

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Bakalauro darbas

Investicinio portfelio optimizavimas

Investment portfolio optimization

Adelė Nečionytė

VILNIUS 2020

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS INSTITUTAS

Darbo vadovas doc. dr. Andrius Grigutis _____

Darbo recenzentas doc. Aidas Balčiūnas _____

Darbas apgintas _____

Darbas įvertintas _____

Registravimo NR. _____

Įrašoma atidavimo į katedra data _____

Turinys

1	Santrauka	5
2	Abstract	6
3	Įvadas	7
4	Investicinio portfelio pagrindiniai parametrai	9
4.1	Investicinio portfelio grąža	10
4.2	Investicinio portfelio dispersija ir standartinis nuokrypis	11
5	Modernaus portfelio teorija	14
5.1	Portfelis su rizikingais aktyvais	15
5.1.1	Efektyvumo frontas	15
5.2	Portfelis su nerizikingais aktyvais	18
5.2.1	Kapitalo pasiskirstymo linija	19
6	Kapitalo vertės nustatymo modelis - CAPM	20
6.1	Rizikos - pelno priklausomybės koeficientas	21
7	Optimizavimo uždavinys	23
7.1	Rizikos minimizavimas	23
7.1.1	Portfelis iš dviejų aktyvų	24
7.1.2	Portfelis iš n aktyvų	24

7.2	Gražos maksimizavimas	27
7.2.1	Portfelis iš dviejų aktyvų	28
7.2.2	Portfelis iš n aktyvų	29
8	Optimalaus portfelio sudarymas su Microsoft Excel programa	33
8.1	Statistiniai įmonių parametrai	33
8.2	Lygių svorių portfelis	35
8.3	Maksimalios gražos portfelis	36
8.4	Maksimalios gražos optimalus portfelis	36
8.5	Minimalios rizikos portfelis	37
8.6	Minimalios rizikos optimalus portfelis	38
8.7	Rezultatų apibendrinimas	39
9	Išvados	40
	Literatūra	41
A	Aktyvų akcijų kainos	43

Iliustracijų sąrašas

5.1	Efektyvumo frontas	16
5.2	Kapitalo pasiskirstymo linija	19
A.1	Aktyvų akcijų kainos kas mėnesį	44

Lentelių sąrašas

8.1	Aktyvų grąžos, dispersijos ir standartiniai nuokrypiai	34
8.2	Aktyvų kovariacijos matrica	34
8.3	Lygių svorių portfelis	36
8.4	Maksimalios grąžos portfelis	36
8.5	Maksimalios grąžos optimalus portfelis	37
8.6	Minimalios rizikos portfelis	38
8.7	Minimalios rizikos optimalus portfelis	38

1 skyrius

Santrauka

Šiame baigiamajame bakalauro darbe apibrėžiamas investicinis portfelis bei pagrindiniai portfelio parametrai, tokie kaip standartinis nuokrypis (rizikos lygis) bei investicinė grąža. Remiantis H. Markowitz modernaus portfelio teorija šie parametrai įvertinami ir sudaromas portfelio efektyvumo frontas. Portfelis optimizuojamas dviem būdais - fiksuojant konkretų investicinės grąžos dydį ir mažinant riziką iki minimumo arba fiksuojant tam tikrą rizikos lygį ir maksimizuojant grąžą laikantis nustatytų rizikos apribojimų. Optimizavimas pritaikytas minimaliam portfeliui, sudarytam iš dviejų investicinių instrumentų bei portfeliui, sudarytam iš n investicinių instrumentų. Gauti teoriniai rezultatai patikrinami su portfelio duomenimis, parinktais iš Nasdaq duomenų bazės.

Raktiniai žodžiai: Investicinis portfelis, Markowitz modernaus portfelio teorija, Pelno – rizikos koeficientas, Efektyvumo frontas, Lagrange dauginamasis.

2 skyrius

Abstract

In this bachelor's work there is determined the investment portfolio and the main portfolio parameters, such as the standard deviation (risk level) and investment return. Based on H. Markowitz's modern portfolio theories, these parameters are evaluated and calculated for the formation of portfolio efficient frontier. The portfolio is optimized in two ways - by setting specific investment returns and minimizing risk, or by fixing a certain level of risk and maximizing the return of the established risk limits. The optimization is adapted to a minimum portfolio which is consisted of two investment instruments and also a portfolio consisting of infinity investment instruments. The results obtained will be validated with portfolio data selected from the Nasdaq corporate databases.

Keywords: Investment Portfolio, Markowitz Modern Portfolio Theory, Risk - Return Coefficient, Efficient frontier, Lagrange multiplier.

3 skyrius

Įvadas

Lietuvos Banko puslapyje [6] apibrėžiama, kad **investavimas** - „turimų lėšų „įdarbinimas“ siekiant jas išsaugoti ir padidinti jų vertę“ . Investuodamas savo lėšas ar kapitalą į tam tikrą objektą, asmuo tampa investuotoju.

Finansiniai instrumentai bei jų investavimo rizikos aprašyti remiantis E.Picardo straipsniu *Investing* [8].

Kiekvieno investuotojo pagrindinis tikslas yra kuo labiau pasipelnyti iš investuojamo turto, kuris yra sudarytas iš įvairių investicinių instrumentų - akcijų, nekilnojamojo turto, vertybinių popierių (obligacijų), žaliavų, investicinių fondų, išvestinių finansinių priemonių (ateities sandorių, opcionų, palūkanų sandorių). Planuojant investiciją yra siekiama kuo didesnės investicinės grąžos - pelno, atgauti daugiau pinigų nei buvo investuota. Tačiau tokio tikslo nevertėtų siekti investuojant į tuo metu didžiausią gražą teikiantį investicinį vienetą, nes tinkamas investavimas tuo neapsiriboja. Jungtinių Amerikos Valstijų ekonomistas H.Markowitz straipsnyje *Portfolio Selection*, išleistame leidinyje *Journal of Finance* [7], teigė, jog viso kapitalo investavimas į vieną investicinį instrumentą gali būti labai rizikingas - tai reiškia, kad investuodamas į konkretų turtą, investuotojas gali ne tik nepasipelnyti, bet ir prarasti dalį arba visas savo investicijas. Tai gali būti nulemta kelių faktorių - rinkos, šalies ekonominės bei politinės situacijos, infliacijos, likvidumo, valiutos kurso bei kitų faktorių.

Norint kuo labiau apsaugoti savo investicijas reikia paskirstyti lėšas per kelis objektus ir susikurti investicinį rinkinį, sudarytą iš įvairių investicinių instrumentų [7]. Visada svar-

bu atsižvelgti į investicinio rinkinio parametrus (ne tik didelė investicinė grąža konkrečiu laikotarpiu) bei įvertinti investavimo riziką, suprasti turimo rinkinio vienetų koreliacijas [7].

Tinkamai įvertinti visus investicinio rinkinio parametrus bei rizikas per laikotarpį yra naudojami investiciniai portfeliai - čia investiciniai instrumentai nėra vertinami kaip atskiri objektai, įvertinamas bendras investuojamas vienetas, šio turto kintamųjų tarpusavio sąsajos bei apskaičiuojama tikėtina rizika investuojant vienu ar kitu būdu.

Investicinio portfelio tikslas - įvertinti ir kontroliuoti riziką ir kuo efektyviau siekti investicinės grąžos. Investicinio portfelio teorija apibrėžia, kad investuojamas portfelis turi būti optimizuojamas siekiant įvertinti rizikos bei pelno santykį. Šiame darbe aprašoma, kaip turi būti įvertinamas investicinis portfelis, kokie parametrai turi būti apskaičiuojami bei kaip turi būti optimizuojamas portfelis siekiant norimos grąžos.

Temos aktualumas: Investavimas yra vienas iš pagrindinių pajamų šaltinių. Tačiau tam, kad investicija grąžintų tam tikrą pelną, investicinis rinkinys turi būti kuo efektyvesnis. Tai reiškia, jog portfelio rizika turi atitikti tam tikrą lygį ir jo neviršyti bei investicinis portfelis turi teikti kuo didesnį pelną. Baigiamojo darbo uždavinyje yra įvertinami portfeliai, sudaryti iš aktyvų su fiksuotomis grąžomis ir rizikos lygiais, taip pat apskaičiuojama efektyvių portfelių aibė.

Baigiamajame bakalauro darbe apibrėžiama, kaip siekiant kuo didesnės investicinės grąžos, tačiau įvertinus investavimo riziką bei kaip optimizuoti turimą investicinį portfelį.

Tyrimo objektas: Investicijų portfelio optimizavimas.

Tyrimo tikslas: Sudaryti portfelio optimizavimo uždavinį, kuriame būtų pasiekiamas norima investicinė grąža su optimalia rizika. Pritaikyti gautus rezultatus kompanijų duomenims.

Tyrimo metodas: Rizikos ir standartinio nuokrypio apskaičiavimas, efektyvumo fronto sudarymas, optimizavimo uždavinys remiantis Lagrange dauginamųjų metodu.

