

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Matematikos ir matematikos taikymų bakalauro studijų programos
4 kurso 1 grupės studentas

Lukas Oškelis

Diskontuotų piniginių srautų matematinės savybės

Mathematical Properties of Discounted Cash Flows

Bakalauro baigiamasis darbas

Darbo vadovas Doc. Dr. Andrius Grigutis

Vilnius, 2020

Turinys

1 Įvadas	3
2 Diskontuoti piniginiai srautai	4
2.1 Diskontuotų piniginių srautų skaičiavimo formulė	4
2.2 Diskontuotų piniginių srautų vertinimo būdai	6
2.3 Diskonto normos nustatymas	7
3 Obligacijų rinka	8
3.1 Obligacijos dabartinė vertė	8
3.2 Diuracija ir jos savybės	9
3.3 Modifikuota ir obligacijų portfelio diuracijos	12
3.4 Imunizacija	14
4 Skaičiavimai	15
Santrauka	19
Literatūra	20

1 Įvadas

Diskontuotų piniginių srautų analizė yra projekto, įmonės ar turto įvertinimo metodas, naudojant pinigų laiko vertės sąvokas. Ji buvo pradėta naudoti dar XVIII-XIX a. pramonėje. Po didžiosios ekonominės krizės 1929 m., diskontuotų pinigų srautų analizė ypač išpopuliarėjo kaip akcijų vertinimo metodas. Diskontuotų piniginių srautų analizė plačiai naudojama investicijų finansavimui, nekilnojamojo turto plėtrai, įmonių finansų valdymui ir patentų vertinimui [14]. Pavyzdžiui, diskontuotų pinigų srautų metodai yra naudojami profesionalių investuotojų ir analitikų investiciniuose bankuose, kad nustatyti kiek mokėti už naują verslą. Jie taip pat naudojami didelėse įmonėse finansų analitikų ir projektų vadovų, kad nustatyti ar tam tikras projektas bus gera investicija kaip, pavyzdžiui, naujo produkto išleidimas ar naujas gamybos įrenginys. Trumpai tariant, diskontuoti piniginiai srautai gali būti pritaikomi visur, kur žmogus ar įmonė svarsto mokėti pinigus dabar, tikintis gauti jų daugiau ateityje [1].

Obligacijos taip pat gali būti vertinamos šio metodo principu. Obligacijos turi didelę antrinę rinką, o jų kainos keičiasi atsižvelgiant į vyraujančias palūkanų normas. Būtent šiame darbe ir bus skiriamas dėmesys obligacijoms bei jų vertinimui ir bus bandoma šiek tiek pažvelgti į obligacijų rinką, panagrinėti tam tikras susijusias sąvokas ir savybes. Šio darbo tikslas yra panagrinėti tam tikras obligacijų savybes ir vieną iš jos svarbiausių rodiklių – diuraciją (kitaip modifikuotoji finansinė trukmė). Taip pat apžvelgti, aprašyti ar įrodyti tam tikras diuracijos savybes, jų taikymo būdus ir patikrinti pateiktą teiginių veikimą skaičiavimais.

2 Diskontuoti piniginiai srautai

Šiame skyriuje bus trumpai ir bendrai aprašoma diskontuotų piniginių srautų koncepcija. Taigi bus pristatoma bendra diskontuotų pinigų srautų formulė, pagrindiniai vertinimo būdai ir jų srautų apskaičiavimai. Taip pat diskontuotų piniginių srautų analizei labai svarbus procesas yra diskonto normos nustatymas, todėl bus skiriama dėmesio ir tam. Bus pateikiamos diskonto normos, naudojamos pristatytiems laisviesiems pinigų srautams.

2.1 Diskontuotų piniginių srautų skaičiavimo formulė

Diskontuotas piniginis srautas (toliau DCF) tai suma, kurią sutinkama sumokėti šiandien tikintis gauti numatytą pinigų srautą ateityje, atsižvelgiant į pinigų srautų gavimo rizikos laipsnį [5]. DCF metodas yra dažnai naudojamas įmonių vertinimui ir padeda nustatyti įmonės akcijų tikrąją vertę.

Prieš pradedant nagrinėti DCF reikėtų įsivesti keletą sąvokų:

- Diskonto norma – tai grąžos norma, naudojama diskontuoti ateities pinigų srautus, kad gauti dabartinę jų vertę.
- Laisvasis pinigų srautas - grynieji pinigai, kurie lieka įmonei po to, kai įmonė atlieka visus mokėjimus, reikalingus verslo tęstinumui užtikrinti (paskolos, mokesčiai, investicijos ir t.t.).
- Grynoji dabartinė vertė – tai skirtumas tarp piniginių įplaukų dabartinės vertės ir piniginių išplaukų dabartinės vertės tam tikram laikotarpiui.
- Tęstinė vertė – būsimų pinigų srautų dabartinė vertė po planuojamo laikotarpio pabaigos.
- Kapitalo kaštai – tai įmonės išlaidos, susijusios su lėšų naudojimu iš akcininkų ir kreditorių.

Įmonės vertinimas DCF metodu susideda iš kelių žingsnių. Visų pirma, reikia prognozuoti ateities laisvuosius pinigų srautus bent jau ateinantiems 5-10 metų, kadangi ilgesniam laikotarpiui prognozuoti pajamų ir išlaidų dydžius tampa dar sunkiau. Po to turi būti nustatyta tinkama diskonto norma, kad diskontuoti ateities laisvus pinigų srautus ir apskaičiuoti grynąsias dabartines vertes (NPV). Galiausiai turi būti nustatyta tęstinė vertė [12].

