+0.34\log(t)+\frac{0.17}{t}\right) \\ &\left.- 0.17a\left(\frac{\pi t\sqrt{2}/(\sqrt{a^2+0.25}) - \log(t^2/(a^2+0.25))}{2t^2+a^2+0.25}\right)\right] \\ &> \frac{2ac}{a^2+0.25}\left[-4.408 + \pi\log(0.358t)\cdot\frac{\sqrt{(a^2+0.25)}}{2\sqrt{2}a} - 0.34\log(t)\right],\ t\to\infty.\end{aligned}$$

$\square$

2.3 Įverčio taikymas netrivialių nulių pasiskirtymui

Tarkime, kad Rymano hipotezė nepasitvirtina trimis skirtingais scenarijais:

I. Egzistuoja tik vienas nulis srityje $1/2 < \sigma < 1, t > 0$,

II. Egzistuoja baigtinis nulių skaičius n, kai $n \geq 2$ srityje $1/2 < \sigma < 1$,

III. Egzistuoja be galo daug nulių, srityje $1/2 < \sigma < 1$.

Toliau nagrinėkime kiekvieną iš scenarijų atskirai. Tiriamose atvejuose tarsime, kad $a = \sigma - 1/2$.

I. Tarkime yra tik vienas toks taškas $s = \hat{\beta} + i\hat{\gamma}$, kad $\zeta(\hat{\beta} + i\hat{\gamma}) = 0$ ir $1/2 < \hat{\beta}_k < 1$. Tuomet, pagal Teoremą 1.3 su $c = 1$, nes yra begalinis skaičius nulių, esančių ant kritinės tiesės (Hardy [5]), turime

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}\mathrm{e}\,\frac{\xi'}{\xi}(s) &= \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \sum_{\rho = 1/2 + i\gamma} \frac{1}{(\sigma - 1/2) + (t - \gamma)^2} \\
&+ \frac{\sigma - \hat{\beta}}{(\sigma - \hat{\beta})^2 + (t - \hat{\gamma})^2} + \frac{\sigma - \hat{\beta}}{(\sigma - \hat{\beta})^2 + (t + \hat{\gamma})^2} \\
&+ \frac{\sigma - (1 - \hat{\beta})}{(\sigma - (1 - \hat{\beta}))^2 + (t - \hat{\gamma})^2} + \frac{\sigma - (1 - \hat{\beta})}{(\sigma - (1 - \hat{\beta}))^2 + (t + \hat{\gamma})^2} \\
&> \frac{2a}{a^2 + 0.25}\left[-4.408 + \pi \log(0.358t) \cdot \frac{\sqrt{(a^2 + 0.25)}}{2\sqrt{2}a} - 0.34 \log(t)\right] \\
&+ \frac{\sigma - \hat{\beta}}{(\sigma - \hat{\beta}^2) + (t - \hat{\gamma})^2} > 0,
\end{aligned}$$

jei

$$\frac{\sigma - \hat{\beta}}{(\sigma - \hat{\beta}^2) + (t - \hat{\gamma})^2} > \frac{-2a}{a^2 + 0.25}\left[-4.408 + \pi \log(0.358t) \cdot \frac{\sqrt{(a^2 + 0.25)}}{2\sqrt{2}a} - 0.34 \log(t)\right] \quad (5)$$

ir t pakankamai didelis. Sritis (σ, t), apibrėžta pagal nelygybę (5) yra vaizduojama Priede A žemiau figūroje 1.1 pilku fonu pasirinktam taškui $s_k = \hat{\beta}k + i\hat{\gamma}_k$.