4 skyrius

Investicinio portfelio pagrindiniai parametrai

Šiame skyriuje yra remiamasi G. Cornuejols ir R. Tutuncu leidiniu *Optimization Methods in Finance*, psl. 141 - 150, [3] bei A. Grigučio konspekto *Rizikingų aktyvų portfelis* medžiaga [5]. Poskyryje apie portfelio dispersiją ir standartinę nuokrypį remiamasi D.P. Bertseko ir J.T. Tsisiklio knygos *Introduction to Probability* medžiaga p.178 - 182 (skyrius *Covariance and Correlation*) [1].

Apibrėžimas 1. *Investavimas - turimų lėšų paskirstymas, siekiant jas išsaugoti ir padidinti jų vertę.*

Apibrėžimas 2. *Investicinis instrumentas - tam tikras vertybinių popierių, akcijų, grynųjų pinigų bei kito investicinio turto vienetas, į kurį gali būti investuojamos investuotojo lėšos.*

Apibrėžimas 3. *Investicijų portfelis – investuotojo turimų aktyvų visuma, kuri modeliuojama taip, kad būtų pasiekta maksimali grąža laikantis atitinkamų rizikos lygių ribojimo - minimizuojant portfelio pasiskirstymą (dispersiją).*

Apibrėžimas 4. *Tarkime, kad turimas investicinio turto rinkinys yra išreiškiamas aibe $S_1, S_2, \dots, S_n$ su grąžomis, kurios yra atsitiktiniai dydžiai. Dydį S_i vadinsime **aktyvu**. Aktyvas gali būti bet kuris investicinis instrumentas - objektas, į kurį investuojamos asmens lėšos.*

Tarkime, kad visos investuotojo lėšos yra prilyginamos vienetui ir investuojama dalis į

konkretų aktyvą yra įvertinama kaip šio aktyvo svoris.

Apibrėžimas 5. *Investicinio turto $S_1, S_2, \dots, S_n$ **portfelis** gali būti išreiškiamas kaip vektorius $\mathbb{X} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $n \geq 2$ kur kiekviena vektoriaus koordinatė atitinka konkretaus aktyvo svorį bei $\forall i \in \mathbb{N}$ bei $\sum_{n=1}^{\infty} x_i = 1$.*

Galima apibrėžti, kad kiekviena iš koordinačių nurodo, kiek iš bendrų lėšų yra skiriama konkrečiam aktyvui. Jeigu investicinis rinkinys būtų sudarytas iš dviejų aktyvų S_1 ir S_2 , ir portfelis būtų aprašytas $\mathbb{X} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, vadinasi, į pirmąjį aktyvą buvo investuota trečdalis investuotojo lėšų, o į antrąjį - du trečdaliai.

Tarkime, kad investicinį portfelį sudaro du aktyvai S_1 ir S_2 . Maksimali investavimo dalis į aktyvą yra lygi vienetui (atmetama skolinimosi galimybė). Jeigu į aktyvą S_1 yra investuojama x dalis visų lėšų, vadinasi į S_2 aktyvą gali būti investuojama $(1 - x)$ dalis.

Galime pasakyti, kad portfelis X yra tiesinė kombinacija

$$X = xS_1 + (1 - x)S_2 \quad (4.1)$$

4.1 Investicinio portfelio grąža

Skaiciuojant portfelio tikėtiną grąžą iš pradžių reikia apskaičiuoti kiekvieno iš šio portfelio aktyvo istorines grąžas.

Parinkime vieną portfelio aktyvą S_1 . Visą laikotarpį T per kurį bus tiriamos istorinės grąžos suskaidome į N vienodų intervalų $(T_1, T_2, \dots, T_N)$. Pažymėkime $t_1 := T_1$ laikotarpį nuo pradinio momento iki laikotarpio T_1 , $t_2 := T_2 - T_1$ - tarpas tarp 1-ojo ir 2-ojo intervalo momentų, $t_3 := T_3 - T_2, \dots, t_N := T_N - T_{N-1}$.

Investicinio aktyvo S_1 istorinės grąžos yra apskaičiuojamos pagal pasiekto pelno santykį su pradine verte. Pradinė vertė lygi V_0 , pasiekta vertė per laikotarpį t_1 lygi V_1 , investuotojo uždirbtas pelnas yra lygus šių verčių skirtumui $V_1 - V_0$ ir gaunama grąža yra lyginama, kiek pakilo investuotojo investicijos lyginant su pradine verte

$$r_1 = \frac{V_1 - V_0}{V_0}.$$

Rezultatas r_1 yra vadinamas **istorine aktyvo S_1 grąža** per laikotarpį t_1 . Galime šią formulę

perrašyti

$$V_1 = (1 + r_1)V_0.$$

Atitinkamai $r_2 = \frac{V_2 - V_1}{V_1}, r_3 = \frac{V_3 - V_2}{V_2}, \dots, r_N = \frac{V_N - V_{N-1}}{V_{N-1}}$ randamos istorinės grąžos visiems laikotarpiais $t_i, \forall i \in [1, N]$. Per laikotarpį yra surenkama N istorinių grąžų. Aktyvo S_1 vidutinė grąža per laikotarpį μ_1 yra lygi visų dydžių r_i empiriniam vidurkiui

$$\mu_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i, \quad (4.2)$$

čia r_i yra i -tojo laiko momento aktyvo S_1 grąža.

Įvertinkime visų investicinio portfelio aktyvų $S_1, S_2, \dots, S_n$ grąžas. Pažymėkime $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$ viso rinkinio grąžų transponuota matrica. Investicinis portfelis yra apibrėžtas kaip $\mathbb{X} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Galima apibrėžti tikėtiną investicinio portfelio grąžą, kuri yra lygi viso portfelio tikėtinai grąžai - įvertiname kiekvieno portfelio kintamojo x_i svorį ir padauginame iš atitinkamo aktyvo S_i grąžos μ_i

$$\mu_X = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \dots + x_n\mu_n = \mu^T \mathbb{X} = \sum_{i=1}^n x_i\mu_i. \quad (4.3)$$

4.2 Investicinio portfelio dispersija ir standartinis nuokrypis

Portfelio rizika yra tikimybė, kad investicinis rinkinys neatitiks finansinių tikslų. Rizika investuojant atsiranda todėl, kad investuotojas niekada negali būti 100 procentų užtikrintas investavimo sėkme, nes nėra pajėgus numatyti to, kas gali įvykti ateityje. Kiekvieno portfelio investicija turi tam tikrą rizikos lygį.

Investiciniuose portfeliuose rizikos lygiai yra matuojami apskaičiuojant standartinį nuokrypį ir dispersiją. Investicinio portfelio rizika yra apibrėžiama kaip šio portfelio standartinis nuokrypis σ_X . Kuo didesnis yra standartinis nuokrypis, tuo didesnė portfelio rizika, kadangi investicinis objektas, kuris yra nepastovus ir turi didelį nuokrypį, turi polinkį labai priklausyti nuo įvairių faktorių, kurie didina šio objekto riziką. Kitais žodžiais, aktyvas, kuris

turi didelį nukrypimą nuo savo vidurkio turi didesnę riziką, kadangi šis aktyvas yra mažiau prognozuojamas.

Tam, kad galėtume apskaičiuoti portfelio aktyvų dispersijas $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)$ ir standartinius nuokrypius $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ visų pirma reikia apskaičiuoti kiekvieno aktyvo S_i dispersiją ir standartinį nuokrypį.

Parinkime aktyvą S_1 ir įvertinkime šio aktyvo istorines grąžas intervale T . Istorinės aktyvo S_1 grąžos $r_{S_1} := (r_1, r_2, \dots, r_N)$. Pagal (4.2) formulę apskaičiuojama vidutinė aktyvo grąža μ_1 . Aktyvo dispersija yra apskaičiuojama pagal tokią formulę

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_i - \mu_1)^2. \quad (4.4)$$

Pagal formulę (4.4) surandame visų portfelio aktyvų S_i dispersijas ir standartinius nuokrypius.

Tarkime, kad μ_i yra tam tikro aktyvo S_i tikėtina grąža ir σ_i yra šio aktyvo standartinis nuokrypis. Jeigu $i \neq j$ tada ρ_{ij} yra koreliacijos koeficientas tarp aktyvų S_i ir S_j . Koreliacijos koeficientas nurodo, kokia priklausomybė yra tarp diskretaus laiko atsitiktinių dydžių S_i ir S_j .

Koreliacijos koeficientas gali būti apskaičiuojamas taip

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &:= \frac{\text{cov}(S_i, S_j)}{\sqrt{\text{Var}(S_i)\text{Var}(S_j)}} = \frac{\text{cov}(S_i, S_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\mathbb{E}[(S_i - \mu_i)(S_j - \mu_j)]}{\sigma_i \sigma_j} \\ &= \frac{\mathbb{E}[S_i S_j - \mu_i S_j - \mu_j S_i + \mu_i \mu_j]}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\mathbb{E}[S_i S_j] - \mu_i \mu_j}{\sigma_i \sigma_j}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Įvertinkime šį koreliacijos koeficientą.

