

VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS BAKALAURO STUDIJŲ PROGRAMA

Viktorija Dagilytė

**Chain-Ladder metodo modifikacijos**

**Modifications of Chain-Ladder Method**

Bakalauro baigiamasis darbas

Darbo vadovas prof. dr. Jonas Šiaulyš

VILNIUS

2020

# Chain Ladder metodo modifikacijos

## Santrauka

Ne gyvybės draudimo įmonių rezervų skaičiavimams dažnai naudojamas Chain-Ladder metodas, padedantis suformuoti tinkamo dydžio rezervus jau įvykusioms, bet nepranešoms žaloms. Šis metodas ilgą laiką buvo laikomas tik skaičiavimo algoritmu, tačiau laikui bėgant aktuarai atrado, kad egzistuoja laiko eilučių modeliai, pagrindžiantys Chain-Ladder algoritmą. Šie modeliai gali būti naudojami skaičiuoti nežinomiems dydžiams po žalų trikampių. Darbo teorinėje dalyje yra aptariama, kam reikalingi žalų rezervai, kas yra ir kaip sudaromi žalų trikampiai, paaiškinamas Chain-Ladder metodo skaičiavimo principas ir apžvelgiami skirtingi laiko eilučių modeliai, atitinkantys Chain-Ladder metodą. Praktinėje dalyje yra apibrėžtas konkretus laiko eilučių modelis, pagal kurį modeliuojami nežinomi trijų draudimo rūšių žalų dydžiai ir aiškinamasi, kuris modelis kuriai draudimo rūšiai yra tinkamiausias, atsižvelgiant į istorinių duomenų ir įverčių skirtumus.

**Raktiniai žodžiai:** ne gyvybės draudimas, rezervai, žalų trikampiai, Chain-Ladder, IBNR, laiko eilučių modeliai.

# Modifications of Chain-Ladder method

## Abstract

Usually non-life insurance reserves are calculated using Chain-Ladder algorithm, which allows to form proper size reserves for incurred but not reported claims. This method was only computational algorithm for a long time. However, later actuaries found out that there are time series models, which justify Chain-Ladder method. These models can be used to calculate unknown values below run-off triangles. In the first part of the thesis claims reserves, run-off triangles, Chain-Ladder algorithm and its various time series models will be analyzed. In the second part of the thesis unknown claims sizes of three business lines will be calculated according to introduced times series model. Finally, there will be evaluation which model for which business line is the best option.

**Key words:** non-life insurance, reserves, run-off triangle, Chain-Ladder, IBNR, time series models.

# Turinys

|          |                                               |           |
|----------|-----------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Chain-Ladder metodas</b>                   | <b>5</b>  |
| 1.1      | Žalų vėlavimas . . . . .                      | 5         |
| 1.2      | Žalų trikampiai . . . . .                     | 6         |
| 1.3      | Chain-Ladder metodas . . . . .                | 7         |
| 1.4      | Stochastiniai Chain-Ladder modeliai . . . . . | 9         |
| <b>2</b> | <b>Praktinė dalis</b>                         | <b>11</b> |
| 2.1      | Aprašymas . . . . .                           | 11        |
| 2.1.1    | Tikslas . . . . .                             | 11        |
| 2.1.2    | Duomenys . . . . .                            | 11        |
| 2.1.3    | Modelis ir jo prielaidos . . . . .            | 11        |
| 2.1.4    | Modelio parametrai . . . . .                  | 12        |
| 2.2      | Modeliavimo eiga . . . . .                    | 15        |
| 2.2.1    | Metodologija . . . . .                        | 15        |
| 2.2.2    | Rezultatai . . . . .                          | 17        |
|          | <b>Išvados</b>                                | <b>23</b> |
|          | <b>Priedai</b>                                | <b>25</b> |

## Įvadas

Draudimo kompanijos yra finansinių rinkų dalis. Jos įsipareigoja atlyginti draudėjui galimus nuostolius, ištikus nelaimę. Deja, ne gyvybės draudimo žalos kartais negali būti atlygintos iškart - dažniausiai užsitęsęs pranešimo laikas arba ilgai nagrinėjamas žalų dydis. Dėl šių priežasčių reikia spręsti žalų rezervų problemą - suformuoti reikiamo dydžio draudimo įmonės žalų rezervus. Vienas populiariausių rezervų skaičiavimo metodų - Chain-Ladder. Šis metodas ilgą laiką buvo laikomas tik skaičiavimo algoritmu, ir tik vėliau aktuarai atrado laiko eilučių modelius, pagrindžiančius šį metodą. Minėtieji modeliai leidžia apskaičiuoti nežinomas reikšmes, esančias po žalų trikampių, ir tai padeda aktuarams suformuoti teisingo dydžio rezervus. Šių laiko eilučių modelių parametrai taip pat turi tenkinti tam tikrus apribojimus. Tinkamai pasirinkti modelio parametrai sudaro galimybes padidinti skaičiavimų tikslumą, todėl tai yra bene svarbiausia modeliavimo užduotis.

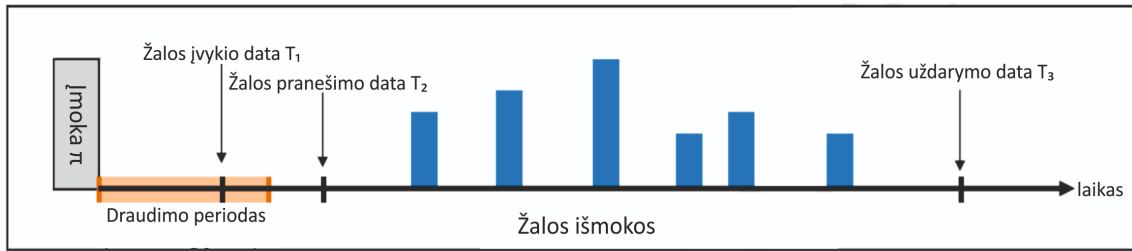
Šio darbo tikslas yra optimizuoti Chain-Ladder metodo parametrus maksimaliam tikslumui gauti ir pasakyti, kuri laiko eilučių modelio modifikacija kuriai draudimo rūšiai duoda didžiausią tikslumą.

# 1 Chain-Ladder metodas

Šiame skyriuje aptariama, kas yra žalų vėlavimas ir dėl kokių priežasčių jis atsiranda, kaip sudaromi žalų trikampiai [1], kaip ir kam naudojamas populiariausias rezervavimo metodas Chain-Ladder, jo skaičiavimo principai. Taip pat laiko eilučių modeliai, pagrindžiantys Chain-Ladder algoritmą [2].

## 1.1 Žalų vėlavimas

Žala ne gyvybės draudime yra sukeliamas atsitiktinio įvykio. Tarkime, jog žala įvyko momentu  $T_1$ . Nuo šios žalos įvykimo iki įvedimo į draudimo įmonės administracinę sistemą praeina tam tikras laiko tarpas, kol galima statistinė žalos analizė. Šis laiko tarpas nuo įvykio momento iki registracijos draudimo įmonėje vadinamas *pranešimo vėlavimu*. Registracijos datą pažymėkime  $T_2$ .



1 pav.: Žalų vėlavimas.

Šiame paveikslėlyje matomas draudimo periodas  $[U_1, U_2]$ , žalos įvykio momentas  $T_1 \in [U_1, U_2]$ , pranešimo data  $T_2 > U_2$  ir žalos uždarymo data  $T_3 > T_2$ . Taip pat yra pavaizduotos ir žalos išmokos per tam tikrą periodą iki žalos uždarymo.

Žalų vėlavimas gali trukti trumpai, tarkime, kelios valandos arba dienos, tačiau gali užsitęsti labai ilgai, kelis ar netgi daugiau metų (išimtiniais atvejais - netgi daugiau nei dešimtmetį). Taip yra todėl, kad žalos yra ne iškart pastebimos, o taip ir ne iškart išsprendžiamos - žalos dydžiui nustatyti kartais reikia ilgesnį laiką trunkančio tyrimo, išorinės informacijos, išorinių sąskaitų, teismo sprendimų. Taigi turime tris svarbias ne gyvybės draudimo žalų datas, kurias galima sudėlioti pagal toliau sekančią nelygybę:

$$\text{Įvykio data } T_1 \leq \text{pranešimo data } T_2 \leq \text{sprendimo/uždarymo data } T_3. \quad (1)$$