II. Tarkime, kad yra baigtinis skaičius n, kai $n \leq k$ nulių $s_k = \hat{\beta}_k + i\hat{\gamma}_k, k = 1, ..., n$, tokie, kad $\zeta(\beta_k \hat{+} i\hat{\gamma}_k) = 0$ kiekvienam $1/2 < \hat{\beta}_k < 1, t > 0$. Tuomet, pagal Teoremą 1.3 su $c = 1$, turime

$$\mathbb{R}\mathrm{e}\,\frac{\xi'}{\xi}(s) > \frac{2a}{a^2+0.25}\left[-4.408+\pi\log\left(0.358t\right)\cdot\frac{\sqrt{(a^2+0.25)}}{2\sqrt{2}a} - 0.34\log\left(t\right)\right]$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma-\hat{\beta}_k}{(\sigma-\hat{\beta}_k)^2+(t-\hat{\gamma}_k)^2} > 0,$$

jei

$$(\sigma,t)\in\bigcup_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sigma-\hat{\beta}_k}{(\sigma-\hat{\beta}_k)^2+(t-\hat{\gamma}_k)^2}\right.$$
$$\left. > \frac{-2a}{(a^2+0.25)n}\left[-4.408+\pi\log\left(0.358t\right)\cdot\frac{\sqrt{(a^2+0.25)}}{2\sqrt{2}a} - 0.34\log\left(t\right)\right]\right\} \tag{6}$$

ir t pakankamai didelis. Sritis (σ, t), apibrėžta pagal nelygybę (6) vaizduojama Priede A žemiau figūroje 1.2 pilku fonu pasirinktiems 3 taškams.

III. Tarkime, kad egzistuoja begalinis tokių netrivialių taškų $s_k = \hat{\beta}_k + i\hat{\gamma}_k$ skaičius, kad $\zeta(s_k) = 0$, o $\mathbb{R}\mathrm{e}(s) \neq 1/2$. Tuomet pažymėję (pagal Edwards [2] pavyzdį)

$$\sum_{\rho}\frac{1}{\rho} = \frac{\gamma_0}{2}+\frac{1}{2}\log\pi+1-\log 2\pi = 0.023... := \mu,$$

kai suma skaičiuojama įtraukiant visų netrivialių $\zeta(s)$ funkcijos nulių junginių poras didėjančia tvarka pagal menamąją dalį bei $\gamma_0 = 0.577...$ žymi Eulerio konstantą. Taip pat, tarkime, kad nulių kiekis esantys kritinėje tiesėje sudaro 0.4 visų netrivialių nulių, t.y. $c = 0.4$, pagal Conrey [1].

Kadangi

$$\mathbb{R}\mathrm{e}\left(\sum_{\rho=1/2+i\gamma}\frac{1}{1/2+i\gamma}+\sum_{\hat{\rho}=\hat{\beta}_k+i\hat{\gamma}_k}\frac{1}{\hat{\beta}_k+i\hat{\gamma}_k}\right) = \mu,$$

tuomet

$$\frac{1}{\mu}\sum_{\hat{\rho}=\hat{\beta}_k+i\hat{\gamma}_k}\frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\beta}_k^2+\hat{\gamma}_k^2} \leq 1.$$

Tarę, kad $1/2 < \hat{\beta}_k < 1$, turime

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}\mathrm{e}\,\frac{\xi'}{\xi}(s) = c\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\sum_{\rho=1/2+i\gamma}\frac{1}{(\sigma-1/2)+(t-\gamma)^2}\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma-\hat{\beta}_k}{(\sigma-\hat{\beta}_k)^2+(t-\hat{\gamma}_k)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma-\hat{\beta}_k}{(\sigma-\hat{\beta}_k)^2+(t+\hat{\gamma}_k)^2}\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma-(1-\hat{\beta}_k)}{(\sigma-\hat{\beta}_k)^2+(t-\hat{\gamma}_k)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma-(1-\hat{\beta}_k)}{(\sigma-\hat{\beta}_k)^2+(t+\hat{\gamma}_k)^2}\\
&> \frac{2ac}{a^2+0.25}\left[-4.408+\pi\log(0.358t)\cdot\frac{\sqrt{(a^2+0.25)}}{2\sqrt{2}a}-0.34\log(t)\right]\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma-\hat{\beta}_k}{(\sigma-\hat{\beta}_k)^2+(t-\hat{\gamma}_k)^2} > 0,
\end{aligned}$$

jei

$$\begin{aligned}
&(\sigma,t)\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\sigma-\hat{\beta}_k}{(\sigma-\hat{\beta}_k)^2+(t-\hat{\gamma}_k)^2}\right.\\
&\left.> \frac{-ac}{a^2+0.25}\left[-4.408+\pi\log(0.358t)\cdot\frac{\sqrt{(a^2+0.25)}}{2\sqrt{2}a}-0.34\log(t)\right]\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\hat{\beta}}{\hat{\beta}_k^2+\hat{\gamma}_k^2}\right\}
\end{aligned}$$

ir t yra pakankamai didelis.