Skaičiuojant įmonės vertę yra naudojamosi ateities būsimais, o ne dabartiniais ar buvusiais pinigų srautais, todėl DCF metodo pagrindas yra dabartinė vertė, kuri apskaičiuojama pagal formulę:

$$NPV = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r)^t},$$

čia: r – diskonto norma; CF – pinigų srautas konkrečiu laikotarpiu, kurį generuoja įmonė; t – metų skaičius; n – prognozuojamas laikotarpis.

Pagal šią formulę dabartinė pinigų vertė yra apskaičiuojama tik baigtiniam metų skaičiui t , tačiau įprastais atvejais įmonė pelną duoda ir vėlesniais metais. Kaip ir buvo minėta anksčiau, reikia apskaičiuoti tęstinę vertę. Darant prielaidą, jog pinigų srautai turės pastovų augimo rodiklį, tęstinės vertės (TV) formulę gali būti užrašyta taip [5]

$$TV = \frac{CF_t(1+g)}{(r-g)},$$

čia: g – planuojama augimo norma.

Taigi pilną diskontuotų pinigų srauto formulę galima užrašyti taip [5]

$$CV = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r)^t} + \frac{TV}{(1+r)^t},$$

čia: CV – įmonės vertė.

Vertinimas diskontuotų pinigų srautų metodu turi savų privalumų ir trūkumų, kurie nurodyti lentelėje [9], [3]:

Privalumai	Trūkumai
Aiškiai atsižvelgiama į būsimų pinigų srautų įtaką vertei.	Tikslios ateities prognozės yra labai svarbios.
Yra pagrįstas turto pagrindais, todėl jis yra mažiau veikiamas rinkos lūkesčių ir nuomonių svyravimo.	Reikalinga daug duomenų ir informacijos, kurią gali būti sudėtinga gauti arba ji gali būti iškraipyta.
Yra teoriškai pagrįstas ir plačiai naudojamas, dauguma teoretikų ir analitikų pripažįsta jo rezultatus.	Jautriai reaguoja net į mažiausius diskonto normos pasikeitimus.
Metodas labiausiai tinka stabilioms įmonėms, kurių pinigų srautai yra teigiami, gana patikimai prognozuojami, ir kai yra pagrindas nustatyti diskonto normai.	Metodas laikomas sunkiai prieinamu nepatyrusiems vertintojams.
	Reikia tiksliai apskaičiuoti kapitalo kaštus.

Lentelė 1. Diskontuotų pinigų srautų metodo naudojimo privalumai ir trūkumai

2.2 Diskontuotų piniginių srautų vertinimo būdai

Atliekant vertinimą DCF metodu yra išskirtini du pagrindiniai vertinimo būdai:

- Grynasis pinigų srautas nuosavybei
- Grynasis pinigų srautas įmonei

Abiem atvejais yra diskontuojami laukiami pinigų srautai, tačiau skiriasi diskonto normos bei patys pinigų srautai. Grynojo pinigų srauto nuosavybei vertinimas dažniausiai naudojamas, kai vertinama savininkų nuosavybė (akcijos). Tuo tarpu grynojo pinigų srauto įmonei vertinimas taikomas visais atvejais, kai norima vertinti įmonę, o ne nustatyti savininkų nuosavybės vertę.

Laisvas pinigų srautas nuosavybei – tai laisvas pinigų srautas tik akcininkams. Šis pinigų srautas užrašomas taip [9]:

Grynasis pelnas
+ Ilgalaikio turto nusidėvėjimas (amortizacija)
= Pinigų srautai iš veiklos akcininkams
- Privilegijuotųjų akcijų dividendai
- Ilgalaikės investicijos
- Apyvartinio kapitalo poreikis
- Skolos nominalo grąžinimai
+ Naujos skolos gavimai
= Laisvas pinigų srautas nuosavybei

Laisvo pinigų srauto nuosavybei metodui yra naudojami nuosavybės pinigų srautas ir reikalaujama kapitalo grąža (kaip diskonto norma).

Laisvas pinigų srautas įmonei – tai laisvas pinigų srautas visiems akcininkams ir kreditoriams. Šis pinigų srautas užrašomas taip [9]:

Pelnas prieš palūkanas ir mokesčius (EBIT)(1-mokesčiai)
+ Nusidėvėjimas
- Papildomas apyvartinis kapitalas
- Investicijos į ilgalaikį turtą
= Laisvasis pinigų srautas įmonei

Laisvo pinigų srauto įmonei metodo taikymui yra naudojami laisvas pinigų srautas ir svertiniai vidutiniai kapitalo kaštai (kaip diskonto norma). Ryšys tarp laisvojo pinigų srauto ir nuosavybės pinigų srauto gali būti išreikštas tokia lygybe [6]

$$ECF_t = FCF_t + \Delta D_t - I_t (1-T)$$

čia: ECF_t - nuosavybės pinigų srautas laiko momentu t , FCF_t - laisvas pinigų srautas laiko momentu t , ΔD_t – skolos padidėjimas laiko momentu t , I_t – įmonės sumokėtos palūkanos laiko momentu t , T – mokesčių norma.

2.3 Diskonto normos nustatymas

Diskontavimas – tai dabartinės vertės nustatymo procesas pagal žinomą būsimąją vertę. Skirtingiems pinigų srautams yra naudojamos skirtingų tipų diskonto normos.