## 1.2 Žalų trikampiai

Tam, kad būtų daromos statistinės išvados apie draudimo polisus ir žalų elgesį, draudimo įmonės susikuria homogenines grupes. Informacija yra dažnai grupuojama pagal skirtingas draudimo rūšis: privataus turto, komercinio turto, privačios arba komercinės civilinės atsakomybės, nelaimingų atsitikimų, sveikatos, vairuotojų civilinės atsakomybės draudimo ir kitas. Ši klasifikacija yra gana griežta, tačiau ją galima dar labiau išskaidyti, pavyzdžiui, privati nuosavybė gali būti padalinta į pavojaus kategorijas: ugnies, vandens, vagystės ir kitas. Tuomet, kai sukonstruojamos šios homogeninės rizikos klasės, galima nagrinėti žalas, priklausančias tai pačiai grupei. Žalos toliau kategorizuojamos pagal įvykio datą. Žalos, kurios įvykio panašiu metu, gali būti susijusios dėl išorinių faktorių - panašių oro sąlygų, ekonominės aplinkos ir kitų, todėl tokia klasifikacija yra pagrįsta. Žalos dažniausiai yra renkamos pagal įvykio metus, todėl pažymėkime juos  $i \in \mathbb{N}$ . Jos taip pat generuoja pinigų srautus (išmokas), daromus tais pačiais metais, kurie yra agreguoti. Dėl to fiksuotiems  $i \in \mathbb{N}$  ir  $j \in \mathbb{N}_0$  mes apibrežiame:

$X_{i,j}$  = visi mokėjimai žaloms, kurių įvykio data  $i$

ir jos apmokėtos ataskaitiniais metais  $i + j \in \mathbb{N}$

Taigi, turime visas žalas tam tikrame portfelyje, kurių įvykio datos  $T_1 \in [1/1/i, 31/12/i]$ . Taip pat turime ir agreguotus pinigų srautus, kurie yra toliau padalinami pagal išmokų vėlavimus, žymimus  $j \in \mathbb{N}_0$  ir vadinamus *vystymosi metais (arba periodais)*. Pavyzdžiui,

$X_{i,0}$  = mokėjimai ataskaitiniais metais  $i$  žaloms, kurių įvykio metai yra  $i$

$X_{i,1}$  = mokėjimai ataskaitiniais metais  $i + 1$  žaloms, kurių įvykio metai yra  $i$ .

Dar daugiau, bendru atveju yra nustatytas maksimalus žalos reguliavimo vėlavimas  $J \in \mathbb{N}$ , kaip ir  $X_{i,j} \equiv 0$  visiems vystymosi metams  $j > J$  ir visiems įvykio metams  $1 \leq i \leq I$ .  $J$  priklauso nuo draudimo rūšies, dažniausiai jis yra mažesnis privačiam turtui ir didesnis civilinės atsakomybės draudimui. Su  $I \in \mathbb{N}$ , kai  $I > J$ , galime pavaizduoti žalų prieaugių trikampį (*angl. run-off triangle*) grafiškai.

| Įvykio metai $i$ | Žalų vystymosi metai $j$ |             |          |             |          |             |
|------------------|--------------------------|-------------|----------|-------------|----------|-------------|
|                  | 0                        | 1           | ...      | $j$         | ...      | $J$         |
| 1                | $X_{1,0}$                | $X_{1,1}$   | ...      | $X_{1,j}$   | ...      | $X_{1,J}$   |
| $\vdots$         | $\vdots$                 | $\vdots$    | $\vdots$ | $\vdots$    | $\vdots$ | $\vdots$    |
| $I - J$          | $X_{I-J,0}$              | $X_{I-J,1}$ | ...      | $X_{I-J,j}$ | ...      | $X_{I-J,J}$ |
| $\vdots$         | $\vdots$                 | $\vdots$    | $\vdots$ | $\vdots$    | $\vdots$ | $\vdots$    |
| $i$              | $X_{i,0}$                | $X_{i,1}$   | ...      | $X_{i,j}$   | ...      | $X_{i,J}$   |
| $\vdots$         | $\vdots$                 | $\vdots$    | $\vdots$ | $\vdots$    | $\vdots$ | $\vdots$    |
| $I - 1$          | $X_{I-1,0}$              | $X_{I-1,1}$ | $\vdots$ | $X_{I-1,j}$ | $\vdots$ | $X_{I-1,J}$ |
| $I$              | $X_{I,0}$                | $X_{I,1}$   | $\vdots$ | ...         | $\vdots$ | $X_{I,J}$   |

1 lentelė: Žalų trikampis

Ši lentelė turi 3 laiko ašis:

1. Įvykio metai  $i \in \{1, \dots, I\}$  vertikalioje ašyje;
2. Vystymosi metai  $j \in \{0, \dots, J\}$  horizontalioje ašyje;
3. Ataskaitiniai (kalendoriniai) metai  $i + j \in \{1, \dots, I + J\}$  diagonalėje.

Mėlynai pažymėti dydžiai yra nežinomi, todėl jų įvertinimas yra pagrindinė ne gyvybės draudimo įmonių užduotis formuojant įmonės rezervus.

### 1.3 Chain-Ladder metodas

Chain-Ladder (*liet. "grandininių pakopų"*) metodas yra bene populiariausias rezervavimo metodas teorijoje ir praktikoje. Šiam metodui aktuarai naudoja istorinius duomenis, kad galėtų apskaičiuoti įvykusių, bet nepraneštų žalų (*angl. IBNR - incurred but not reported*) [3] rezervus. Pagrindinės priežastys, kodėl šis metodas yra toks populiarus yra paprastumas ir tai, jog jis veikia nesant beveik jokioms prielaidoms. Visgi pastebima, jog šis modelis yra labai jautrus įvairiems nuokrypiams, kurie atsispindi naujausių įvykių metų duomenyse. [4]

Chain-Ladder metodas įprastai taikomas agreguotoms žalomis (*angl. cumulative claims*) [1]:

$$C_{i,j} = \sum_{l=0}^j X_{i,l}$$

Tarkime, kad mūsų apibrėžtas  $C_{i,j}$  žymi agreguotas nuostolių (išmokų) sumas įvykio periodo  $i = 1, \dots, n$  vystymosi datos periodo pabaigoje  $j = 1, \dots, n$ . Kiekvienam  $i$  ir  $j \leq n - i + 1$ ,  $C_{i,j}$  yra turimi duomenys, kol kitos sumos, pažymėtos pilka spalva 2 lentelėje, turi būti apskaičiuotos.

|          | 1         | 2         | ... | $j - 1$     | $j$         | ... | $n - 1$ | $n$       |
|----------|-----------|-----------|-----|-------------|-------------|-----|---------|-----------|
| 1        | $C_{1,1}$ | $C_{1,2}$ |     |             |             |     |         | $C_{1,n}$ |
| 2        | $C_{2,1}$ |           |     |             |             |     |         |           |
| $\vdots$ |           |           |     |             |             |     |         |           |
| $i$      |           |           |     | $C_{i,j-1}$ | $C_{i,j}$   |     |         |           |
| $i + 1$  |           |           |     |             | $C_{i+1,j}$ |     |         |           |
| $\vdots$ |           |           |     |             |             |     |         |           |
| $n - 1$  |           |           |     |             |             |     |         |           |
| $n$      | $C_{n,1}$ |           |     |             |             |     |         |           |

2 lentelė: Agreguotų nuostolių sumų stilizuota struktūra pagal įvykio ir vystymosi periodus

Tradicinis Chain-Ladder metodas skaičiuoja prognozes  $\hat{C}_{i,n-i+k}$ ,  $i = 2, \dots, n$ ,  $k = 2, \dots, i$  nežinomų  $C_{i,n-i+k}$  pagal formulę:

$$\hat{C}_{i,n-i+k} = C_{i,n-i+1} \prod_{j=n-i+2}^{n-i+k} \hat{f}_j, \quad (2)$$

kur žalų vystymosi koeficientai (*angl. age-to-age factors*)  $\hat{f}_j$  yra randami pagal formulę:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}} \quad (3)$$

Žalų vystymosi koeficientų tikslas yra apibūdinti vėluojančių žalų vystymąsi nuo įvykio datos.