Apibrėžimas 6. Atsitiktiniai dydžiai $S_1, S_2, \dots, S_n$ yra vadinami **tiesiškai nepriklausomi**, jeigu lygybė

$$a_1 S_1 + a_2 S_2 + a_3 S_3 + \dots + a_n S_n = 0$$

yra tenkinama tik tokiu atveju, kai $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Jeigu $\exists a_i \neq 0$

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma_i \sigma_j.$$

1 lema. Lygybė $|\text{cov}(X, Y)| = \sigma_i \sigma_j$ galioja tik tokiu atveju, jei atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra tiesiškai priklausomi.

Įrodymas. Tarkime $a, b \in \mathbb{R}$ ir $b \neq 0$. Tada

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(aX + bY)^2 \geq 0 &\implies a^2\mathbb{E}X^2 + 2ab\mathbb{E}XY + b^2\mathbb{E}Y^2 \geq 0 \\ \implies 4b^2(\mathbb{E}XY)^2 - 4b^2\mathbb{E}X^2\mathbb{E}Y^2 &\leq 0 \implies |\mathbb{E}XY| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2\mathbb{E}Y^2}. \end{aligned}$$

Į paskutinės nelygybės abi puses įrašydami centruotus atsitiktinius dydžius $X := X - \mathbb{E}X$ ir $Y := Y - \mathbb{E}Y$ gauname lemos tvirtinimą. $\square$

Pagal lemą 1 turime, kad $\rho_{ii} \equiv 1$ ir $\rho_{ij} \in [-1, 1]$.

Pažymėkime $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$ viso rinkinio grąžų matrica, o $Q = (\sigma_{ij})$ yra $n \times n$ kovariacijų matrica, čia $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ kai $i \neq j$. Investicinio portfelio dispersija yra lygi

$$Var[X] = \sum_{i,j} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j x_i x_j = \mathbb{X}Q\mathbb{X}^T. \quad (4.6)$$

Dispersija visada yra neneigiamas dydis, todėl $\mathbb{X}Q\mathbb{X}^2 \geq 0, \forall \mathbb{X}$. Todėl kovariacijos matrica $Q = (\sigma_{ij})$ yra teigiamai apibrėžtos kvadratinės formos matrica ir ši matrica yra simetrinė, t.y. $Q = Q^T$.

Standartinis nuokrypis σ_X yra kvadratinė šaknis iš dispersijos,

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T}. \quad (4.7)$$

5 skyrius

Modernaus portfelio teorija

Modernaus portfelio teorijos autorius yra Harry Markowitz, kuris 1952 metų kovą paskelbė savo straipsnį pavadinimu *Portfolio Selection* žurnale *Journal of Finances* [7]. Naujos H.Markowitz įžvalgos sukūrė pamatus šiuolaikinei investavimo teorijai. Savo veikale autorius teigė, kad optimalus portfelis turi būti sudaromas siejant pelningumą su rizika. Rizika H.Markowitz straipsnyje įvardijama kaip pelningumo nukrypimai - istorinių grąžų išsibarsčymas. Pagrindinės autoriaus mintys:

- Skaičiuojant investicinio portfelio pelningumą yra būtina atsižvelgti į portfelio riziką.
- Reikia diversifikuoti lėšas per kelis objektus, nes investuojant į vieną iškyla investavimo rizika.
- Aktyvas arba portfelis yra laikomas efektyviu, jeigu joks kitas aktyvas nesuteikia didesnės investicinės grąžos esant tam pačiam rizikos lygiui arba joks portfelis nesuteikia mažesnės rizikos esant tai pačiai investicinei grąžai.

Modernaus portfelio teorijos pagrindinė mintis buvo tai, kad jei investicijos į vieną investicinį instrumentą yra pajamingesnės ir žada didesnę investicinę grąžą, tačiau rizikos požiūriu investavimas į vieną objektą gali būti labai rizikingas. Norint kuo labiau reguliuoti rizikos lygį, reikia diversifikuoti savo lėšas ir išskirstyti investicijas į kuo daugiau objektų.

Markowitz pelno - rizikos optimizavimo (*Mean - Variance Optimization*) teorija apibrėžia vertybinių popierių ar kito investicinio turto portfelių atrinkimo metodą sukuriant tikėtinos portfelio grąžos bei potencialios portfelių rizikos modelius. Šiame skyriuje bus nagrinėjama, kaip Markowitz teorija yra pritaikoma įvertinti investiciniams portfeliams.

5.1 Portfelis su rizikingais aktyvais

Pažymėkime $\mathbb{X}$ visų rinkinio $S_1, S_2, \dots, S_n$ portfelių aibę ir $\mathbb{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Toliau nagrinėsime investicinius portfelius, sudarytus iš dviejų aktyvų S_1 ir S_2 .

5.1.1 Efektyvumo frontas

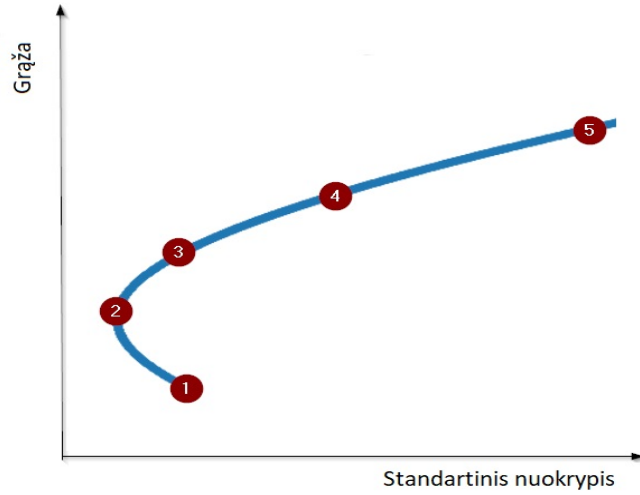
Tarkime turime du aktyvus S_1 ir S_2 . Aktyvo S_1 esminiai parametrai yra (σ_{S_1}, r_{S_1}) , o aktyvo S_2 - (σ_{S_2}, r_{S_2}) . Sudarome du skirtingus portfelius X_1 ir X_2 iš aktyvų S_1 ir S_2 atitinkamai, $X_1, X_2 \in \mathbb{X}$. Apibrėžkime, kad portfelis X_1 yra **pranašesnis** už portfelį X_2 jei galioja šios nelygybės:

- $\sigma_{S_1} \leq \sigma_{S_2}$ - turime, kad S_1 yra mažiau rizikingas nei S_2 .
- $\mu_{S_1} \geq \mu_{S_2}$ - turime, kad S_1 turi didesnę investicinę grąžą nei S_2 .

Apibrėžimas 7. Portfelis $X \in \mathbb{X}$ yra vadinamas **efektyviu** jeigu aibėje $\mathbb{X}$ neegzistuoja kitas už jį pranašesnis portfelis X_1 . Tai reiškia, kad aibėje $\mathbb{X}$ negalima rasti kito portfelio, kuris duotų didesnę investicinę grąžą su tuo pačiu rizikos lygiu arba duotų tą pačią grąžą su mažesniu rizikos lygiu. Rinkinys visų tokių portfelių yra vadinama **efektyvumo frontu**.

Visi portfeliai, esantys ant efektyvumo fronto kreivės yra optimalūs, o pagal kokį portfelį investuoti priklauso nuo investuotojo. Dažniausiai didžiausia investicinė grąža yra gaunama esant aukštesniam rizikos lygiui ir investuotojas turi įvertinti savo rizikavimo ribas - ar investuoti į mažą pelningumą turinti portfelį su minimalia rizika, ar į pelningą portfelį su didesniu rizikingumu.

Parinkime portfelio $X \in \mathbb{X}$ aktyvus $S_1 - (\sigma_1, \mu_1)$ ir $S_2 - (\sigma_2, \mu_2)$, $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$ - abu aktyvai turi tam tikrą rizikos lygį. Portfelis prilyginiamas vektoriui $X := (x, 1 - x)$ - vektoriaus



5.1 pav.: Efektyvumo frontas

koordinatės nurodo svorius, kokią dalį lėšų investuojame į pirmąjį ir antrąjį aktyvą, $x \in [0, 1]$. Remdamiesi formule (4.1) galime parašyti portfelio lygtį

$$X = xS_1 + (1 - x)S_2.$$

Šio portfelio graža ir dispersija yra apskaičiuojami pagal formules (4.3) ir (4.6)

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^2 x_i \mu_i = x\mu_1 + (1 - x)\mu_2,$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{i,j=1}^2 \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j x_i x_j = x^2 \sigma_1^2 + (1 - x)^2 \sigma_2^2 + 2x(1 - x) \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12},$$

čia ρ_{12} yra koreliacijos koeficientas tarp aktyvų S_1 ir S_2 .

Šiose lygtyse yra nežinomas ρ_{12} nurodantis, kokia yra aktyvų S_1 ir S_2 tarpusavio koreliacija. Toliau nagrinėkime, kokį portfelio vektorių $X := (x, 1 - x)$ reikėtų parinkti bei kokį efektyvumo frontą gausime priklausomai nuo to, kaip S_1 ir S_2 koreliuoja tarpusavyje.