Diskonto normos nustatymas dažnai yra sudėtingas, daug informacijos ir skaičiavimų reikalaujantis procesas. Netgi nežymūs jos pasikeitimai sukelia didelius įmonės vertės pokyčius. Kaip buvo minėta anksčiau, nuosavybės pinigų srautui ir laisvam pinigų srautui įmonei diskonto norma yra skaičiuojama skirtingai.

Norint nustatyti nuosavybės pinigų srauto diskonto normą, o tuo pačiu ir reikalaujamą kapitalo grąžą, dažniausiai yra naudojamas kapitalo įkainojimo modelis (CAPM). Jis yra užrašomas taip [5], [11]

$$K_e = E(R_i) = R_F + \beta_i(E(R_M) - R_F),$$

čia: $K_e = E(R_i)$ – reikalaujama kapitalo grąža, R_F – nerizikinga palūkanų norma, β_i – koeficientas beta, $E(R_M)$ – tikėtina rinkos portfelio grąža.

Matematiškai, koeficientas beta yra kovariacija tarp kapitalo grąžos ir rinkos portfelio grąžos ir padalinta iš rinkos portfelio grąžos dispersijos [5]:

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\text{var}(R_M)}.$$

Svertiniai vidutiniai kapitalo kaštai (WACC) – tai norma, kuria gryniesi pinigų srautai turi būti diskontuojami, kad gauti tokį patį rezultatą kaip ir naudojant nuosavybės pinigų srautus, diskontuotus pagal reikalaujamą nuosavybės grąžą. WACC sudarytas iš dviejų labai skirtingų dydžių: skolos kaštų ir reikalingos nuosavo kapitalo grąžos. Standartinė WACC formulė yra tokia [6]

$$WACC = \frac{K_d(1 - T)D_{t-1} + K_e \cdot E_{t-1}}{E_{t-1} + D_{t-1}},$$

čia: K_d – skolos kaštai, E_{t-1} – skolos vertė laiko momentu $t-1$, D_{t-1} – kapitalo vertė laiko momentu $t-1$.

3 Obligacijų rinka

Šio skyriaus 3.1 poskyryje bus įrodyta viena iš obligacijos dabartinės vertės formulių. Taip pat kituose poskyriuose bus plačiau nagrinėjama diuracijos sąvoka, jos savybės, kai kurios iš jų bus įrodytos. Bus pristatytas vienas iš diuracijos taikymo būdų – imunizacija.

3.1 Obligacijos dabartinė vertė

Obligacijos - skolos vertybiniai popieriai, suteikiantys jų savininkui teisę gauti iš obligaciją išleidusio asmens nustatytais aplinkybėmis nominaliąją obligacijos vertę, palūkanas ar kokį nors turto ekvivalentą arba tiesiog turtines teises. Norint toliau apskaičiuoti obligacijų kainas ir piniginius srautus, reikia įsivesti keletą sąvokų:

- N – obligacijos išpirkimo kaina arba nominalas;
- T – obligacijos išpirkimo terminas;
- c – kuponinės palūkanos. Tai metinės palūkanos, mokamos obligacijos savininkui;
- $C = N \cdot c$ – kuponai. Tai suma, mokama obligacijos savininkui;
- m – kiek kartų per metus mokamos kuponinės palūkanos;

Toliau obligacijos dabartinė vertė bus žymima raide P .

Teiginys 1. Obligacijos dabartinė vertė randama iš formulės

$$P = \sum_{k=1}^{mT} \frac{\frac{C}{m}}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^k} + \frac{N}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT}} = \frac{C}{r} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT}}\right) + \frac{N}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT}} = N \left(\frac{c}{r} + \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT}} \left(1 - \frac{c}{r}\right) \right).$$

Įrodymas. Norint apskaičiuoti dabartinę obligacijų vertę, pirma susumuokime visas ateities pinigų srautų dabartines vertes (kai visi periodiniai mokėjimai vienodi):

$$P = \frac{\frac{C}{m}}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)} + \frac{\frac{C}{m}}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^2} + \dots + \frac{\frac{C}{m}}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT}} + \frac{N}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT}} \\ = \sum_{k=1}^{mT} \frac{\frac{C}{m}}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^k} + \frac{N}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT}},$$

čia $\frac{N}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT}}$ yra nominalo dabartinė vertė. Pagal geometrinės progresijos sumos formulę

$$\sum_{k=1}^{mT} \frac{C/m}{(1 + r/m)^k} = \frac{C/m}{r/m} \left(1 - \frac{1}{(1 + \frac{r}{m})^{mT}} \right) = \frac{C}{r} \left(1 - \frac{1}{(1 + \frac{r}{m})^{mT}} \right).$$

Žinome, jog $C = N \cdot c$. Tada

$$\begin{aligned} \frac{N \cdot c}{r} \left(1 - \frac{1}{(1 + \frac{r}{m})^{mT}} \right) + \frac{N}{(1 + \frac{r}{m})^{mT}} &= N \left(\frac{c}{r} - \frac{c}{r(1 + \frac{r}{m})^{mT}} + \frac{1}{(1 + \frac{r}{m})^{mT}} \right) \\ &= N \left(\frac{c}{r} + \frac{1}{(1 + \frac{r}{m})^{mT}} \left(1 - \frac{c}{r} \right) \right). \quad \square \end{aligned}$$

Verta pastebėti, jog obligacijoms yra apibrėžiama speciali diskonto norma, angliškoje literatūroje rašoma kaip „yield to maturity“ [4], [13], [7]. Ši diskonto norma yra labai artima investicinio projekto vidinei grąžos normai: tai yra diskonto norma, su kuria obligacijos rinkos kaina yra lygi obligacijos dabartinei vertei P [7]. Būtent šis rodiklis ir yra dažniausiai naudojamas su obligacijomis susijusiose formulėse kaip diskonto norma.