## 1.4 Stochastiniai Chain-Ladder modeliai

Klasikinėje aktuarinėje literatūroje dažnai nurodoma, jog Chain-Ladder metodas yra tik skaičiavimo algoritmas. Tik vėliau aktuarai pradėjo galvoti apie stochastinius modelius, kurie sudarė pagrindą šiam metodui. Yra keli skirtingi stochastiniai modeliai, kurie pagrindžia Chain-Ladder metodą. Garsus matematikas Thomas Mack [4] pasiūlė Chain-Ladder metodui statistinę aplinką, susijusią su pirmais dviem dydžio  $C_{i,j}$  sąlyginiais momentais. Joje yra prielaidos, kad  $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,n}\}$  ir  $\{C_{k,1}, \dots, C_{k,n}\}$  yra nepriklausomi, kai  $i \neq k$ , nes Chain-Ladder algoritme nėra priklausomybės tarp įvykio periodų. Taip pat kai  $i = 1, \dots, n, j = 2, \dots, n$ , yra laikoma, kad:

$$E(C_{i,j}|C_{i,j-1}, C_{i,j-2}, \dots, C_{i,1}) = f_j C_{i,j-1} \text{ ir}$$

$$Var(C_{i,j}|C_{i,j-1}, C_{i,j-2}, \dots, C_{i,1}) = \sigma_j^2 C_{i,j-1},$$

su teigiamomis konstantomis  $f_j, \sigma_j$  ir su pradinėmis reikšmėmis  $\{C_{1,1}, C_{2,1}, \dots, C_{n,1}\}$ . Tokia stochastinė charakterizacija leidžia ne tik gauti nuostolių sąlygines prognozes, bet ir apskaičiuoti prognozių standartinę paklaidą. Kaip teigė Thomas Mack kitame savo darbe [5], su sąlyga, kad tinkamas stochastinis modelis turi anksčiau apibrėžtus sąlyginius momentus, tradicinis Chain-Ladder įvertinys, apibrėžtas (3) yra efektyvus, t.y., jis yra geriausias tiesinis nepaslinktasis įvertis (*angl. BLUE - best (minimum variance) Linear Unbiased Estimator*). Visgi jis nebūtinai efektyvus bendru atveju, kai:

$$Var(C_{i,j}|C_{i,j-1}, C_{i,j-2}, \dots, C_{i,1}) = \sigma_j^2 C_{i,j-1}^{2-\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, 2.$$

Iš tikrųjų,  $\alpha = 1$  atitinka tradicinį Chain-Ladder metodą. Kai  $\alpha = 0$ , stebėtų individualių vystymosi koeficientų  $F_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$  vidurkis duoda efektyvius  $f_j$  įvertinius, kai tuo tarpu  $\alpha = 2$  mažiausių kvadratų metodo (*angl. OLS - Ordinary Least Squares*) įvertinys be pertraukimų  $C_{i,j}$  regresijoje prieš  $C_{i,j-1}$  gaunasi  $f_j$  geriausias tiesinis nepaslinktasis įvertis. Visgi parametras  $\alpha$  nebūtinai yra lygus išvardintoms reikšmėms.

Pagal formulę (2) yra žinoma, kaip apskaičiuojamas  $\hat{C}_{i,n-i+k}$ . Visgi esant duomenų stygiui, prie apskaičiuotų žalų vystymosi koeficientų reikalingas dar vienas papildomas koeficientas  $\hat{f}_{ult} > 1$  (*angl. tail factor*), kuris leidžia apskaičiuoti galutinį  $\hat{C}_{i,n-i+k}$  įvertinį. Vienas iš galimų šio koeficiento skaičiavimo būdų - tiesinė ekstrapoliacija  $\ln(\hat{f}_j - 1)$  tiesia linija  $a * k + b, a < 0$ , kartu su:

$$\hat{f}_{ult} = \prod_{j=n}^{\infty} \hat{f}_j$$

Tačiau šis koeficientas turi būti įtikinantis, todėl galutinis jo dydis priklauso ir nuo ekspertinio aktuario įvertinimo.

Markus Buchwalder, Hans Bülmann, Michael Merz ir Mario V. Wütrich [6] pristatė Chain-Ladder atitinkantį laiko eilučių modelį. Stochastinis laiko eilučių procesas duoda tuos pačius du salyginius momentus kaip ir [5]. Tokia laiko eilučių aproksimacija leidžia panaudoti laiko eilučių metodus nuostolių prognozavimui naudojantis teoriniais rezultatais ir kompiuterinės analizės metodais. Visgi Markus Buchwalder, Hans Bülmann, Michael Merz ir Mario V. Wütrich teigė, jog tokiame procesui reikalingi tam tikri laiko eilučių paklaidos apribojimai, jog nesigautų agreguotų mokėjimų neigiamų reikšmių. Thomas Mack abejojo, ar paklaidos gali būti nepriklausomos įvedus tokius apribojimus.

Mario V. Wütrich [7] pastebėjo, jog vystymosi koeficientų  $F_{i,j}$  salyginis variacijos koeficientas, kuris yra

$$Vco(F_{i,j}|C_{i,j-1}) = [Var(F_{i,j}|C_{i,j-1})]^{1/2} / E(F_{i,j}|C_{i,j-1}),$$

klasikiniame Chain-Ladder statistiniame modelyje tenkina "diversifikuojamo proceso paklaidos" sąlygą, t.y.,

$$Vco(F_{i,j}|C_{i,j-1}) \rightarrow 0, \text{ kai } C_{i,j-1} \rightarrow \infty.$$

Toks salyginio variacijos koeficiento konvergavimas į nulį turi savo prasmę rizikos valdyme. Tai reiškia, jog rizika visiškai dingsta labai dideliems portfeliams (*angl. law of large numbers*). Tai ne visai atitinka "naujuosius mokumo reikalavimus", pavyzdžiui: "Swiss Solvency Test (2006)". Mario V. Wütrich [7] taip pat pasiūlė patobulintą laiko eilučių modelį, kuriame prie diversifikuojamos proceso paklaidos įeina ir nediversifikuojamos paklaidos narys, kuris koeficientą  $Vco(F_{i,j}|C_{i,j-1})$  tolygiai apibrėžia iš apačios su tam tikra teigiama konstanta. Visgi, buvo susidurta su tam tikromis problemomis dėl portfelio duomenų dydžio, kuris turi būti labai didelis ( $C_{i,j-1} \rightarrow \infty$ ), kad būtų gauti reikalingi parametrai.

## 2 Praktinė dalis

Šiame skyriuje bus aprašytas atliktas modeliavimas - jo tikslas, pasirinkti duomenys, naudotas modelis ir jo parametrai, o taip pat ir metodologija, eiga ir rezultatai.

### 2.1 Aprašymas

#### 2.1.1 Tikslas

Šio darbo praktinės dalies tikslas yra sumodeliuoti ne gyvybės draudimo trijų draudimo rūšių - transporto priemonių valdytojų civilinės atsakomybės draudimo (TPVCAD), kasko bei turto draudimo nežinomas reikšmes po žalų trikampaiais, nedarant prielaidų apie nekoreliuotumą tarp žalų vystymosi koeficientų, keliamų Chain-Ladder metodo. Jas sumodeliavus, išvesti apskaičiuotų reikšmių vidurkių apatinį trikampį, paskaičiuoti standartinę nuokrypį tarp įverčių ir istorinių duomenų, variacijos koeficientus bei pateikti išvadas, kuris modelis kuriai draudimo rūšiai geriausiai tinka.

#### 2.1.2 Duomenys

Modeliavimui buvo naudoti ne gyvybės draudimo įmonės žalų išmokų ketvirtiniai duomenys. Ketvirčiai žymimi raidėmis "Q". Buvo pasirinktos 3 draudimo rūšys - transporto priemonių valdytojų civilinės atsakomybės draudimo (TPVCAD), kasko bei turto draudimo. TPVCAD žalų įvykių datos nuo 2001 Q1 iki 2010 Q2, kasko draudimo - 2002 Q1 - 2009 Q4, turto draudimo - 2001 Q1 - 2010 Q. Žalų vystymosi ir įvykių periodų atitinkamai 38, 32, 38.

#### 2.1.3 Modelis ir jo prielaidos

Tam, kad aprašytume pamatinį modelį Chain-Ladder metodui, reikia apibrėžti prielaidas bendroms agreguotų nuostolių sumoms  $C_j \geq 0$  vystymosi periodo pabaigoje  $j = 1, \dots, n$ .

Tarkime, kad nuostolių sumos  $C_j, j = 1, 2, \dots, n$  tenkina tokias stochastines rekursines lygtis:

$$C_j = f_j C_{j-1} + h_j(C_{j-1})\varepsilon_j, \quad j = 2, 3, \dots, \quad (4)$$

kur

$$h_j(x) = \sigma_j x \sqrt{x^{-\alpha_j} + a_j}, \quad x > 0 \quad (5)$$

su parametrais  $f_j > 0, \alpha_j \geq 0, a_j \geq 0, \sigma_j > 0$  ir triukšmo kintamaisiais  $\varepsilon_j, j = 2, 3, \dots$ , kurie yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai kintamieji su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija. Taip pat, kiekvienam  $j = 2, 3, \dots \varepsilon_j$  yra nepriklausomas  $C_{j-k}, k = 1, \dots, j-1$ . Turėtų būti paminėta, jog  $a_j = 0$  duoda neidentifikuojamą modelį, nebent ir  $a_j$ , ir  $\sigma_j$  yra žinomos reikšmės.

Iš apibrėžto modelio  $C_{i,j}$  radimui galima išskirti du specialius atvejus. Thomas Mack [5] straipsnyje rašoma apie vystymosi koeficientų priklausomybę nuo  $\alpha = \{0, 1, 2\}$ , kas apibrėžtame modelyje atitinka sąlygas, kai  $a_j = 0$  ir  $\alpha_j \geq 0$ . Tokį modelį pavadinsime **modeliu A**:

$$C_{i,j} = f_j C_{i,j-1} + \sigma_j (C_{i,j-1}^{1-(\alpha_j/2)}) \varepsilon_{i,j}. \quad (6)$$

Mario V. Wütrich modelis yra gaunamas, kai  $\alpha_j = 1$  ir  $a_j > 0$ . Pavadinsime jį **modeliu B**:

$$C_{i,j} = f_j C_{i,j-1} + \sigma_j \sqrt{(C_{i,j-1} + a_j C_{i,j-1}^2)} \varepsilon_{i,j}. \quad (7)$$

Šie modeliai turi mažiau koeficientų nei pagrindinis modelis, todėl gali labiau tikti mažesniems duomenų kiekiams. Taip pat darome prielaidą, kad vėliausi įvykio metai nėra pilnai išsivystę, todėl įvesime paskutinio žalų vystymosi koeficiento atskirą skaičiavimą sekančiame poskyryje.