3 Išvados ir rekomendacijos

Darbo metu surastas Rymano Xi funkcijos logaritminės išvestinės realios dalies įvertis iš apačios ir viršaus pirmame kritinės juostos ketvirtyje, kuomet taško menamoji dalis taško s yra pakankamai didelė, o nuliai pasiskirstę kritinėje tiesėje. Įvertis iš apačios tvirtina nagrinėjamos realios dalies teigiamumą ir leidžia nagrinėti galimų funkcijos nulių elgesį visoje kritinėje juostoje. Dėka to, praplėsta sritis $\mathbb{R}\mathrm{e}\,\frac{\xi'}{\xi}(s) > 0$, kai $\mathbb{R}\mathrm{e}(s) > \hat{\beta}$, kur $\hat{\beta}$ yra labiausiai nuo kritinės tiesės atitolęs netrivialus ζ-funkcijos nulis, papildoma ploto dalimi tarp $\sigma = 1/2$ ir $\sigma = \hat{\beta}$ ašių. Taip pat, praplėsta teigiamos sritis yra atvaizduota grafikuose.

Norint pagerint rezultatą pateikiami du pasiūlymai. Pirmu atveju, galim tikslinti pradinius sumos įverčius tam, kad gauti tikslesnius rezultatus. Visgi, srities vaizdas pakankamai dideliam t turėtų išlikti analogiškas. Antru atveju, galima bandyti ieškoti tikslesnės funkcijos $N(t)$, aprašančios nulių skaičių teigiamoje kritinės juostos plokštumoje.

4 Conclusions and recommendations

In this thesis, we established upper and lower bounds for the real part of logarithmic derivative of Riemann Xi function in a first quadrant of the critical strip with sufficiently large imaginary part of a point s and non-trivial zeros being distributed along critical line. Lower bound suggests positivity of the real part and allows to examine distribution of all possible zeros inside critical strip. Because of that, the area $\mathbb{R}\mathrm{e}\,\frac{\xi'}{\xi}(s) > 0$ when $\mathbb{R}\mathrm{e}(s) > \hat{\beta}$ where $\hat{\beta}$ is the furthest non-trivial zero from critical line with additional area between $\sigma = 1/2$ and $\sigma = \hat{\beta}$ axis. Expanded positive area is also displayed in figures.

In order to improve results, we suggest two approaches. First method, is to improve initial bounds of the sum to get better approximation. However, as t approaches infinity, displayed graphs should look similar to the ones in this thesis. Secondly, we could try to improve function $N(t)$ which desribes the total quantity of non-trivial zeros on positive plane of critical strip.

Literatūros sąrašas

[1] J. B. Conrey, *At least two fifths of the zeros of the riemann zeta function are on the critical line*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 20 (1989), pp. 79–81.

[2] H. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover books on mathematics, Dover Publications, 2001.

[3] L. Euler, *Commentarii Academiae Acientiarum Petropolitanae*, vol. 14 of 1, 1737.

[4] R. Garunkštis, *On a positivity property of the riemann ξ-function*, Lithuanian Mathematical Journal, 42 (2002), pp. 140–145.

[5] G. Hardy, *Sur les zéros de la fonction (s) de Riemann*, vol. 158 of Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Dover Publications, 1914.

[6] A. Hinkkanen, *On functions of bounded type*, Complex Variables Theory Appl., 34 (1997), pp. 119–139.