2 teiginys. *Jei aktyvai S_1 ir S_2 yra susieti atvirštinė tiesine priklausomybe (jei yra tiesiškai priklausomi, tačiau skirtingomis kryptimis) ir jų koreliacijos koeficientas $\rho_{12} = -1$, tada portfelio X dispersija ir standartinis nuokrypis yra lygūs nuliui, kai $X := (\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, 1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2})$.*

Įrodymas. Paimkime standartinio nuokrypio skaičiavimo lygtį ir įsistatykite reikšmę $\rho_{12} = -1$. Tada

$$\sigma_X^2 = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 - 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2.$$

Prilyginkime σ_X^2 nuliui ir gautą nuokrypio išraišką perrašykime pilnojo kvadrato formule

$$\sigma_X^2 = (x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2)^2 = 0.$$

Gauname, kad $\sigma_X = 0$, kai $x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2 = 0$.

Išsprendę tiesinę lygtį gauname, kad $x = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$.

□

3 teiginys. Jei aktyvai S_1 ir S_2 yra susieti tiesine priklausomybe ir jų koreliacijos koeficientas $\rho_{12} = 1$, $\mu_1 \leq \mu_2$ ir $\sigma_1 \leq \sigma_2$ tada portfelių aibės $\mathbb{X}$ efektyvumo frontas yra atkarpa

$$\frac{\sigma_X - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\mu_X - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2},$$

čia σ_X ir μ_X yra investicinio portfelio X grąža ir nuokrypis, $\sigma_X \in [\sigma_1, \sigma_2]$.

Taip pat, jei aktyvai S_1 ir S_2 yra susieti atvirštinė tiesine priklausomybe ir jų koreliacijos koeficientas $\rho_{12} = -1$ tada portfelių aibės $\mathbb{X}$ efektyvumo frontas yra atkarpa

$$\frac{-\sigma_X + \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\mu_X - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad (5.1)$$

čia $\sigma_X \in [0, \sigma_2]$.

Įrodymas. Iš pradžių parinkime koreliacijos koeficientą $\rho_{12} = 1$. Įstatome šią reikšmę į standartinio nuokrypio apskaičiavimo lygtį

$$\sigma_X^2 = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2.$$

Suvedame šią lygtį į pilnąjį kvadratą

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= (x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2)^2 \implies \sigma_X = x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2 \implies \sigma_X = x\sigma_1 + \sigma_2 - x\sigma_2 \\ &\implies \sigma_X = x(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2 \implies x = \frac{\sigma_X - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}. \end{aligned}$$

Portfelio $X = xS_1 + (1 - x)S_2$ grąža μ_X apskaičiuojama

$$\mathbb{E}[X] = \mu_X = x\mu_1 + (1 - x)\mu_2 = x\mu_1 + \mu_2 - x\mu_2 = x(\mu_1 - \mu_2) + \mu_2 \implies x = \frac{\mu_X - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Sulyginus gautas x parametro reikšmes, gauname 5.1 lygybės tvirtinimą.

Parinkime koreliacijos koeficientą $\rho_{12} = -1$.

Portfelio investicinė grąža $\mu_X = x\mu_1 + (1 - x)\mu_2$, todėl ir čia galioja tapatybė

$$x = \frac{\mu_X - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Apskaičiavus portfelio standartinį nuokrypį gauname, kad $\sigma_X = |x(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_2|$. Kadangi modulio reikšmė yra mažesnė už nulį, kai $x \in [0, \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}]$, todėl gauname tokias tapatybes:

$$\sigma_X = -x(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_2,$$

$$x \in [0, \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}]$$

$$\sigma_X = x(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_2,$$

$$x \in [\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, 1].$$

□

5.2 Portfelis su nerizikingais aktyvais

Parinkime portfelį X ir du šio portfelio aktyvus F ir S_1 . Aktyvo F pagrindiniai parametrai yra nusakomi taip: $(\sigma_f, \mu_f) = (0, r_f)$. Kadangi pirmasis parametras σ_f nurodo aktyvo standartinį nuokrypį, kuris yra lygus 0, todėl šis aktyvas yra laikomas **nerizikingu**.

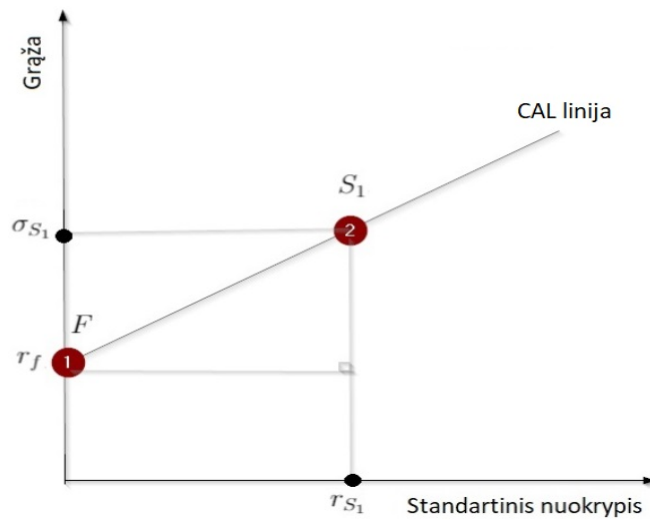
Portfelio X aktyvas S_1 apibrėžiamas tokiais parametrais: $(\sigma_1, \mu_1) = (\sigma_{S_1}, r_{S_1})$, čia $\sigma_{S_1} \geq 0$. Šio portfelio standartinis nuokrypis yra daugiau arba lygus nuliui, todėl šis aktyvas yra **rizikingas**.

Portfelis su šiais aktyvais gali būti aprašomas tokia tiesine kombinacija

$$X = xS_1 + (1 - x)F, x \in [0, 1]. \quad (5.2)$$

5.2.1 Kapitalo pasiskirstymo linija

Turime portfelį su vienu rizikingu aktyvu $S_1 - (\sigma_{S_1}, r_{S_1})$ ir nerizikingu $F - (\sigma_f, \mu_f)$. Plokštumoje, kurioje abscisė yra portfelio standartinis nuokrypis, o oordinatė - grąža, pažymėkime portfelius S_1 ir F . Tiesė, nubrėžta per abiejų portfelių taškus yra vadinama **kapitalo pasiskirstymo linija**. Ši linija apibūdina santykį tarp rizikingo aktyvo S_1 ir nerizikingo aktyvo F . Ši taškų aibė nurodo visus galimus portfelius sudarytus iš aktyvų S_1 ir F .



5.2 pav.: Kapitalo pasiskirstymo linija

6 skyrius

Kapitalo vertės nustatymo modelis - CAPM

Kapitalo vertės nustatymo modelio pradininkas yra W. Sharpe, išplėtodamas Markowitz modernaus portfelio teoriją jis sukūrė modelį, kuris papildomas tuo, kad atsižvelgiama į esamus, o ne tik istorinius rinkos ir gražų pasikeitimus. Šiame skyriuje remiamasi D.Cibulskienės ir Ž.Grigaliūmienės straipsnio *Modernios portfelio teorijos genezė ir vystymas*, išleisto 2007 metais leidinyje *Ekonomika ir vadyba: aktualijos ir perspektyvos* medžiaga [2].

Pagrindinės Sharpe modelio prielaidos:

- Visi investuotojai vengia rizikos ir siekia ją kuo labiau sumažinti.
- Portfelyje egzistuoja nerizikingas aktyvas F , kuris leidžia neribotą skolinimąsi, tai reiškia, jog portfelio koordinatės x_i gali būti mažesnės už nulį.
- Galima investuoti turimą turtą be papildomų sandorių sudarymo išlaidų, nėra nepa- dengtojo pardavimo.
- Visiems investuotojams prieinama vienoda informacija apie investicinius vienetus.
- Investuotojai turi vienodą laiką investiciniams sprendimams priimti.
- Visi investuotojai turi tą pačią informaciją apie investicinių vienetų riziką ir gražą.

Portfelis M - optimalus portfelis. Turime, kad portfelio M rizika yra lygi σ_M , o grąža - μ_M . Portfelis sudarytas iš aktyvų $S_i = (\sigma_i, \mu_i) \forall i \in [1, n]$.

Aktyvo S_i tikėtina grąža pažymėkime $\mathbb{E}r_i$ ir šis dydis yra lygus

$$\mathbb{E}r_i = r_f + \beta_i(\mathbb{E}r_M - r_f), \quad (6.1)$$

čia $\mathbb{E}r_M = \mu_M$ yra portfelio tikėtina grąža ir r_f - nerizikingo aktyvo grąža. Pažymėkime $(\mathbb{E}r_M - r_f)$ - portfelio rinkos premija.

Lygybės (6.1) konstanta β_i parodo investicinės aktyvo S_i grąžos svyravimus. Šis dydis yra lygus

$$\beta_i = \frac{cov(\mu_i, \mu_M)}{\sigma_M^2}.$$

Dydis β_i parodo, ar tam tikro aktyvo investicinė grąža yra labiau linkusi svyruoti už portfelio tikėtiną grąžą. Dydis β nurodo sisteminės, arba kitaip, nediversifikuojamos rizikos dydį.