#### 2.1.4 Modelio parametrai

Pagal praeitame poskyryje aprašytą modelį parinkti tokie parametrai:

1. Tarkime, jog  $N := n - j + 1$ . Tuomet apibrėžkime žalų vystymosi koeficientų  $f_j > 0$  pasirinkimo variantus:

- Mažiausių kvadratų metodo žalų vystomosi koeficiento įvertinys (*angl. OLS - Ordinary Least Squares*):

$$\hat{f}_j^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^N C_{i,j} C_{i,j-1}}{\sum_{i=1}^N C_{i,j-1}^2}$$

- Chain-Ladder žalų vystomosi koeficiento įvertinys (*angl. CL - Chain-Ladder*):

$$\hat{f}_j^{(2)} = \frac{\sum_{i=1}^N C_{i,j}}{\sum_{i=1}^N C_{i,j-1}}$$

- Vidutinis žaľų vystymosi koeficiento įvertinys (*angl. ADF - Average Development Factor*):

$$\hat{f}_j^{(3)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$$

Kaip ir minėta, paskutiniai įvykio metai nėra pilni, todėl reikia papildomai apskaičiuoti dar vieną žaľų vystymosi koeficientą. Paskutinis žaľų vystymosi koeficientas surandamas logaritminės-tiesinės ekstrapoliacijos būdu pagal formulę:

$$\ln(\hat{f}_j - 1)$$

Ekstrapoliuojame 100 vystymosi periodų į priekį. Be to, jei žaľų vystymosi koeficientas yra mažesnis arba lygus vienetui, jam priskiriama reikšmė 1,0001. Be šio priskyrimo būtų negalimas ekstrapoliacijos procesas. Dėrėtų pabrėžti, jog žaľų vystymosi koeficientui  $f_j^{(3)}$  paskutinė reikšmė nėra ekstrapoliuojama, nes gaunamas per didelis skaičius ir negeri rezultatai. Vietoje to priskiriamas vienetas.

2. Pagrindinio modelio parametrai TPVCAD ir turto draudimo rūšims (su  $j = 2, \dots, n$ ):

- Parametras  $\alpha_j = 0$ .
- Parametras  $a_j = 0$ .
- Parametras  $\sigma_j = 0,01$  žaľų vystymosi koeficientams  $f_j^{(1)}, f_j^{(2)}, f_j^{(3)}$  koeficientui  $\sigma_j = 0,001$ .
- Parametras  $x = 1$ .

3. Pagrindinio modelio parametrai kasko draudimo rūšiai (su  $j = 2, \dots, n$ ):

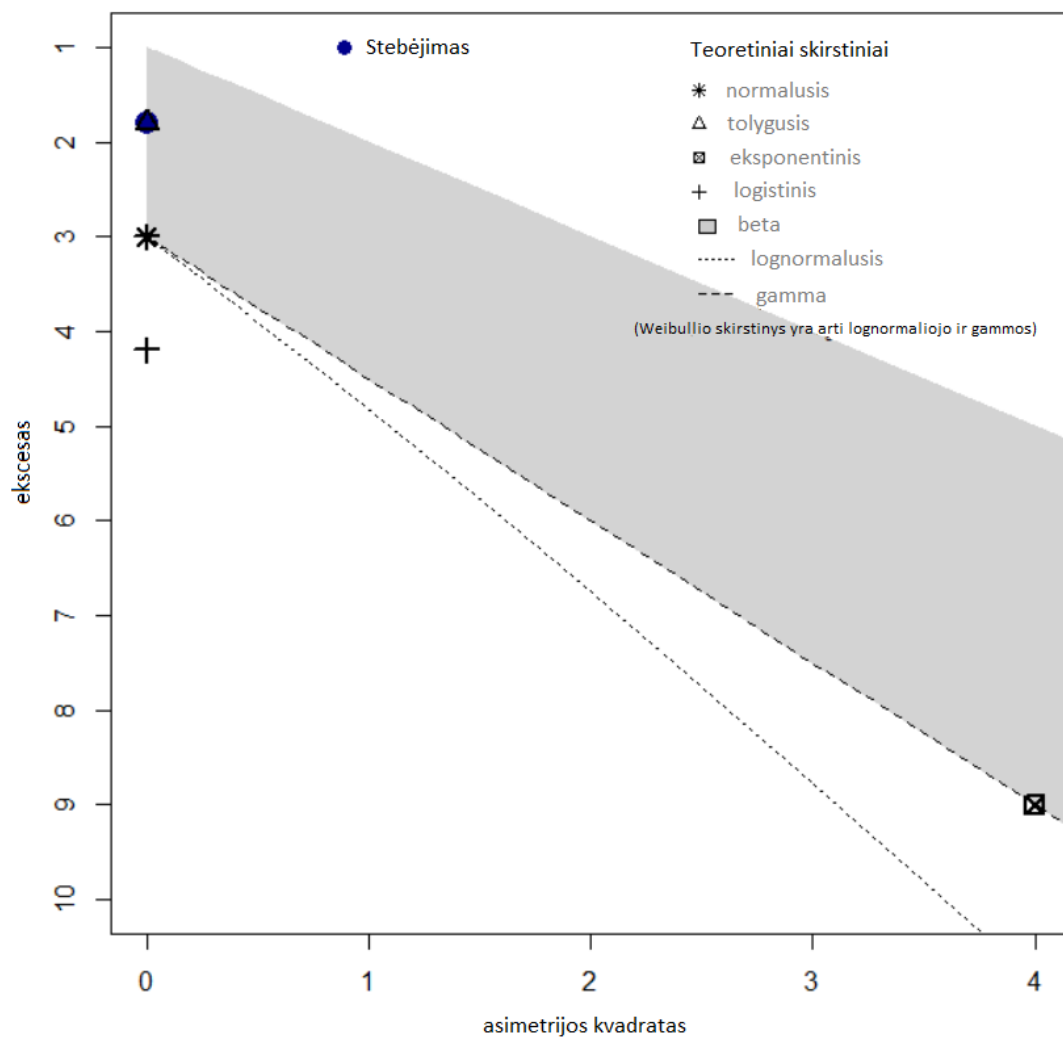
- Parametras  $\alpha_j = 0$ .
- Parametras  $a_j = 0$ .
- Parametras  $\sigma_j = 0,001$  žaľų vystymosi koeficientams  $f_j^{(1)}, f_j^{(2)}, f_j^{(3)}$  koeficientui  $\sigma_j = 0,01$ .
- Parametras  $x = 1$ .

4. Modelio A parametrai:  $\sigma_j = 1, \alpha_j = 3$ , kai  $j = 2, \dots, n$ .

5. Modelio B parametrai:  $\sigma_j = 0,01, a_j = 3$ , kai  $j = 2, \dots, n$ .

6. Triukšmo kintamieji  $\varepsilon_j, j = 2, 3, \dots$ , kurie yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai kintamieji su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija, parenkami generuojant a.d. iš tolygaus skirstinio intervalo  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ .

## Cullen ir Frey grafikas



2 pav.: Sugeneruotų a.d. skirstinio patikrinimas

## 2.2 Modeliavimo eiga

Šiame skyriuje aprašyta modeliavimo eiga ir gauti rezultatai.

### 2.2.1 Metodologija

Modeliavimui naudojamas statistinis R paketas (versija 4.0.0). Modeliavimas atliktas naudojantis asmeniniu kompiuteriu, taikant Monte Karlo algoritmą, kuris labai imlus laikui - kiekvienam parametru rinkiniui skaičiavimai atlikti 500 kartų. Skaičiavimuose naudoti anksčiau aprašyti duomenys, parametrai ir modelis.

Siekiant palyginti gaunamus žalų trikampių įverčius su istoriniais duomenimis, skaičiuojami standartiniai nuokrypiai, variacijos koeficientai ir lyginami gauti rezultatai. Naudotos formulės:

1. Standartinis nuokrypis:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (C_{i,j} - \mu)^2},$$

čia  $\mu$  - apskaičiuotų  $\hat{C}_{i,j}, i = 2, \dots, n, j = 2, \dots, n$ , įverčių vidurkis.