Taip pat galima pastebėti tam tikras sąsajas tarp dydžių, lemiančių obligacijos dabartinę vertę. Jei kuponinės palūkanos c yra lygios diskonto normai r , tai tada obligacijos dabartinė vertė P bus lygi nominalui N . Jeigu kuponinės palūkanos didesnės už diskonto normą, tai obligacijos dabartinė vertė bus didesnė už nominalią vertę ir ši obligacija bus parduodama su priemoka. Galiausiai, jei kuponinės palūkanos mažesnės už diskonto normą, tai obligacijos dabartinė vertė bus mažesnė už nominalą ir obligacija bus parduodama su nuolaida [2].

3.2 Diuracija ir jos savybės

Taip pat iš teiginio 1 galima pastebėti, jog pasikeitimai obligacijos dabartinėje vertėje yra atvirkščiai susiję su diskonto normos r pasikeitimais. Kuo didesnė diskonto norma, tuo mažesnė obligacijos vertė. Vienas iš dydžių naudojamas nustatant obligacijos kainos jautrumo diskonto normos pokyčiui yra diuracija. Diuracija D (dar kitaip vadinama Macaulay diuracija) yra apibrėžiama kaip ateities diskontuotų pinigų srautų laiko svertinis vidurkis. Konkrečiai, diuracija gali būti apskaičiuojama kaip diskontuotų pinigų srautų svertinis vidurkis, kur svoris kiekvienam pinigų srautui yra lygus konkrečiam laikui, kurį investuotojui teks palaukti, kad gauti tą pinigų srautą [13]. Formulė apskaičiuoti diuracijai gali būti išreikšta taip [10]

$$D = \frac{1}{P} \left(\sum_{t=1}^T \frac{tC}{(1+r)^t} + \frac{TN}{(1+r)^T} \right).$$

Galima pabrėžti, jog ši formulė galioja tik tada, jei kuponas C , nominalas N ir obligacijos išpirkimo terminas T nepriklauso nuo diskonto normos r . Kitaip tariant, gryųjų pinigų srautams pelningumo pokyčiai įtakos neturi [10]. Tiesa, ši formulė galioja tokioms obligacijoms, kurių kuponinės palūkanos mokamos kartą per metus. Jeigu kuponinės palūkanos mokamos kas pusmetį, kas ketvirtį ir t.t., tada [10]

$$D = \frac{1}{P} \left(\sum_{t=1}^T t \frac{C/m}{(1 + \frac{r}{m})^t} + \frac{TN}{(1 + \frac{r}{m})^T} \right).$$

Verta pastebėti, jog šiuo atveju diuraciją gausime tam tikram periodų, o ne metų skaičiui. Pavyzdžiui, kas pusmetiniai kuponai 2 metams turės 4 periodus, kuriems diuracija ir bus skaičiuojama. Norint gauti diuraciją metams, reikia gautą reikšmę padalinti iš kuponinių palūkanų gavimo dažnumo per metus [10]

$$D \text{ (per metus)} = \frac{D}{m}.$$

Toliau nagrinėsime tam tikras diuracijos savybes.

Teiginys 2. Jei Δr diskonto pokytis, o ΔP tą pokytį atitinkantis pradinės vertės pokytis, t.y $\Delta P := P(r + \Delta r) - P(r)$. Tada

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta r} = -D \frac{P}{1+r}$$

arba

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D \frac{\Delta r}{1+r},$$

kai Δr mažas fiksuotas skaičius.

Įrodymas. Šio teiginio įrodymas yra pateiktas [8] šaltinyje. $\square$

Teiginys 3. Kai kurios diuracijos savybės:

3.1 Bekuponių obligacijų diuracija yra lygi T .

3.2 Neterminuotos obligacijos diuracija, $T \rightarrow \infty$, yra $\frac{1+r}{r}$.

3.3 Diuracija mažėja, kai kuponinės palūkanos c didėja, o kiti parametrai yra fiksuoti.

3.4 Diuracija mažėja, kai diskonto norma r didėja, o kiti parametrai yra fiksuoti.

Įrodymas. Savybės 3.1 ir 3.2 yra įrodytos [8] šaltinyje.

Įrodysime 3.3. Visų pirma, reikia išvesti diuracijos formulę uždaroje formoje (formulė be sumavimų). Kad gauti šią uždara formą, galima pasinaudoti savybe (teiginys 2), jog

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{dP}{P} = -\frac{D}{1+r} dr.$$

Taip pat obligacijos dabartinė vertė čia

$$P = \frac{C}{r} (1 - (1+r)^{-T}) + N(1+r)^{-T}.$$

Dalindami abi puses iš nominalo N, gauname

$$\frac{P}{N} = \frac{1}{r} (c(1 - (1+r)^{-T}) + r(1+r)^{-T}).$$

Logaritmuojame

$$\log\left(\frac{P}{N}\right) = -\log r + \log(c(1 - (1+r)^{-T}) + r(1+r)^{-T}).$$

Skaičiuojame išvestinę pagal r

$$\frac{d \log\left(\frac{P}{N}\right)}{dr} = \frac{d \log P}{dr} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = -\frac{1}{r} + \frac{cT(1+r)^{-T-1} + (1+r)^{-T} - rT(1+r)^{-T-1}}{c(1 - (1+r)^{-T}) + r(1+r)^{-T}}.$$