Apibūdinti nesisteminę riziką padės atsitiktinis dydis e_i , priklausantis nuo aktyvo $S_i = (\sigma_i, r_i)$ kuris turi tenkinti šias sąlygas:

- $\mathbb{E}e_i = 1$ su visais i
- $cov(e_i, r_M) = 0$
- $e_i = r_i - \mathbb{E}r_i - \beta_i(r_M - \mathbb{E}r_M)$.

Tada aktyvo S_i nesisteminė rizika yra lygi $\sqrt{e_i}$.

Bendra aktyvo S_i rizika, įvertinus sisteminę ir nesisteminę rizikas yra lygi

$$\sigma_i = \beta_i \sigma_M + \sqrt{\mathbb{E}e_i}.$$

6.1 Rizikos - pelno priklausomybės koeficientas

Šiame skyriuje yra remiamasi G. Cornuejols ir R.Tutuncu leidiniu *Optimization Methods in Finance*, psl. 158 - 160, [3]. Koeficientas

$$k_X = \frac{\mu_X - r_f}{\sigma_X}$$

yra vadinamas **pelno - rizikos koeficientu** arba **Sharpe rodikliu** portfeliui X . Tai yra rezultatas, gaunamas iš optimalaus portfelio grąžos atimant nerizikingo aktyvo grąžą ir dalinant iš portfelio standartinio nuokrypio, kitaip sakant, rizikos įverčio.

7 skyrius

Optimizavimo uždavinys

Pagal Markowitz teorijos tvirtinimą, portfelis yra efektyvus tada, kai jis priklauso efektyvumo frontui. Tai reiškia, jog jei portfelis $X = (\sigma_X, \mu_X)$ yra optimalus, neegzistuoja toks portfelis $X_1 = (\sigma_{X_1}, \mu_{X_1})$, kad $\mu_X \leq \mu_{X_1}$ kai $\sigma_X = \sigma_{X_1}$ arba $\sigma_X \geq \sigma_{X_1}$ kai $\mu_X = \mu_{X_1}$. Vadinasi optimaliam portfeliui negali egzistuoti kitas portfelis, kuris grąžina didesnę investicinę grąžą esant tam pačiam rizikos lygiui arba toks, kuris turi mažesnę riziką tai pačiai investicinei grąžai pasiekti. Šiame skyriuje nagrinėjama, kaip galima optimizuoti portfelį dviem būdais - minimizuojant riziką turimai grąžai arba maksimizuojant grąžą turimai rizikai. Optimizavimo uždavinių teiginių įrodymai rašto darbe aprašyti remiantis A.Grigočia medžiaga *Rizikingų aktyvų portfelis* [5].

7.1 Rizikos minimizavimas

Portfelį X galima optimizuoti nustatant tam tikrą siekiamą investicinę grąžą μ_X ir kuo labiau mažinant rizikos lygį σ_X . Turime portfelį $X = x_1S_1 + x_2S_2 + \dots + x_nS_n$, čia $S_i = (\sigma_i, \mu_i)$, grąža $\mu_X = \sum_{i=1}^n x_i\mu_i$ yra pastovus dydis. Uždavinyje minimizuojama dispersija $\sigma_X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij}\sigma_i\sigma_jx_ix_j$ ir ieškomas portfelis, kai turint tam tikrą grąžą bus mažinama rizika.

7.1.1 Portfelis iš dviejų aktyvų

Iš pradžių nagrinėjamas portfelis X , kurį sudaro du aktyvai $S_1 - (\sigma_1, \mu_1)$ ir $S_2 - (\sigma_2, \mu_2)$. Portfelio vektorius $X := (x, 1 - x)$. Portfelis gali būti išreikštas lygtimi pagal (4.1) formulę:

$$X = xS_1 + (1 - x)S_2$$

Šio portfelio grąža μ_X ir rizika σ_X yra tokie:

$$\mu_X = \sum_{i=1}^2 x_i \mu_i = x\mu_1 + (1 - x)\mu_2,$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{i,j=1}^2 \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j x_i x_j = x^2 \sigma_1^2 + (1 - x)^2 \sigma_2^2 + 2x(1 - x) \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}$$

be to, tikėtina grąža yra fiksuotas dydis.

Reikia atrasti tokią vektorių $\mathbb{X} = (x, 1 - x)$ reikšmę, su kuria σ_X^2 reikšmė būtų minimali.

4 teiginys. Portfelio $X = xS_1 + (1 - x)S_2$ dispersija σ_X^2 ir standartinis nuokrypis σ_X yra minimalūs, kai

$$x = \frac{\sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}}{\sigma_{S_1 - S_2}^2}.$$

Irodymas. Tam, kad rastume, su kuria x reikšme portfelio dispersija yra minimali, reikia rasti $x^2 \sigma_1^2 + (1 - x)^2 \sigma_2^2 + 2x(1 - x) \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}$ minimumo tašką. Tokį tašką galime atrasti diferencijuodami lygtį pagal x

$$\begin{aligned} (\sigma_X^2)' &= (x^2 \sigma_1^2 + (1 - x)^2 \sigma_2^2 + 2x(1 - x) \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12})'_x = 2x \sigma_1^2 - 2(1 - x) \sigma_2^2 + 2(1 - x) \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} - \\ &2x \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} = 0 \implies x \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - x \sigma_1^2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} - 2x \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} = 0 \implies x(\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}) - \\ &\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 0 \implies x = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}}{\sigma_{S_1 - S_2}^2}. \end{aligned}$$

Lieka įrodyti, kad gautas ekstremumo taškas yra minimumo taškas. Tam reikia įsitikinti, kad funkcija $\sigma_X^2 = x^2 \sigma_1^2 + (1 - x)^2 \sigma_2^2 + 2x(1 - x) \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}$ yra iškila žemyn, turi būti tenkinama sąlyga $(\sigma_X^2)'' \geq 0$

$$(\sigma_X^2)'' = (2x \sigma_1^2 - 2(1 - x) \sigma_2^2 + 2(1 - 2x) \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12})' = 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} = 2\sigma_{S_1 - S_2}^2 \geq 0.$$

□

7.1.2 Portfelis iš n aktyvų

Nagrinėkime portfelį $\mathbb{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kuris yra sudarytas iš n aktyvų $(S_1, S_2, \dots, S_n)$, $S_i = (\sigma_i, \mu_i)$. $X = x_1 S_1 + x_2 S_2 + \dots + x_n S_n$. Šio portfelio dispersija yra apskaičiuojama

$\sigma_X^2 = \sum_{i,j=1}^2 \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j x_i x_j = \mathbb{X} Q \mathbb{X}^T$, čia $Q = (\sigma_{ij})$ yra $n \times n$ simetrinė kovariacijos matrica, čia $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$ kai $i \neq j$ ir $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$.

Q^{-1} yra kovariacijos matricos atvirkštinė, tai reiškia jog matricai Q^{-1} tenkinama lygybė $Q \times Q^{-1} = E$, čia E yra vienetinė matrica.

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

$$\mathbb{X}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Pažymėkime $\mathbb{V}$ matricą $(1 \times n)$, sudarytą tik iš vienetų

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{(1 \times n)}.$$

Portfelio grąža apskaičiuojama

$$\mathbb{E}[X] = \mu_X = x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \dots + x_n \mu_n = \mu^T \mathbb{X} = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i$$

čia μ yra visų aktyvų grąžų matrica

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}_{(1 \times n)}.$$

Optimizavimo uždavinyje su n aktyvų naudosime Lagrange dauginamųjų metodą. Lagrange funkcijos yra naudojamos sąlyginiam optimizavimo uždaviniui spręsti, čia nagrinėjamos funkcijos apribojimai yra užrašomos kaip papildomos lygtys. Funkcijos Lagrange funkcija sudaroma pagal tokią formulę:

$$L(\mathbb{X}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = f(\mathbb{X}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(\mathbb{X})$$

čia $g_i(\mathbb{X})$ yra apribojimų funkcija ir $g_i(\mathbb{X}) = 0$. Dviejų kintamųjų Lagrange funkcija atrodo taip

$$L(x, \lambda) = f(x).$$

Taip pat teisinga tapatybė su vienu Lagrange daugikliu λ ir rinkiniu $\mathbb{X}$

$$L(\mathbb{X}, \lambda) = f(\mathbb{X}) - \lambda g(x).$$

Rizikos minimizavimo ir gražos maksimizavimo optimizavimo uždaviniai yra sprendžiami naudojantis Lagrange sąlyginio optimizavimo metodais, kadangi turėsime n neapibrėžtųjų kintamųjų su tam tikrais apribojimais.