2. Variacijos koeficientas:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} * 100\%$$

Taigi, modeliuojame po turimu žalų trikampiu nežinomas reikšmes su aprašytais parametrais pagal pagrindinį modelį. Pirmiausia turime gauti žalų vystymosi koeficientus trimis minėtais metodais. Svarbu priminti, jog paskutinė žalų vystymosi koeficientų vektoriaus reikšmė apskaičiuojama ekstrapoliacijos būdu. Apskaičiuojame visus žalų vystymosi koeficientus ir pridedame paskutinį.

Apskaičiuojame gautų žalų vystymosi koeficientų minimalią reikšmę, pirmąjį kvantilį, medianą, vidurkį, trečiąjį kvantilį, maksimalią reikšmę.

|                      | $f_j^{(1)}$ | $f_j^{(2)}$ | $f_j^{(3)}$ |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|
| <i>Minimali r.</i>   | 1,00        | 1,00        | 1,00        |
| <i>I – as kv.</i>    | 1,00        | 1,00        | 1,00        |
| <i>Mediana</i>       | 1,00        | 1,00        | 1,01        |
| <i>Vidurkis</i>      | 1,04        | 1,04        | 1,02        |
| <i>III – ias kv.</i> | 1,00        | 1,00        | 1,02        |
| <i>Maksimali r.</i>  | 1,88        | 1,89        | 1,18        |

3 lentelė: TPVCAD draudimo žalų vystymosi koeficientai

|                      | $f_j^{(1)}$ | $f_j^{(2)}$ | $f_j^{(3)}$ |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|
| <i>Minimali r.</i>   | 1,00        | 1,00        | 1,00        |
| <i>I – as kv.</i>    | 1,00        | 1,00        | 1,00        |
| <i>Mediana</i>       | 1,00        | 1,00        | 1,02        |
| <i>Vidurkis</i>      | 1,03        | 1,03        | 1,03        |
| <i>III – ias kv.</i> | 1,00        | 1,00        | 1,03        |
| <i>Maksimali r.</i>  | 2,04        | 2,19        | 1,10        |

4 lentelė: Kasko draudimo žalų vystymosi koeficientai

|                      | $f_j^{(1)}$ | $f_j^{(2)}$ | $f_j^{(3)}$ |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|
| <i>Minimali r.</i>   | 1,00        | 1,00        | 1,00        |
| <i>I – as kv.</i>    | 1,00        | 1,00        | 1,01        |
| <i>Mediana</i>       | 1,00        | 1,00        | 1,06        |
| <i>Vidurkis</i>      | 1,05        | 1,05        | 1,11        |
| <i>III – ias kv.</i> | 1,00        | 1,00        | 1,13        |
| <i>Maksimali r.</i>  | 2,46        | 2,52        | 1,74        |

5 lentelė: Turto draudimo žalų vystymosi koeficientai

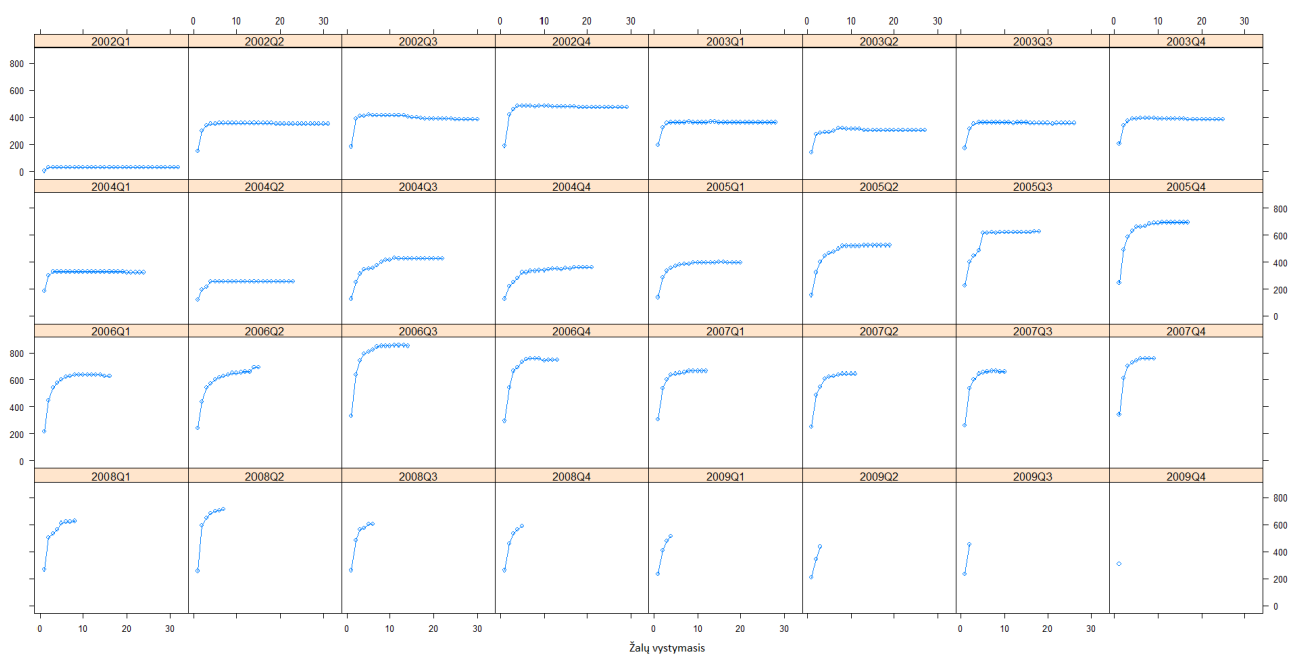
Toliau skaičiuojame nežinomus dydžius po žalų trikampaiais pagal formulę - sugeneruojame kiekvienai draudimo rūšiai su pasirinktais parametrais ir kiekvienu žalų vystymosi koeficientu reikšmes (kartojant skaičiavimus 500 kartų, nes kiekvieną sykį generuojant keičiasi a.d.  $\varepsilon_j, j = 2, 3, \dots$  reikšmė) ir išvedame gautą vidurkių apatinį trikampį. Rezultatus interpretuojame pagal jau apibrėžtas formu-

les ir nusprendžiame, kuris modelis kuriai draudimo rūšiai yra tinkamiausias. Tai bus nagrinėjama sekančiame poskyryje.

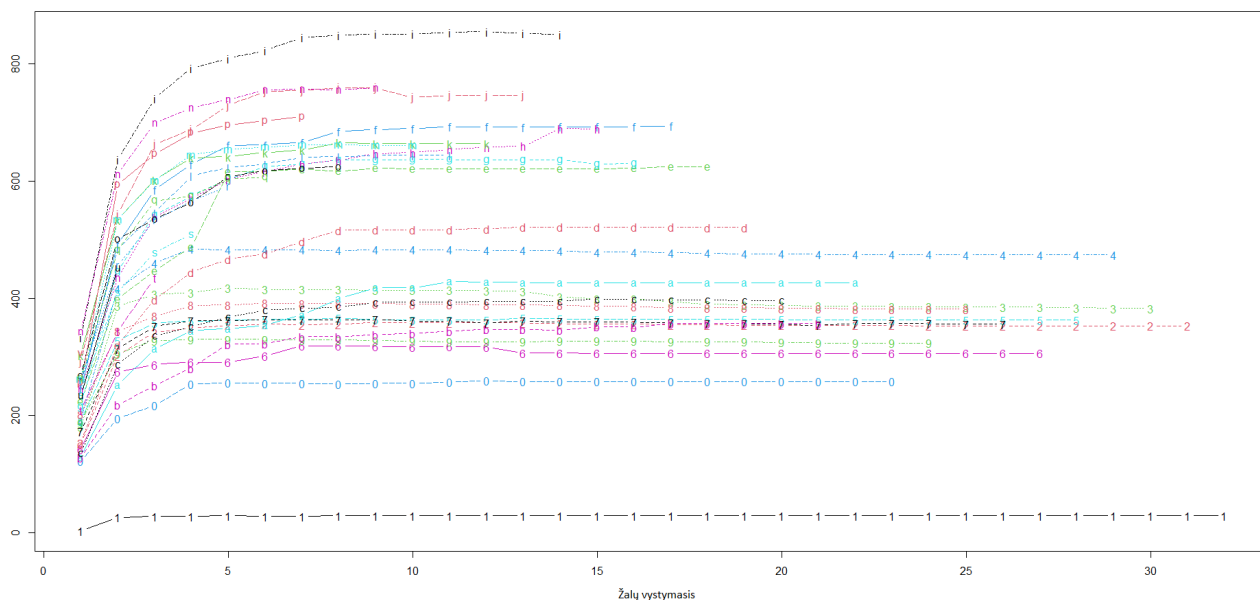
## 2.2.2 Rezultatai

Tam, jog būtų galima aiškiau suprasti rezultatus ir priežastis, kodėl jie tokie gavosi, pravartu parodyti, kaip vystosi tam tikros draudimo rūšies žalos.