Padauginame gautą išraišką iš $-(1+r)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1+r}{r} - (1+r) \frac{cT(1+r)^{-T-1} + (1+r)^{-T} - rT(1+r)^{-T-1}}{c - c(1+r)^{-T} + r(1+r)^{-T}} \\ &= 1 + \frac{1}{r} - (1+r) \frac{cT(1+r)^{-T-1} + (1+r)^{-T} - rT(1+r)^{-T-1}}{c - c(1+r)^{-T} + r(1+r)^{-T}} \cdot \frac{(1+r)^T}{(1+r)^T} \\ &= 1 + \frac{1}{r} - (1+r) \frac{cT(1+r)^{-1} + 1 - rT(1+r)^{-1}}{c(1+r)^T - c + r} \\ &= 1 + \frac{1}{r} - \frac{cT + (1+r) - rT}{c(1+r)^T - c + r} = 1 + \frac{1}{r} + \frac{T(r-c) - (1+r)}{c((1+r)^T - 1) + r}. \end{aligned}$$

Galime matyti, jog kai kuponinės palūkanos c didėja, diuracija neabejotinai mažės, nes tokiu atveju dešinėsios trupmenos skaitiklis mažės, o vardiklis didės.

Įrodysime 3.4. Skaičiuojame diuracijos išvestinę pagal diskonto normą r ir pažiūrėkime, ar ji bus neigiama. Iš diuracijos formulės

$$D = \frac{1}{P} \left(\sum_{t=1}^T \frac{tC_t}{(1+r)^t} \right),$$

(čia C_t – pinigų srautas(kuponai ir nominalas), kurį gauname laiko momentu t) gauname

$$\frac{dD}{dr} = \frac{-1}{P^2} \left(\sum_{t=1}^T t^2 C_t (1+r)^{-t-1} \cdot P(r) + \sum_{t=1}^T t C_t (1+r)^{-t} \cdot P'(r) \right).$$

Iškeldami prieš skliaustus $(1 + r)^{-1}$ ir padaugindami kiekvieną narį skliaustuose iš $1/P^2$ gauname

$$\frac{dD}{dr} = -(1 + r)^{-1} \left(\frac{\sum_{t=1}^T t^2 C_t (1 + r)^{-t}}{P(r)} + (1 + r) \frac{P'(r)}{P(r)} \frac{\sum_{t=1}^T t C_t (1 + r)^{-t}}{P(r)} \right).$$

Antrasis narys skliaustuose yra $-D^2$. Galime užrašyti

$$\frac{dD}{dr} = -(1 + r)^{-1} \left(\frac{\sum_{t=1}^T t^2 C_t (1 + r)^{-t}}{P(r)} - D^2 \right). \quad (1)$$

Lygybės (1) skliaustuose galime pastebėti mokėjimo laikų dispersiją. Iš tikrųjų, tai yra lygu laiko t ir jų vidurkio D skirtumų kvadratų svertiniam vidurkiui. Pažymėkime

$$w_t = \frac{C_t (1 + r)^{-t}}{P(r)},$$

čia

$$\sum_{t=1}^T w = 1 \text{ ir } D = \sum_{t=1}^T t w_t.$$

Tada išraiška lygybės (1) skliaustuose tampa lygi

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T t^2 w_t - D^2 &= \sum_{t=1}^T t^2 w_t - 2D \sum_{t=1}^T t w_t + D^2 \sum_{t=1}^T w_t = \sum_{t=1}^T w_t (t^2 - 2Dt + D^2) \\ &= \sum_{t=1}^T w_t (t - D)^2. \end{aligned}$$

Ši paskutinė išraiška yra mokėjimų laiko dispersija, kurią pasižymėsime raide S . Gauname

$$\frac{dD}{dr} = -(1 + r)^{-1} S.$$

Be abejo, S yra matuojama metais ir visada bus teigiama, o diuracijos išvestinė bus neigiama. Iš to išplaukia, jog didėjant diskonto normai, diuracija mažėja. $\square$

3.3 Modifikuota ir obligacijų portfelio diuracijos

Dar vienas dažnai naudojamas dydis yra modifikuota diuracija. Ji parodo apytikslį procentinį obligacijos kainos pokytį, t.y. kaip diskonto normos padidėjimas ar sumažėjimas per 1 procentą, procentaliai pakeičia obligacijos kainą. Jos formulė yra tokia [4]:

$$D_{\text{mod}} = \frac{D}{1 + r/m}.$$

Kadangi didėjant diskonto normai, obligacijos kaina mažėja, tai egzistuoja atvirkštinis santykis tarp modifikuotos diuracijos ir apytikslio procentinio obligacijos kainos pokyčio duotam diskonto normos pasikeitimui. Taip pat modifikuota diuracija duoda gerą aproksimaciją tik mažiems diskonto normos pasikeitimams [4].

Taip pat diuracija turi priklausomybės savybę. Tai reiškia, jog diuracijos sąvoka gali būti pritaikyta ne tik kiekvienai obligacijai atskirai, bet ir obligacijų portfeliui [13]. Obligacijų portfelio diuracija yra lygi visų portfelio obligacijų diuracijų svertiniam vidurkiui, kur svoris, pritaikomas kiekvienai obligacijai, yra tos obligacijos rinkos vertė. Turime tokią formulę [7]

$$D_p = \sum_{j=1}^n D_j X_j ,$$

čia: X_j – obligacijos svoris portfelyje, kas yra obligacijos rinkos vertė padalinta iš visų portfelyje esančių obligacijų vertės.

Reiktų paminėti, jog visų portfelyje esančių obligacijų diskonto norma turėtų būti vienoda. Panagrinėkime tokį pavyzdį.