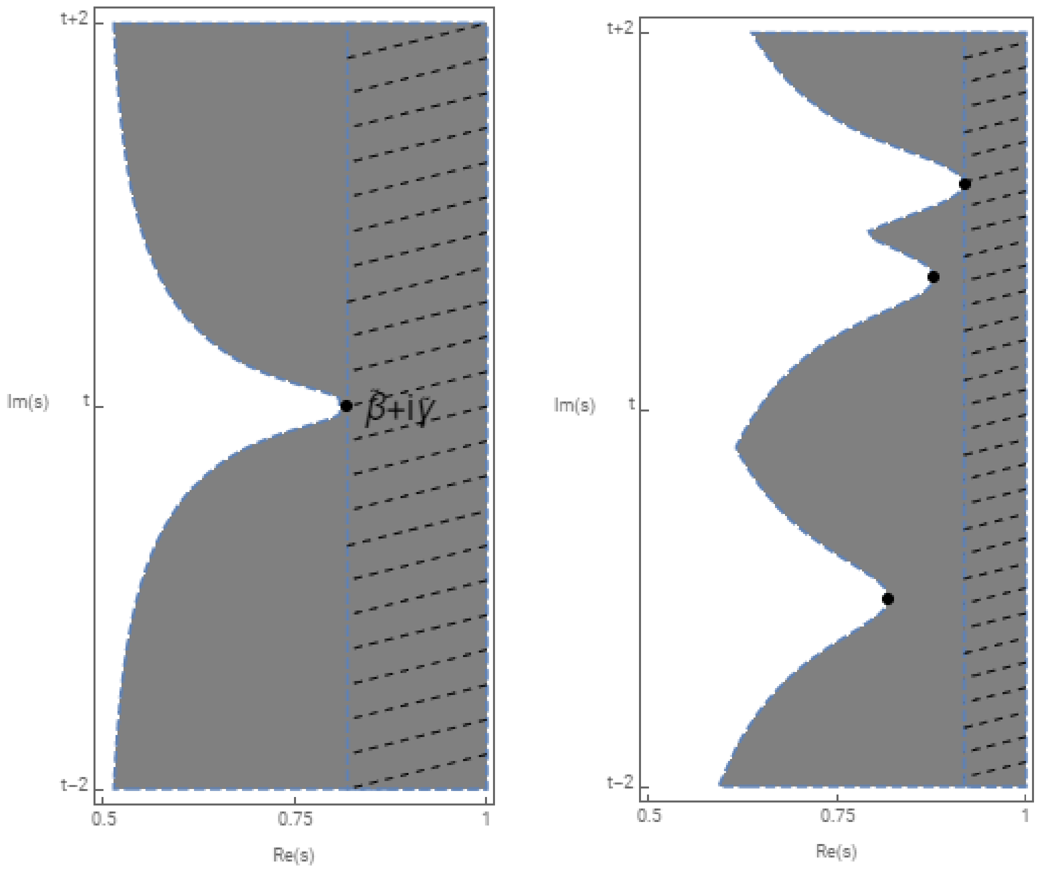
[7] J. C. Lagarias, *On a positivity property of the riemann -function*, Acta Arithmetica, 89 (1999), pp. 217–234.

[8] M. R. Murty, *Problems in Analytic Number Theory*, vol. 206 of Readings in Mathematics, Springer-Verlag New York, 2001.

[9] T. S. Trudgian, *An improved upper bound for the argument of the riemann zeta-function on the critical line ii*, Journal of Number Theory, 134 (2014), pp. 280 – 292.

[10] P. Z. Yu. Matiyasevich, F. Saidak, *Horizontal monotonicity of the modulus of the zeta function, l-functions, and related functions*, Acta Arithmetica, 166 (2014), pp. 189–200.

A Priedai



(1) 1-asis scenarijus, kai $n = 1$. Užbrūkšniuotas plotas žymi sritį, kur $\mathbb{R}\mathrm{e}\,\xi'(s)/\xi(s) > 0$ pagal Teoremos 1.1 ir Lemos 1.2 išvadas.

(2) 2-asis scenarijus, kai $n = 3$. Užbrūkšniuotas plotas žymi sritį, kur $\mathbb{R}\mathrm{e}\,\xi'(s)/\xi(s) > 0$ pagal Teoremos 1.1 ir Lemos 1.2 išvadas.

Pav. 1: (σ, t) plotas įrodytas Skyriuje 2.3