Pirmoji sumodeliuota draudimo rūšis - transporto priemonių valdytojų civilinės atsakomybės draudimo (TPVCAD). Šios draudimo rūšies žalų vystymasis pavaizduotas grafikuose:



3 pav.: Žalų vystymasis pagal žalos įvykio ketvirčius.



4 pav.: Žalų vystymasis

Grafikuose matosi žalų išmokų vystymasis bėgant laikui, t.y., pagal žalų vystymosi ketvirčius. Žalų išmokos, lyginant 2001 ir 2010 įvykių metus, padidėjo dėl augusio draudimo portfelio dydžio. Taip bus su visomis nagrinėjamomis draudimo rūšimis.

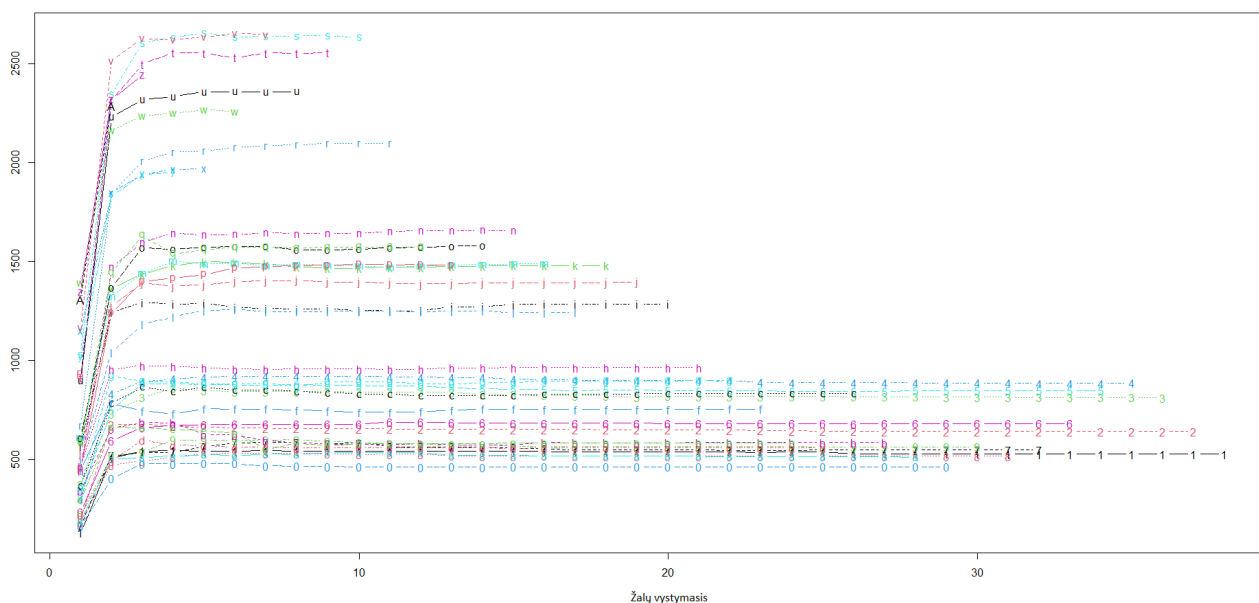
TPVCAD draudimo rūšies žalos vystosi gana tolygiai. Kaip matome iš grafikų, žalos pranešamos gana greitai ir nėra labai ilgai vėluojančių žalų, ko ir buvo galima tikėtis. Apskaičiavus nežinomas reikšmes pagal formulę, gauti rezultatai:

|          | $f_j^{(1)}$ | $f_j^{(2)}$ | $f_j^{(3)}$ |
|----------|-------------|-------------|-------------|
| $\sigma$ | 19, 31      | 19, 29      | 145, 43     |
| $CV$     | 3, 17%      | 3, 18%      | 21, 73%     |

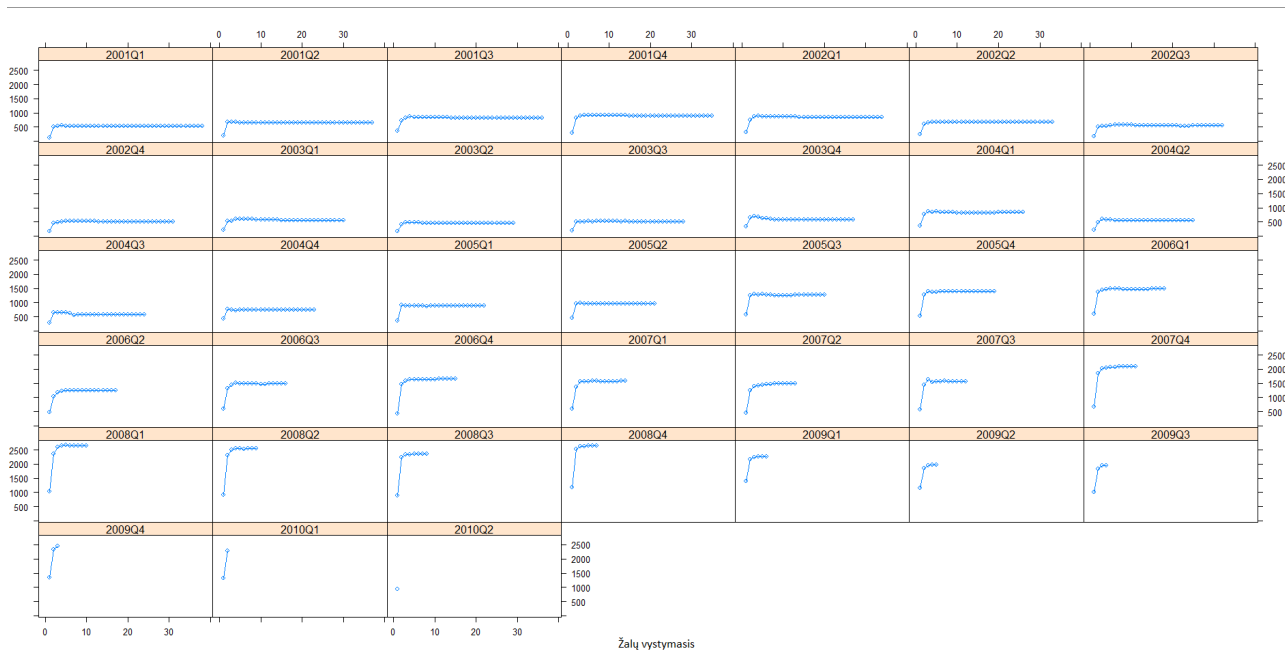
6 lentelė: Gautų įverčių palyginimas pagal žalų vystymosi koeficientus

Šiai draudimo rūšiai visiškai netinkamas trečiasis žalų vystymosi koeficientas, o tinkami yra tiek pirmasis, tiek antrasis žalų vystymosi koeficientai, nes jų rezultatai labai panašūs.

Tas pats atlikta ir su kasko draudimo rūšimi. Žalų vystymasis:



5 pav.: Žalų vystymasis pagal įvykio ketvirčius.



6 pav.: Žalų vystymasis

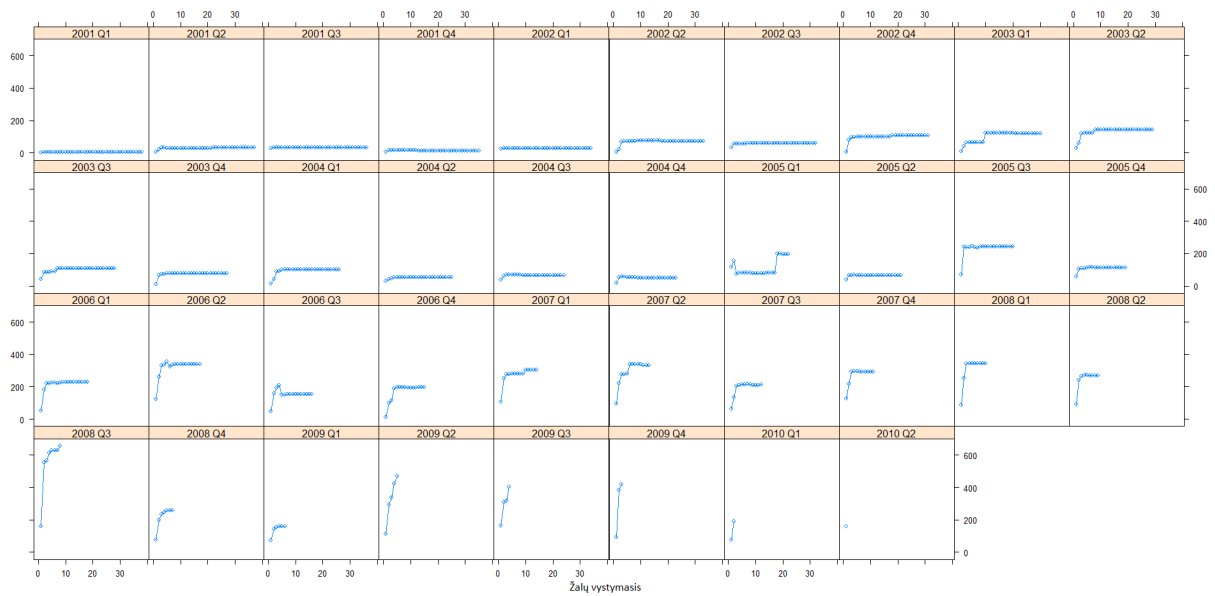
Kaip matyti iš paveikslėlių, ši draudimo rūšis taip pat kaip ir TPVCAD yra gana pastovi, nesimato didelių šuolių, nes žalos yra pranešamos greitai. Gauti rezultatai:

|          | $f_j^{(1)}$ | $f_j^{(2)}$ | $f_j^{(3)}$ |
|----------|-------------|-------------|-------------|
| $\sigma$ | 65, 24      | 99, 21      | 150, 88     |
| $CV$     | 3, 77%      | 5, 71%      | 22, 34%     |