Pavyzdys. Tarkime, kad turime keturių obligacijų portfelį, kurio vertė 100 mln. dolerių.

Obligacija	Vertė	Svoris	Diuracija
A	10 mln.	0.1	4
B	40 mln.	0.4	7
C	30 mln.	0.3	6
D	20 mln.	0.2	2

Lentelė 2. Obligacijų portfelio duomenys

Pagal formulę, pateiktą anksčiau, šio portfelio diuracija yra

$$0,1 \cdot 4 + 0,4 \cdot 7 + 0,3 \cdot 6 + 0,2 \cdot 2 = 5,4$$

Taigi šio portfelio diuracija yra 5,4 ir gali būti aiškinama taip: jeigu šių keturių portfelio obligacijų diskonto normos pasikeistų per 1%, tai portfelio vertė apytiksliai pasikeistų per 5,4%. Taip pat yra atsižvelgiama ir į kiekvienos obligacijos indėlį į portfelio diuraciją. Šiuo atveju:

Obligacija	Vertė	Svoris	Diuracija	Indėlis į diuraciją
A	10 mln.	0.1	4	0.4
B	40 mln.	0.4	7	2.8
C	30 mln.	0.3	6	1.8
D	20 mln.	0.2	2	0.4
Viso	100 mln.	1		5.4

Lentelė 3. Obligacijų indėlis į diuraciją

3.4 Imunizacija

Norint apsaugoti nuosavą kapitalą nuo diskonto normos r svyravimų, yra pasitelkiamas toks procesas kaip imunizacija. Portfelis yra laikomas imunizuotu laikymo laikotarpiui, jeigu jo vertė tam tikro periodo pabaigoje, bet kokiam normų svyravimui per tą periodą, yra bent jau tokia didelė, kaip ji būtų buvusi diskonto normai nepasikeitus. Taigi imunizacijos proceso esmė yra suformuoti tokį obligacijų portfelį, jog to portfelio diuracija būtų lygi investavimo horizonto ilgiui (laikas, kurį investuotojas tikisi laikyti savo portfelį iki pardavimo) ir kurio dabartinė vertė yra lygi ateities įsipareigojimų dabartinei vertei [10]. Tolesniam nagrinėjimui konkrečiai paimkime aktyvus (turtas) ir pasyvus (įsipareigojimai). Imunizacija yra dinamiškas procesas ir po kiekvieno periodo pasikeitus diskonto normai, reikia iš naujo perskaičiuoti diuracijas ir subalansuoti aktyvus bei pasyvus [7], [10]. Tam yra kelios priežastys. Visų pirma, bėgant laikui diuracija mažėja ir jos mažėjimas, išskyrus bekuponines obligacijas, nėra lygus obligacijos išpirkimo terminui mažėjimui. Net jeigu diskonto norma nesikeičia, prabėgus vieneriems metams, diuracija nesumažės metais ir teks atlikti pakeitimus, kad diuracija sumažėtų metais. Taip pat gali įvykti tokia situacija, jog aktyvų ir pasyvų diuracijos keičiasi nevienodai [10].

4 Skaičiavimai

3 skyriuje minėtų ir įrodytų teiginių veikimui patikrinti paimkime tam tikrus obligacijų duomenis. Diskonto normos paimtos prasidedant naujam kupono periodui, kadangi rinkoje diskonto norma yra nuolat besikeičiantis rodiklis.

Pirmosios yra įmonės obligacijos ir jų pagrindiniai rodikliai yra tokie:

- obligacijos išpirkimo terminas – 2 metai;
- diskonto norma – 10,5%;
- kuponinės palūkanos – 6%, mokamos kartą per metus;
- nominalas – 100 \$;
- kuponas – 6 \$.

Antrosios yra valstybės obligacijos ir jų rodikliai yra tokie:

- obligacijos išpirkimo terminas – 9 metai;
- diskonto norma – 0,68%;
- kuponinės palūkanos – 1,625%, mokamos du kartus per metus;
- nominalas - 100 \$;
- kuponas – 1,625 \$.

Apskaičiuosime obligacijų dabartines vertes. Pasinaudokime pirmąją obligacijos vertės lygybę iš 3 skyriaus 1 teiginio ir skaičiuokime pirmųjų obligacijų vertę

$$P = \frac{6}{1 + 0,105} + \frac{6}{(1 + 0,105)^2} + \frac{100}{(1 + 0,105)^2} = 92,24 \$.$$

Tarkime, kad kuponinės palūkanos mokamos ne kartą, o du kartus per metus. Tada:

$$P = \frac{3}{1 + 0,105/2} + \frac{3}{(1 + 0,105/2)^2} + \frac{3}{(1 + 0,105/2)^3} + \frac{3}{(1 + 0,105/2)^4} + \frac{100}{(1 + 0,105/2)^4} = 92,07 \$$$

Galime pamatyti, jog kuponinių palūkanų dažnumas neturi didelės įtakos dabartinei vertei. Taip pat pabandykime pasinaudoti tame pačiame teiginyje išvesta obligacijos vertės formule:

$$P = 100 \left(\frac{0,06}{0,105} + \frac{1}{(1 + 0,105)^2} \left(1 - \frac{0,06}{0,105} \right) \right) = 92,24 \$.$$

Apskaičiuokime antrųjų obligacijų dabartinę vertę:

$$P = 100 \left(\frac{0,01625}{0,068} + \frac{1}{(1 + 0,068/2)^{18}} \left(1 - \frac{0,01625}{0,068} \right) \right) = 108,24 \$.$$

Kaip ir buvo minėta 3 skyriaus 1 poskyryje, galima pastebėti, jog jei diskonto norma yra didesnė už kuponines palūkanas, tai obligacijos dabartinė vertė yra mažesnė už nominalą. O jeigu diskonto norma yra mažesnė už kuponines palūkanas, tai dabartinė vertė yra didesnė už nominalą.