5 teiginys. *Portfelio $X = x_1S_1 + x_2S_2 + \dots + x_nS_n$ dispersija $\sigma_X^2 = \mathbb{X}Q\mathbb{X}^T$ ir standartinis nuokrypis σ_X yra minimalūs, kai*

$$\mathbb{X} = \frac{Q^{-1}\mathbb{V}^T}{\mathbb{V}Q^{-1}\mathbb{V}^T}$$

Irodymas. Portfelio standartinis nuokrypis yra apskaičiuojamas pagal formulę

$$\sigma_X^2 = \mathbb{X}Q\mathbb{X}^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j x_i x_j.$$

Minimizavimo uždavinys išreiškiamas taip

$$\min_x \frac{1}{2} \mathbb{X}Q\mathbb{X}^T.$$

Sudarykime portfelio lygties Lagrange funkciją, kai $g(x) = (\mathbb{V}\mathbb{X}^T - 1)$,

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = L(\mathbb{X}, \lambda) = \mathbb{X}Q\mathbb{X}^T - \lambda(\mathbb{V}\mathbb{X}^T - 1). \quad (7.2)$$

Raskime šios funkcijos minimumą raskdami dalines išvestines pagal du kintamuosius λ ir $\mathbb{X}$ ir prilyginkime jas nuliui

$$L(\mathbb{X}, \lambda)'_{\mathbb{X}} = 2Q\mathbb{X}^T - \lambda\mathbb{V}^T = 0, \quad (7.3)$$

$$L(\mathbb{X}, \lambda)'_{\lambda} = \mathbb{V}\mathbb{X}^T - 1 = 0. \quad (7.4)$$

Lygtis (7.4) yra triviali, kadangi gauname tokią tapatybę $\sum_{n=1}^{\infty} x_i = 1$. Portfelio visa bendra investuojama suma lygi vienetui, o x_i koordinatė parodo, kurią visų lėšų investuojame į aktyvą S_i .

Paimkime lygtį (7.3) ir išreiškime kintamąjį $\mathbb{X}$ per kitus parametrus

$$\mathbb{X}^T = \frac{\lambda \mathbb{V}^T}{2Q} = \frac{\lambda}{2} Q^{-1} \mathbb{V}^T. \quad (7.5)$$

Gautąją $\mathbb{X}^T$ išraišką įstatome į lygtį (7.3)

$$\mathbb{V} \mathbb{X}^T = 1 \implies \mathbb{V} \frac{\lambda}{2} \mathbb{V}^T Q^{-1} = 1 \implies \lambda = \frac{2}{\mathbb{V} Q^{-1} \mathbb{V}^T}.$$

Turimą λ išraišką galima įstatyti į (7.5) ir gausime $\mathbb{X}^T$ išraišką be nežinomų kintamųjų

$$\mathbb{X}^T = \frac{\lambda}{2} Q^{-1} \mathbb{V}^T = \frac{1}{2} \frac{2}{\mathbb{V} Q^{-1} \mathbb{V}^T} Q^{-1} \mathbb{V}^T = \frac{Q^{-1} \mathbb{V}^T}{\mathbb{V} Q^{-1} \mathbb{V}^T}.$$

Reikia patikrinti, ar gautoji reikšmė yra funkcijos minimumas. Tam reikia įsitikinti, kad funkcija $\sigma_X^2 = \mathbb{X} Q \mathbb{X}^T$ yra iškila žemyn, turi būti tenkinama sąlyga $(\sigma_X^2)'' \geq 0$.

Apskaičiuokime Lagrange funkcijos antrąją išvestinę. Lygtis

$$L(\mathbb{X}, \lambda)'_{\lambda} = \mathbb{V} = 1 \quad (7.6)$$

yra triviali, todėl naudojame pirmąją lygtį

$$L(\mathbb{X}, \lambda)''_{\mathbb{X}} = 2Q, \quad (7.7)$$

ir kadangi matrica Q yra kovariacijos matrica, ji yra teigiamai apibrėžta. $\square$

7.2 Gražos maksimizavimas

Portfelį X galima optimizuoti ir fiksuojant tam tikrą rizikos lygį σ_X ir maksimizuojant investicinę grąžą μ_X . Portfelio $X = x_1 S_1 + x_2 S_2 + \dots + x_n S_n$, kur $S_i = (\sigma_i, \mu_i)$ dispersija $\sigma_X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j x_i x_j$ yra pastovi, ir bus maksimizuojamas pelno - rizikos koeficientas $k_X = \frac{\mu_X - r_f}{\sigma_X}$, kai $\mu_X = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i$ ir r_f - nerizikingo aktyvo F duodama grąža. Kuo didesnis pelno - rizikos koeficientas, tuo didesnė investicinė grąža yra gaunama su ta pačia rizika.

7.2.1 Portfelis iš dviejų aktyvų

Iš pradžių nagrinėjamas portfelis X , kurį sudaro du aktyvai $S_1(\sigma_1, \mu_1)$ ir $S_2(\sigma_2, \mu_2)$. Portfelio vektorius $X := (x, 1 - x)$. Portfelio grąža $\mu_X = \sum_{i=1}^2 x_i \mu_i = x\mu_1 + (1 - x)\mu_2$.

Išsiveskime kintamuosius:

$$m_1 = \mu_1 - r_f,$$

$$m_2 = \mu_2 - r_f,$$

čia dydis m_i yra vadinamas **rizikos premija** - tai yra tam tikro aktyvo S_i gaunamos grąžos dydis, neįvertinus dispersijos.

6 teiginys. Portfelio $X = (x, 1 - x)$, sudaryto iš dviejų aktyvų $S_1 - (\sigma_1, \mu_1)$ ir $S_2 - (\sigma_2, \mu_2)$, $X = xS_1 + (1 - x)S_2$ pelno - rizikos koeficientas $k_X = \frac{\mu_X - r_f}{\sigma_X} = \frac{m_X}{\sigma_X}$ yra maksimalus tada, kai

$$x = \frac{m_1\sigma_2^2 - m_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{m_1(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}) + m_2(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12})}. \quad (7.8)$$

Irodymas. Pelno - rizikos koeficientas k_X yra maksimizuojamas ieškant šio kintamojo ekstremumo taškų. Kadangi teigiamos funkcijos $f(x)$ ekstremumo taškai sutampa su jos logaritmo $\ln(f(x))$ ekstremumo taškais, galime rasti $\ln(\frac{\mu_X - r_f}{\sigma_X})$ ekstremumą.

$$(\ln(\frac{\mu_X - r_f}{\sigma_X}))' = \frac{(\mu_X - r_f)'}{\mu_X - r_f} - \frac{(\sigma_X^2)'}{2\sigma_X^2} = \frac{2(\mu_X - r_f)'\sigma_X^2 - (\sigma_X^2)'(\mu_X - r_f)}{2(\mu_X - r_f)\sigma_X^2} = 0.$$

Ši lygybė bus teisinga tada, kai $2(\mu_X - r_f)'\sigma_X^2 - (\mu_X - r_f)(\sigma_X^2)' = 0$. Įstatykime lygybės tapatybes

$$\mu_X = x\mu_1 + (1 - x)\mu_2,$$

$$\sigma_X^2 = x^2\sigma_1^2 + (1 - x)^2\sigma_2^2 + 2x(1 - x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}.$$

Įsistatę portfelio grąžos ir dispersijos reikšmes gauname tokią lygtį

$$\begin{aligned} & 2(x\mu_1 + (1 - x)\mu_2 - r_f)'(x^2\sigma_1^2 + (1 - x)^2\sigma_2^2 + 2x(1 - x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}) \\ & - (x^2\sigma_1^2 + (1 - x)^2\sigma_2^2 + 2x(1 - x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12})'(x\mu_1 + (1 - x)\mu_2 - r_f) = 0. \end{aligned}$$

Apskaičiuojame išvestines pagal kintamąjį x

$$2(\mu_1 - \mu_2)(x^2\sigma_1^2 + (1 - x)^2\sigma_2^2 + 2x(1 - x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12})$$

$$-2(x\sigma_1^2 - (1-x)\sigma_2^2 + (1-2x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12})(x\mu_1 + (1-x)\mu_2 - r_f) = 0.$$

Pertvarkydami uždavinį gauname, kad

$$\begin{aligned} 2(\mu_X - r_f)' \sigma_X^2 - (\mu_X - r_f)(\sigma_X^2)' &= -x((\mu_1 - r_f)(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}) \\ &+ (\mu_2 - r_f)(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12})) + ((\mu_1 - r_f)\sigma_2^2 - (\mu_2 - r_f)\sigma_1\sigma_2\rho_{12})). \end{aligned}$$

Įsistatome reikšmes $m_1 = \mu_1 - r_f$ ir $m_2 = \mu_2 - r_f$

$$\begin{aligned} 2(\mu_X - r_f)' \sigma_X^2 - (\mu_X - r_f)(\sigma_X^2)' &= -x(m_1(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}) \\ &+ m_2(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12})) + (m_1\sigma_2^2 - m_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}) = 0 \\ \implies x(m_1(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}) + m_2(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12})) &= m_1\sigma_2^2 - m_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ \implies x &= \frac{m_1\sigma_2^2 - m_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{m_1(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}) + m_2(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12})}. \end{aligned}$$

Reikia patikrinti, ar gautoji reikšmė yra funkcijos maksimumas. Tam reikia įsitikinti, kad funkcija $k_X = \frac{\mu_X - r_f}{\sigma_X} = \frac{m_X}{\sigma_X}$ yra iškila aukštyn, turi būti tenkinama sąlyga $k_X'' \leq 0$