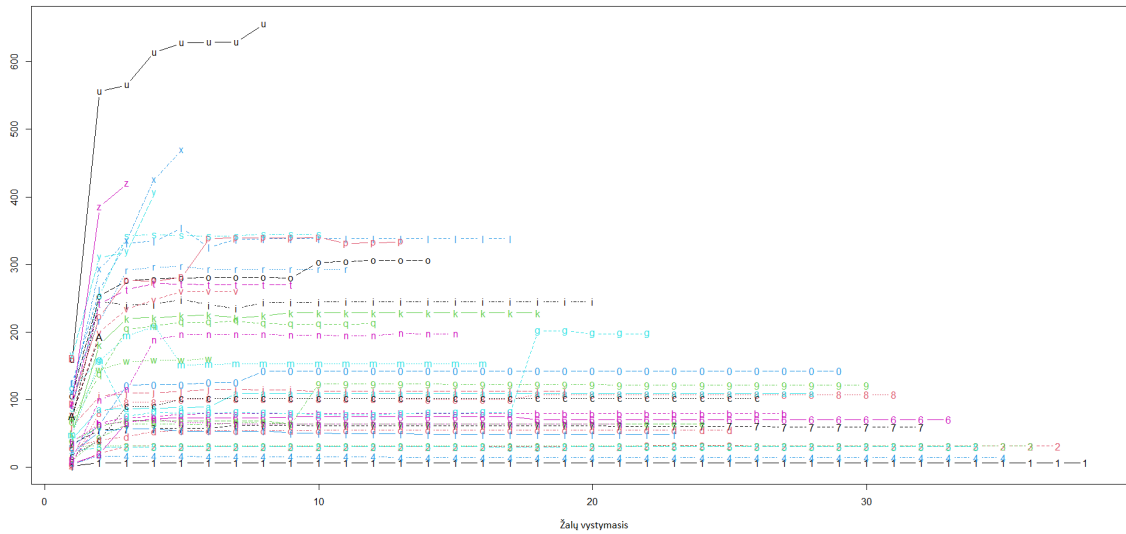
7 lentelė: Gautų įverčių palyginimas pagal žalų vystymosi koeficientus

Šios draudimo rūšies modeliui su pasirinktais parametrais tinkamiausias žalų vystymosi koeficientas -  $f_j^{(1)}$ , su juo gaunasi mažiausias variacijos koeficientas - 3.77%.

Trečioji draudimo rūšis - turto draudimas. Jai atlikti analogiški skaičiavimai.



7 pav.: Žalų vystymasis pagal įvykio ketvirčius.



8 pav.: Žalų vystymasis

Ši draudimo rūšis yra išskirtinė. Priešingai nei transporto draudimo atveju, turto žalos neretai yra pranešamos vėliau. Taip gali nutikti dėl jau minėtų priežasčių - užsitęsęs žalos nagrinėjimo laikas, ypač, kai žala yra didelė, t.y., pareiškiamą pretenzija draudimo įmonei atlyginti didelius finansinius nuostolius. Kitas variantas - žala pastebima po ilgesnio laiko tarpo, pvz., vagystės atveju pavogtas daiktas gali būti pastebimas ne iškart ir pan.

Taigi, grafikuose matomi netolygūs žalų pranešimų šuoliai, pavyzdžiui, 7 pav. 2005 metų pirmą ketvirtį įvykusi žala buvo pranešta žymiai vėliau nei įvyko - tik per 18-ąją žalų vystymosi ketvirtį. Tai dar kartą įrodo, jog yra labai svarbu tinkamai sumodeliuoti nežinomus dydžius ir su jų pagalba formuoti rezervus įvykusioms, bet nepraneštomis žalomis.

Turto draudimo rūšies modeliavimo rezultatai:

|          | $f_j^{(1)}$ | $f_j^{(2)}$ | $f_j^{(3)}$ |
|----------|-------------|-------------|-------------|
| $\sigma$ | 59, 51      | 53, 59      | 150, 84     |
| $CV$     | 20, 42%     | 17, 98%     | 22, 34%     |

8 lentelė: Turto draudimo gautų įverčių palyginimas pagal žalų vystymosi koeficientus

Gavome, jog sukonstruotas modelis nėra itin tinkamas nežinomiems dydžiams apskaičiuoti, nes yra gana dideli nukrypimai, "išsišokančios" reikšmės, ir tai yra jautrioji šio modelio dalis. Lyginant su transporto draudimo rūšimis, panašumas yra tas, jog su trečiuoju koeficientu  $\hat{f}_j^{(3)}$  taip pat gaunamas prasčiausias rezultatas.

Visgi galima teigti, jog turto draudimo rūšiai labiausiai tinkamas variantas su  $\hat{f}_j^{(2)}$  žalų vystymosi koeficientu, nes gaunamas mažiausias standartinis nuokrypis.

**Modelis A:** TPVCAD draudimo rūšiai su parametrais  $\alpha = 3$  ir  $\sigma = 1$  rezultatai gavosi beveik tokie patys tiek su  $f_j^{(1)}$ , tiek su  $f_j^{(2)}$  - pirmuoju atveju  $\sigma = 19,31$ ,  $CV = 3,18\%$ , o antruoju -  $\sigma = 19,33$ ,  $CV = 3,17\%$ , todėl galima teigti, jog šiai draudimo rūšiai galima naudoti tiek pagrindinį modelį, tiek modelį A. Kitoms draudimo rūšims rezultatai gavosi prastesni nei su pagrindiniu modeliu.

**Modelis B:** TPVCAD draudimo rūšiai pagal šį modelį negauta geresnių rezultatų. Tuo tarpu kasko draudimo rūšiai gautas šiek tiek geresnis rezultatas nei pagal pagrindinį modelį su  $f_j^{(2)}$  -  $\sigma = 28,96$ ,  $CV = 4,65\%$ , bet tai nėra geriausias rezultatas, kurį pavyko pasiekti modeliuojant su pagrindiniu modeliu. Turto draudimo rūšiai rezultatai pagerėjo ir su  $f_j^{(1)}$ , ir su  $f_j^{(2)}$  žalų vystymosi koeficientais - pirmu atveju  $\sigma = 57,94$ ,  $CV = 19,33\%$ , antruoju -  $\sigma = 54,29$ ,  $CV = 17,72\%$ .

## Išvados

Sumodeliavus trijų draudimo rūšių nežinomas reikšmes po turimais žalų trikampaiais pagal Chain-Ladder metodą atitinkantį laiko eilučių modelį su parinktais parametrais, galima teigti, jog TPVCAD draudimo rūšiai labiausiai tinkamas yra  $\hat{f}_j^{(2)}$  žalų vystymosi koeficientas, kasko draudimui -  $\hat{f}_j^{(1)}$ , o turto draudimui -  $f_j^{(2)}$ , nes gaunasi mažiausi standartiniai nuokrypiai ir variacijos koeficientai. Vidutinis žalų vystymosi koeficiento įvertinys palyginus su mažiausių kvadratų metodo bei Chain-Ladder žalų vystymosi koeficientų įvertiniais yra netinkamiausias visoms paminėtoms draudimo rūšims. Ištyrus modelį A su pasirinktais parametrais  $\sigma_j = 1, \alpha_j = 3$ , TPVCAD gauti panašūs rezultatai kaip su pagrindiniu modeliu. Tuo tarpu modelis B su parametrais  $\sigma_j = 0,01, a_j = 3$  davė geresnius rezultatus turto draudimo rūšiai, tačiau bendru atveju nukrypimai yra gana dideli, todėl šiai draudimo rūšiai reikėtų ieškoti kitų alternatyvų (kitos Chain-Ladder metodo modifikacijos arba apskritai kito metodo).

Apibendrinant galima teigti, jog kiekvienai draudimo rūšiai tinka skirtingos Chain-Ladder metodo modifikacijos ir tai priklauso tiek nuo draudimo rūšies, tiek nuo turimų duomenų ("išsišokančių" reikšmių amplitudės, kiekio) bei pasirinktų modelio parametrų.