Toliau apskaičiuokime šių obligacijų diuracijas ir atkreipkime dėmesį į jos savybes. Apskaičiuokime pirmųjų obligacijų diuraciją:

$$D = \frac{1}{92,24} \left(\frac{6}{1 + 0,105} + 2 \cdot \frac{6 + 100}{(1 + 0,105)^2} \right) = 1,941.$$

Taip pat pritaikykime diuracijos formulę uždaroje formoje, kuri buvo išvesta 3 skyriaus 3 teiginyje

$$D = 1 + \frac{1}{0,105} + \frac{2(0,105 - 0,06) - (1 + 0,105)}{0,06((1 + 0,105)^2 - 1) + 0,105} = 1,941.$$

Pabandykime patikrinti diuracijos savybių veikimą. Tarkime, kad kuponinės palūkanos pakyla iki 8%, tai reiškia, jog ir kuponas dabar bus lygus 8 \$. Tam pritaikykime diuracijos formulę uždaroje formoje. Tada

$$D = 1 + \frac{1}{0,105} + \frac{2(0,105 - 0,08) - (1 + 0,105)}{0,08((1 + 0,105)^2 - 1) + 0,105} = 1,924.$$

Galime matyti, jog pakėlus kuponines palūkanas diuracija sumažėja. Dabar pabandykime sugrąžinti kuponines palūkanas į 6%, o pakelti diskonto normą iki 15%. Tada

$$D = 1,939.$$

Galime pastebėti, jog šiuo atveju diuracija taip pat sumažėja, bet ne taip stipriai, nors ir santykinai diskonto norma buvo pakelta daugiau nei kuponinės palūkanos. Iš to būtų galima daryti išvadą, jog kuponinių palūkanų pokytis turi didesnę reikšmę obligacijų diuracijai.

Toliau tarkime, kad šios obligacijos yra be kuponės, tai yra, kad jų kuponinės palūkanos yra lygios 0. Šiuo atveju ir obligacijos dabartinė vertė bus skaičiuojama kitaip:

$$P = \frac{N}{(1 + r)^T}.$$

Tada diuracija

$$D = \frac{100}{100/1,22} \cdot \frac{2}{1,22} = 2.$$

Galiausiai paskaičiuokime modifikuotą diuraciją

$$D_m = \frac{1,941}{1 + 0,015} = 1,757.$$

Tai reiškia, jog 1 procento diskonto normos padidėjimui, obligacijos dabartinė vertė sumažės per 1,76 procento ir atvirkščiai. Taip pat galima apskaičiuoti ir procentinius dabartinės vertės

pasikeitimus mažesniai nei 1 procento diskonto normos pokyčiui. Galime patikrinti šią savybę. Turime, jog pirmųjų obligacijų dabartinė vertė yra 92,24 \$. Padidinkime diskonto normą iki 11,5% ir skaičiuokime dabartinę vertę su šiuo pakeistu rodikliu

$$P = \frac{6}{1 + 0,115} + \frac{6}{(1 + 0,115)^2} + \frac{100}{(1 + 0,115)^2} = 90,64 \$.$$

Pokytis yra 1,6 \$. Paskaičiuokime kokią kainos dalį atitinka 1,76 procento

$$\Delta P = \frac{92,24 \cdot 1,76}{100} = 1,62 \$.$$

Galime pastebėti, kad šiuo atveju yra 0,02 \$ neatitikimas skaičiuojant pokytį pagal modifikuotą diuraciją ir tiesiogiai pakeitus diskonto normą. Taigi galima teigti, kad modifikuota diuracija parodo ne visiškai tikslų, o apytikslį obligacijos kainos pokytį.

Toliau reikia apskaičiuoti antrųjų obligacijų diuraciją:

$$D = 16,876 .$$

Tačiau šiuo atveju diuracija yra apskaičiuota periodų skaičiui, kuris yra 18. Kadangi kuponinės palūkanos yra mokamos du kartus per metus, tai reikia gautą reikšmę padalinti iš 2, kad gauti diuraciją metams (duotam išpirkimo terminui)

$$D \text{ (metams)} = \frac{16,876}{2} = 8,438 .$$

Modifikuota diuracija šiuo atveju bus

$$D_m = \frac{8,438}{1 + 0,068/2} = 8,409 .$$

Toliau pabandykime išspręsti imunizacijos uždavinį, tik su kitais duomenimis. Tarkime, kad įmonė po 4 metų turi išmokėti 1464 \$ įsipareigojimų, kai diskonto norma yra 10%. Šiems įsipareigojimams kompensuoti turi būti sudaromas aktyvų portfelis. Šiuo atveju tegul jis turi būti sudaromas iš bekuponinės obligacijos B, kurios $T=2$ ir neterminuotos obligacijos C. Tada aktyvų portfelis yra užrašomas taip

$$A = bB + (1 - b)C .$$

Pirma, apskaičiuokime įsipareigojimų (juos pažymėkime raide L) dabartinę vertę:

$$P(L) = \frac{1464}{(1,1)^4} = 1000 \$.$$

Toliau apskaičiuokime diuracijas. Neterminuotos obligacijos diuracija yra $\frac{1+r}{r}$.