Paimkime sutvarkytą išvestinės lygtį ir dar kartą diferencijuokime

$$\begin{aligned} &(-x((\mu_1 - r_f)(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}) + (\mu_2 - r_f)(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12})) + ((\mu_1 - r_f)\sigma_2^2 - (\mu_2 - r_f)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}))'_X \\ &= -((\mu_1 - r_f)(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}) + (\mu_2 - r_f)(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12})) = -(m_1(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}) + m_2(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12})). \end{aligned}$$

Kadangi reikšmė skliaustuose yra teigiamas skaičius, gauname, kad antroji išvestinė yra neigiama ir gautoji reikšmė yra funkcijos maksimumas. $\square$

7.2.2 Portfelis iš n aktyvų

Turime tuos pačius portfelio $X = x_1S_1 + x_2S_2 + \dots + x_nS_n$ parametrus, kaip ir 7.1.2 skyrelyje - $\mathbb{X}, Q, \mathbb{V}, \sigma_X, \mu_X$, rizikos premijas m_i ir portfelio pelno - rizikos koeficientą k_X . Portfelio dispersija $\sigma_X^2 = \sum_{i,j=1}^2 \rho_{ij}\sigma_i\sigma_jx_ix_j = \mathbb{X}Q\mathbb{X}^T$. Atskirkime žymėjimus: μ yra portfelio aktyvų gražų vektorius, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, o μ_X yra skaliarinis dydis, portfelio gražos skaitinė vertė $\mu_X = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \mu^T \mathbb{X}$. Portfelio su n aktyvų pelno - rizikos koeficientas yra lygus

$$k_X = \frac{\mathbb{X}\mu^T - r_f}{\sigma_X} = \frac{\mathbb{X}\mu^T - r_f}{\sqrt{\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T}}.$$

Pažymėkime $\mathbb{A}_{(1 \times n)}$ matricą, kur kiekviena koordinatė yra gaunama iš tam tikro aktyvo S_i grąžos μ_i atėmus nerizikingo aktyvo $F - (0, r_f)$ grąžą r_f

$$\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} \mu_1 - r_f \\ \mu_2 - r_f \\ \vdots \\ \mu_n - r_f \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

7 teiginys. *Portfelio $X = x_1 S_1 + x_2 S_2 + \dots + x_n S_n$ pelno - rizikos koeficientas k_X yra maksimalus, kai*

$$\mathbb{X} = \frac{Q^{-1} \mathbb{A}^T}{\mathbb{V} Q^{-1} \mathbb{A}^T}.$$

Įrodymas. Optimizavimo uždavinyje bus ieškomas maksimalus pelno - rizikos rizikos koeficientas fiksuotam rizikos lygiui. Tam, kad rastume

$$k_X = \frac{\mathbb{X} \mu^T - r_f}{\sigma_X} = \frac{\mathbb{X} \mu^T - r_f}{\sqrt{\mathbb{X} Q \mathbb{X}^T}}$$

funkcijos maksimumą pasinaudosime Lagrange dauginamųjų metodu ir rasime sąlyginį ekstremumą - prie kintamojo λ pridėsime sąlyginę funkciją, kad visų portfelio svorių x_i suma turi būti lygi vienetui

$$L(\mathbb{X}, \lambda) = \frac{\mu^T \mathbb{X} - r_f}{\sqrt{\mathbb{X} Q \mathbb{X}^T}} + \lambda (\mathbb{V} \mathbb{X}^T - 1).$$

Apskaičiuojame dalines funkcijos $L(\mathbb{X}, \lambda)$ išvestines pagal $\mathbb{X}$ ir λ ir prilyginkime jas nuliui

$$L(\mathbb{X}, \lambda)'_{\mathbb{X}} = \frac{\mu^T \sqrt{\mathbb{X} Q \mathbb{X}^T} - (\mathbb{X} \mu^T - r_f) \frac{Q \mathbb{X}^T}{\sqrt{\mathbb{X} Q \mathbb{X}^T}}}{\mathbb{X} Q \mathbb{X}^T} + \lambda \mathbb{V}^T = 0, \quad (7.10)$$

$$L(\mathbb{X}, \lambda)'_{\lambda} = \mathbb{V} \mathbb{X}^T - 1 = 0. \quad (7.11)$$

Padauginkime pirmąją lygtį (7.10) ir padauginkime abi lygties puses iš reikšmės iš $(\mathbb{X} Q \mathbb{X}^T)$

$$L(\mathbb{X}, \lambda)'_{\mathbb{X}} = \mu^T \sqrt{\mathbb{X} Q \mathbb{X}^T} - (\mathbb{X} \mu^T - r_f) \frac{Q \mathbb{X}^T}{\sqrt{\mathbb{X} Q \mathbb{X}^T}} + \lambda \mathbb{V}^T (\mathbb{X} Q \mathbb{X}^T) = 0.$$

Papildomai dar panaikinkime šaknį antro nario vardiklyje padaugindami lygtį iš $\sqrt{\mathbb{X} Q \mathbb{X}^T}$

$$\mu^T (\mathbb{X} Q \mathbb{X}^T) - (\mathbb{X} \mu^T - r_f) Q \mathbb{X}^T + \lambda \mathbb{V}^T (\mathbb{X} Q \mathbb{X}^T)^{\frac{3}{2}} = 0. \quad (7.12)$$

Matome, kad beveik visi lygties nariai turi narį $\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T$ išskyrus antrąjį, kuris turi dauginamąjį $Q\mathbb{X}^T$. Tam, kad suprastintume reiškini, padauginame visus lygties narius iš $\mathbb{X}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{X}\mu^T(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T) - (\mathbb{X}\mu^T - r_f)(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T) + \mathbb{X}\lambda\mathbb{V}^T(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T)(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (7.13) \\ \implies & (\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T)(\mathbb{X}\mu^T - (\mathbb{X}\mu^T - r_f) + \mathbb{X}\lambda\mathbb{V}^T(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T)^{\frac{1}{2}}) = 0 \\ \implies & (\mathbb{X}\mu^T - (\mathbb{X}\mu^T - r_f) + \mathbb{X}\lambda\mathbb{V}^T(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T)^{\frac{1}{2}}) = 0 \\ \implies & r_f + \mathbb{X}\lambda\mathbb{V}^T(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T)^{\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Pagal uždavinio sąlygą turime, kad $\mathbb{X}\mathbb{V}^T = 1$. Todėl turime, kad

$$r_f + \lambda(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T)^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (7.14)$$

Iš lygties (7.14) galime išreikšti kintamąjį λ

$$\lambda = -r_f(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T)^{-\frac{1}{2}}. \quad (7.15)$$

Grįžkime prie lygties (7.12) ir įstatykime gautąją λ reikšmę

$$\begin{aligned} & \mu^T(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T) - (\mathbb{X}\mu^T - r_f)Q\mathbb{X}^T - r_f(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{V}^T(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (7.16) \\ \implies & \mu^T(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T) - (\mathbb{X}\mu^T - r_f)Q\mathbb{X}^T - r_f\mathbb{V}^T(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T) = 0. \end{aligned}$$

Lygties narius su vienodais dauginamaisiais sukeliamo į kairiąją lygties pusę, o su skirtingais - į dešiniąją

$$(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T)(\mu^T - r_f\mathbb{V}^T) = (\mathbb{X}\mu^T - r_f)Q\mathbb{X}^T.$$

Iš dešinės lygties pusės išreiškiame $\mathbb{X}^T$

$$\mathbb{X}^T = \frac{\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T(\mu^T - r_f\mathbb{V}^T)Q^{-1}}{(\mathbb{X}\mu^T - r_f)}.$$

Taip pat turime uždavinio sąlygą, kad $\mathbb{V}\mathbb{X}^T = 1$, todėl padaugindami abi lygties puses gauname

$$1 = \mathbb{V} \frac{\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T(\mu^T - r_f\mathbb{V}^T)Q^{-1}}{(\mathbb{X}\mu^T - r_f)}.$$

Taip pat pastebėkime, kad

$$\mu^T - r_f = \mathbb{A}^T.$$

Įrašę šią išraišką gauname

$$1 = \mathbb{V} \frac{\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T\mathbb{A}^TQ^{-1}}{\mathbb{X}\mathbb{A}^T} \implies \mathbb{X}Q\mathbb{X}^T = \frac{\mathbb{X}\mathbb{A}^T}{Q^{-1}\mathbb{A}^T\mathbb{V}} \implies Q\mathbb{X}^T = \frac{\mathbb{A}^T}{Q^{-1}\mathbb{A}^T\mathbb{V}} \implies \mathbb{X}^T = \frac{Q^{-1}\mathbb{A}^T}{Q^{-1}\mathbb{A}^T\mathbb{V}}.$$

Gauname reikšmę, kuri yra funkcijos ekstremumas. Blieka patikrinti, ar ši reikšmė yra funkcijos maksimumas. Tam reikia parodyti, kad funkcija

$$(k_X)'' = \frac{\mu^T\mathbb{X} - r_f}{\sigma_X} = \frac{\mu^T\mathbb{X} - r_f}{\sqrt{\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T}}$$

yra iškila aukštyn ir tam turi būti tenkinama sąlyga $k_X'' \leq 0$.