## Literatūra

- [1] Mario V. Wüthrich, Michael Merz. Stochastic Claims Reserving Manual: Advances in Dynamic Modeling. Geneva, Swiss Finance Institute, 2015, p. 15.
- [2] Rimantas Kvedaras, Remigijus Leipus, Jonas Šiaulys. Estimation of the Generalizes Stochastic Claims Reserving Model and The Chain-Ladder Method. *Pinigų studijos 2012/1*, Vilnius, Lietuvos bankas, 2012, p. 68-90.
- [3] Jacqueline Friedland. Fundamentals of General Insurance Actuarial Analysis. Society of Actuaries, 2013, p. 178.
- [4] Thomas Mack. Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates. *Astin Bulletin 23(2)*, Munich, 1993, p. 213-225.
- [5] Thomas Mack. The Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates: Recursive Calculation and Inclusion of a Tail Factor. *Astin Bulletin 29(2)*, Munich, 1999, p. 361-366.
- [6] Markus Buchwalder, Hans Bülmann, Michael Merz and Mario V. Wüthrich. The Mean Square Error of Prediction in the Chain Ladder Reserving Method (Mack and Murphy revisited). *Astin Bulletin 36(2)*, 2006, p. 521-542.
- [7] Mario V. Wüthrich. Prediction Error in the Chain Ladder Method. *Insurance: Mathematics and Economics 42*, Zürich, 2008, p. 378-388.

## Priedai

Šiame darbe buvo naudotas statistinis R paketas. Parašytas kodas (kasko draudimo pavyzdys, modelis A ir modelis B užkomentuoti):

```
myCSVfile <- "C:/Users/vikto/Desktop/Bakalaurinis/MOD.csv" #žalų trikampio nuskaitymas iš failo
dat <- read.csv(file=myCSVfile)
library(ChainLadder)
library(MonteCarlo)
library(truncnorm)
tri <- dat[,-1]
tri <- as.matrix(tri)
dimnames(tri) <- list(origin=dat[,1], dev=1:ncol(tri))
tri <- as.triangle(tri)
plot(tri)
plot(tri, lattice=TRUE)

myCSVfile1 <- "C:/Users/vikto/Desktop/Bakalaurinis/MOD_values.csv" #realių reikšmių po trikampiu nusk
data <- read.csv(file=myCSVfile1)
triangle <- data[,-1]
dimnames(triangle) <- list(origin=data[,1], dev=1:ncol(triangle))
full.triangle <- tri
n <- ncol(tri)

f_1 <- sapply((n-1):1, function(i){ #žalų vystymosi koeficiento OLS skaičiavimai
sum(tri[1:i, n-i+1]*tri[1:i, n-i])/sum(tri[1:i, n-i]^2)
})
f_1 <- replace(f_1, f_1<=1, 1.0001)
dev_period <- 1:(n-1)
plot(log(f_1-1) ~ dev_period, main="Log-linear extrapolation of age-to-age factors")
tail.model <- lm(log(f_1-1) ~ dev_period)
abline(tail.model)
co <- coef(tail.model)
tail <- exp(co[1] + c(n:(n + 100)) * co[2]) + 1 #ekstrapoliavimas 100 vystymosi periodų
f_1.tail <- prod(tail)
f_1.tail
(f_1 <- c(f_1, f_1.tail))
```

```

plot(100*(rev(1/cumprod(rev(c(f_1, tail[tail>1.0001]))))), t="b",
main="Expected claims development pattern",
xlab="Dev. period", ylab="Development % of ultimate loss") #grafikas

f_2 <- sapply((n-1):1, function(i){ #žalų vystymosi koeficiento CL skaičiavimai
sum(tri[1:i, n-i+1])/sum(tri[1:i, n-i])
})
f_2 <- replace(f_2, f_2<=1, 1.0001)
dev_period <- 1:(n-1)
plot(log(f_2-1) ~ dev_period, main="Log-linear extrapolation of age-to-age factors")
tail.model <- lm(log(f_2-1) ~ dev_period)
abline(tail.model)
co <- coef(tail.model)
tail <- exp(co[1] + c(n:(n + 100)) * co[2]) + 1 #ekstrapoliavimas 100 vystymosi periodų
f_2.tail <- prod(tail)
f_2.tail
(f_2 <- c(f_2, f_2.tail))

f <- sapply((n-1):1, function(i){ #žalų vystymosi koeficiento ADF skaičiavimai
tri[1:i, n-i+1]/tri[1:i, n-i]
})
f <- tapply(unlist(f), names(unlist(f)), sum)
f <- f[2:n]
f <- unname(f)
f_3 <- c()
for(i in 1:n) {
d <- n-i+1
f_3 <- c(f_3, (1/d)*f[i])
}
f_3 <- f_3[1:(n-1)]
f_3 <- replace(f_3, f_3<=1, 1.0001)
(f_3 <- c(f_3, 1))

simulated.triangle <- full.triangle #sukuriamas naujas trikampis rezultatams talpinti
simulated.triangle[upper.tri(simulated.triangle)] <- 0
simulated.triangle[lower.tri(simulated.triangle)] <- 0

```

```

simulated.triangle[row(simulated.triangle) == col(simulated.triangle)] <-0

func <- function(pe, h) { #skaičiavimai pagal modelį su pasirinktais parametrais
n <- ncol(tri)
for(k in 1:(n-1)){
full.triangle[(n-k+1):n, k+1] <- round(full.triangle[(n-k+1):n, k]*f_1[k]+full.triangle[(n-k+1):n,k]*
simulated.triangle[(n-k+1):n, k+1]<- full.triangle[(n-k+1):n, k+1]
}

#modelis A
#func <- function(pe) { #skaičiavimai pagal modelį A su pasirinktais parametrais
#n <- ncol(tri)
#alpha <- 3
#sigma <- 1
#for(k in 1:(n-1)){
#full.triangle[(n-k+1):n, k+1] <- round(full.triangle[(n-k+1):n, k]*f_1[k]+sigma*(full.triangle[(n-k+1):n, k]*
#simulated.triangle[(n-k+1):n, k+1]<- full.triangle[(n-k+1):n, k+1]
#}

#modelis B
#func <- function(pe) { #skaičiavimai pagal modelį B su pasirinktais parametrais
#n <- ncol(tri)
#a <- 3
#sigma <- 0.01
#for(k in 1:(n-1)){
#full.triangle[(n-k+1):n, k+1] <- round(full.triangle[(n-k+1):n, k]*f_1[k]+sigma*sqrt(full.triangle[(n-k+1):n, k]*
#simulated.triangle[(n-k+1):n, k+1]<- full.triangle[(n-k+1):n, k+1]
#}

l <- list() #sukuriamas naujas sąrašas
for(row in 1:nrow(simulated.triangle)) { #reikšmės sudedamos į sąrašą
  for(col in 1:ncol(simulated.triangle)) {
    l <- append(l, simulated.triangle[row, col])
  }
}
return(list("v_1"=l[1], #grąžinamos reikšmės
"v_2"=l[2],
...

```

```

"v_1444"=1[1444]
))
}

pe <- runif(500, min = -sqrt(3), max = sqrt(3)) #a.d. epsilon generavimas iš tolygiojo skirstinio
pe <- (pe-mean(pe))/sqrt(var(pe))

a <- 0 #parametrai pagrindiniam modeliui
alpha <- 0
sigma <- 0.01
x <- 1
h <- sigma*x*sqrt(x^(-alpha)+a)
param_list <- list("pe"=pe, "h"=h) #parametrų sąrašas pagrindiniam modeliui
#param_list <- list("pe"=pe) #parametrų sąrašas modeliams A arba B
erg <- MonteCarlo(func=func, nrep=1, param_list=param_list, max_grid = 10000) #Monte Karlo funkcija

head(MakeFrame(erg))
df <- MakeFrame(erg)
df <- round(colMeans(df), digits=2)
df <- data.matrix(df, rownames.force = NA)
to_columns <- df[3:nrow(df)]
#to_columns <- df[2:nrow(df)] naudojamas modeliams A arba B, nes kintamųjų skaičius mažesnis - nėra h

mean_triangle <- matrix(to_columns, nrow=n, ncol = n, byrow = TRUE) #suvidurkintas rezultatų trikampis

subtraction <- round((triangle - mean_triangle), digits=2)^2 #istorinių duomenų ir simuliuotų duomenų
subtraction[is.na(subtraction)] <- 0 #NA reikšmėms priskiriami nuliai
sums <- colSums(subtraction != 0) #jei atimtis nelygi nuliui, tai sumuojama, kiek tokių narių yra
n <- sum(sums)

s <- sqrt(1/n * sum(subtraction)) #standartinis nuokrypis
miu <- sum(mean_triangle)/n
CV <- s/miu*100 #variacijos koeficientas

```

Kitų draudimo rūšių kodai analogiškai, tik pakeisti duomenų failų pavadinimai.