$$D(L) = 4, D(B) = 2, D(C) = 11 .$$

Tada

$$D(A) = bD(B) + (1 - b)D(C) = 2b + (1 - b)11.$$

Kadangi aktyvų ir pasyvų diuracijos turi būti lygios, tai reikia spręsti tokią lygtį

$$2b + 11(1 - b) = 4.$$

Iš čia $b = 7/9$. Galime rasti aktyvų vertes

$$P(B) = \frac{7}{9} \cdot 1000 = 777,8 \$, P(C) = \frac{2}{9} \cdot 1000 = 222,2 \$.$$

Tarkime, kad po metų diskonto norma pakilo iki 12% ir šiuo atveju, be abejo, reikia imunizacijos portfelį perbalansuoti. Diuracijos po metų

$$D(L) = 3, D(B) = 1, D(C) = 9,3.$$

Išsipareigojimų dabartinė vertė

$$P(L) = \frac{1464}{(1,12)^3} = 1042 \$.$$

Žinoma, šiuo atveju reikia pakeisti portfelio A proporcijas. Vėlgi pritaikome diuracijų lygybę:

$$b + 9,3(1 - b) = 3$$

Iš čia $b = 63/83$. Taigi reikia perskaičiuoti aktyvų vertes:

$$P(B) = \frac{63}{83} \cdot 1042 = 790,9 \$, P(C) = \frac{20}{83} \cdot 1042 = 251,1 \$.$$

Iš čia galime pastebėti, jog reikės investuoti 13,1 \$ į B obligacijas ir 28,9 \$ į C obligacijas.

Diskontuotų piniginių srautų matematinės savybės

Santrauka

Šiame baigiamajame darbe skiriamas dėmesys obligacijoms bei jų vertinimui, nagrinėjamos ir skaičiavimais pagrindžiamos tam tikros susijusios savybės: obligacijos dabartinė vertė, diuracijos priklausomybė nuo skirtingų rodiklių. Darbas susideda iš trijų skyrių. Pirmajame skyriuje yra pristatoma bendra diskontuotų pinigų srautų formulė, pagrindiniai vertinimo būdai ir jų srautų apskaičiavimai, pateikiamos pagrindinės naudojamos diskonto normos. Antrajame skyriuje yra nagrinėjamos tam tikros obligacijų savybės ir sąvokos, plačiau nagrinėjama diuracijos sąvoka ir jos savybės. Galiausiai trečiajame skyriuje paėmus tam tikrus obligacijų duomenis yra atliekami skaičiavimai, kad patikrinti obligacijų ir diuracijos savybes. Taip pat sprendžiamas imunizacijos uždavinys.

Raktiniai žodžiai: diskontuoti piniginiai srautai; diuracija; obligacijos.

Mathematical Properties of Discounted Cash Flows

Summary

This thesis focuses on bonds and their valuation, examines and calculates certain related features: the present value of the bond, the dependence of the duration on different indicators. The work consists of three sections. The first section presents the general formula for discounted cash flows, the main valuation methods and their cash flow calculations, and presents the main discount rates used. The second chapter examines certain features and concepts of bonds, and more broadly examines the concept of duration and its properties. Finally, in the third section, after taking some bond data, calculations are performed to verify the properties of the bonds and the duration. The problem of immunization is also solved.

Key words: discounted cash flows; duration; bonds.

Literatūra

1. L.Alden, Discounted Cash Flows Analysis: Complete Tutorial With Examples, <https://www.lynalden.com/discounted-cash-flow-analysis/>.
2. S.Čerovic, S.Čerovic, N.Čerovic, M.Pepic, Duration and convexity of bonds, *Singidunum Journal of Applied Sciences*, Belgrade, 2013, <https://scindeks-clanci.ceon.rs/data/pdf/2217-8090/2014/2217-80901401053C.pdf>.
3. A.Damodaran, An Introduction to Valuation, 2005, <http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/pdfiles/eqnotes/approach.pdf>.
4. F.J.Fabozzi, *Bond markets, analysis and strategies*, 5th Edition. Pearson Education International, New Jersey, 2004, p. 63-72.
5. P.Fernandez, *Valuation Methods and Shareholder Value Creation*. Academic Press, San Diego, 2002.
6. P.Fernandez, WACC: definition, misconceptions and errors, 2019, <https://ssrn.com/abstract=1620871>
7. O. de La Grandville, *Bond Pricing and Portfolio Analysis: Protecting Investors in the Long Run*. MIT Press, London, 2000.
8. A.Grigutis, *Paskaitų konspektas: Obligacijos*, 2019, https://klevas.mif.vu.lt/~andriusg/Destymas/Investiciju_teorija/Teorijos%20konspektai/Obligacijos.pdf.
9. G.Kancerevyčius, *Finansai ir investicijos*. Smaltijos leidykla, Kaunas, 2004.
10. Y.D.Lyuu, Bond Price Volatility: Duration and Convexity, https://www.csie.ntu.edu.tw/~lyuu/Capitals/lessons_dur.pdf.
11. W.S.Nel, The application of Capital Asset Pricing Model (CAPM): A South African Perspective, *African Journal of Business Management*, 2011.
12. F.Steiger, The Validity of Company Valuation Using Discounted Cash Flow Methods, 2008, <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1003/1003.4881.pdf>.
13. M.Stigum, F.L.Robinson, *Money market and bond calculations*. Irwin Professional Publishing, Chicago, 1996, p. 211-236.
14. Wikipedia, Discounted Cash Flow, https://en.wikipedia.org/wiki/Discounted_cash_flow.