Diferencijuokime išvestinę (7.16) pagal $\mathbb{X}$

$$(k_X)'' = (\mu^T(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T) - (\mathbb{X}\mu^T - r_f)Q\mathbb{X}^T - r_f\mathbb{V}^T(\mathbb{X}Q\mathbb{X}^T))'_X = 2\mu^T\mathbb{X}Q - 2\mu^T\mathbb{X}Q + r_fQ - 2r_f\mathbb{V}^T\mathbb{X}Q = r_fQ(1 - 2\mathbb{V}^T\mathbb{X}) = -r_fQ.$$

Išvestinės reikšmė yra neigiama, nes r_fQ yra teigiamai apibrėžta matrica, todėl gauname, jog funkcija yra iškila auštyn ir gautoji reikšmė yra funkcijos maksimumas. $\square$

8 skyrius

Optimalaus portfelio sudarymas su Microsoft Excel programa

Optimalaus portfelio uždavinį spręsimė pasitelkę Microsoft Excel programą, kadangi ši programa apdoroja didelės apimties informaciją, tokią kaip istorines įmonių grąžas bei yra tinkama apskaičiuoti šių įmonių investicinius parametrus, tokius kaip tikėtina grąža, standartinis nuokrypis, įmonių tarpusavio koreliacija. Taip pat Excel turi papildomą SOLVER funkciją, su kuria yra patogiau ieškoti optimalaus sprendimo pagal nustatytus apribojimus.

Apskaičiuoti įmonių istorines grąžas ir kitus parametrus yra reikalinga įmonių akcijų istorinės kainos vienodais laikotarpiais. Įmonių uždarymo kainos yra parenkamos iš Nasdaq duomenų bazės (duomenų šaltiniai [9], [10], [11], [12]).

8.1 Statistiniai įmonių parametrai

Rašto darbe nagrinėjamos keturios pasaulinio žinomumo įmonės - *Apple Inc.* [9], *Tesla Motors* [10], *Amazon* [11] ir *Netflix* [12]. Iš duomenų bazės surinktos šių įmonių uždarymo kainos nuo 2018.01.01 iki 2020.01.01. Pagal šią istorinę informaciją apskaičiuojamos visų įmonių istorinės grąžos bei tikėtina kiekvieno aktyvo grąža.

Istorinės grąžos kiekviena laiko momentui apskaičiuojamos pagal formulę

$$r_1 = \frac{V_1 - V_0}{V_0},$$

čia V_0 yra aktyvo uždarymo kaina laikotarpio pradžioje, o V_1 - uždarymo kaina laikotarpio pabaigoje. Surenkame visas istorines grąžas per dvejus metus r_i ir pagal Excel funkcijas AVERAGE, VAR ir STDEV.S randame šių aktyvų tikėtinas grąžas $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, dispersijas bei standartinius nuokrypius $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$.

	Vidutinė grąža	Nuokrypis	Dispersija
Apple Inc.	0.001214	0.017355	0.000301
Tesla Motors	0.001105	0.034076	0.001161
Amazon	0.00106	0.019027	0.000362
Netflix	0.001276	0.025710	0.000661

8.1 lentelė: Aktyvų grąžos, dispersijos ir standartiniai nuokrypiai

Pagal Excel funkciją COVAR randame šių aktyvų tarpusavio kovariacijos matricą $\mathbb{Q}$, kuri bus reikalinga portfelio rizikai skaičiuoti. Šią matricą pavaizduokime kaip lentelę

	Apple inc.	Tesla Motors	Amazon	Netflix
Apple Inc.	0.00030061	0.00019053	0.000205345	0.000212405
Tesla Motors	0.000190533	0.001158886	0.000210313	0.000274161
Amazon	0.000205345	0.000210313	0.000361287	0.000324766
Netflix	0.000212405	0.000274161	0.000324766	0.000659701

8.2 lentelė: Aktyvų kovariacijos matrica

Pažymėkime

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

čia $\mathbb{X}$ yra portfelių svorių matrica ir visų svorių bendra suma yra lygi vienetui. Excel porg-ramoje $\mathbb{X}$ žymimas kaip X . Svoris x_1 parodo, kokią visų investicijų dalį investuosime į *Apple Inc.*, x_2 - *Tesla Motors* investuojamos sumos svoris, x_3 - *Amazon* svoris ir x_4 - *Netflix* svoris.

Turime portfelio aktyvų grąžų matricą

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.001214 \\ 0.001105 \\ 0.001060 \\ 0.001278 \end{pmatrix}.$$

Excel programoje grąžų matricą pažymėta R . Investicinio portfelio tikėtina grąža randama pagal tokią formulę

$$\mu_X = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + x_3\mu_3 + x_4\mu_4 = \mu^T \mathbb{X},$$

o Excel programoje tai atitinka tokią funkciją

$$= \text{mmult}(\text{transpose}(X); R).$$

Portfelio dispersija yra apskaičiuojama pagal formulę

$$\sigma_X^2 = \sum_{i,j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j x_i x_j = \mathbb{X} Q \mathbb{X}^T.$$

Excel programoje ši tapatybė atitinka funkciją

$$= \text{mmult}(\text{mmult}(\text{transpose}(X); Q); X).$$

Standartiniui nuokrypiui rasti panaudosime SQRT funkciją apskaičiuotai dispersijos reikšmei. Toliau sprendžiamas uždavinys su SOLVER funkcija, kur parinkus įvairius apribojimus yra ieškoma optimalaus portfelio matrica $\mathbb{X}$.

8.2 Lygių svorių portfelis

Iš pradžių parinkime tokį portfelį, kuriame visos investuotojo lėšos aktyvams yra paskirtos po lygiai - po 25 proc. kiekvienam aktyvui. Šio portfelio matrica $\mathbb{X}$ yra lygi

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Šis portfelis palyginimui su kitais portfeliais, kurie yra optimalūs pagal Markowitz teoriją.

Investuodami į visus portfelius po lygią dalį investicijų gauname, kad tikėtina portfelio grąža yra lygi 0.0011643, o standartinis nuokrypis yra lygus 0.018227.

Tikėtina graža	0.001643
Standartinis nuokrypis	0.018227

8.3 lentelė: Lygių svorių portfelis

8.3 Maksimalios gražos portfelis

Uždavinio diversifikavimo sąlygos:

- 1) Visų aktyvų svoriai turi būti didesni už nulį - neleidžiama skolinimosi galimybė.
- 2) Visų aktyvų suma turi būti lygi vienetui.

Gražos maksimizavimo uždavinyje nėra taikomi jokie rizikos apribojimai, todėl tikėtina, jog didelės investicinė gražos portfelis gali turėti gan aukštą rizikos lygį.

Pagal SOLVER funkciją gauname, jog portfelio matrica yra lygi

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Galime pasakyti, jog maksimali investicinė graža yra pasiekama, jeigu visą turtą investuojame į vieną aktyvą - *Netflix*. Tai galime pastebėti pagal statistinius parametrus, kadangi šis aktyvas turi didžiausią investicinę gražą - 0.001278. Tačiau šis portfelis turi ir didelį rizikos lygį, lyginant su kitais portfeliais - 0,025685.

Tikėtina graža	0.001278
Standartinis nuokrypis	0.025685

8.4 lentelė: Maksimalios gražos portfelis

8.4 Maksimalios gražos optimalus portfelis

Šiam uždaviniui spręsti reikalinga SOLVER funkcija, kurioje yra suformuojamos diversifikavimo sąlygos:

- 1) Visų aktyvų svoriai turi būti didesni už nulį - neleidžiama skolinimosi galimybė.
- 2) Visų aktyvų suma turi būti lygi vienetui.

3) Nustatomas rizikos lygis - rizika negali viršyti 0.02

Šiame uždavinyje nustatomas tam tikras rizikos apribojimas, optimalus rezultatas ieškomas nustačius tam tikras rizikos ribas.

Pagal SOLVER funkciją gauname, jog portfelio matrica yra lygi

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0.37 & 0 & 0 & 0.63 \end{pmatrix}.$$

Gauname, jog maksimali investicinė grąža su nustatytu rizikos lygiu, kuris yra lygus 2 proc., yra pasiekama, jeigu 37 proc. turto investuojama į *Apple Inc.* ir 63 proc. investuojama į *Netflix* - šie abu aktyvai yra teikiantys didžiausias grąžas, bet *Apple Inc.* turi mažesnę investavimo riziką nei *Netflix*.

Uždavinio rezultatai:

Tikėtina grąža	0.001254
Standartinis nuokrypis	0.02

8.5 lentelė: Maksimalios grąžos optimalus portfelis

8.5 Minimalios rizikos portfelis

Minimalios rizikos portfelio SOLVER diversifikavimo sąlygos:

- 1) Visų aktyvų svoriai turi būti didesni už nulį - neleidžiama skolinimosi galimybė.
- 2) Visų aktyvų suma turi būti lygi vienetui.

Rizikos minimizavimo uždavinyje nėra nustatoma siekiama investicinė grąža. Tikėtina, jog mažinant riziką grąža taip pat bus nedidelė.

Pagal SOLVER funkciją gauname, jog portfelio matrica yra lygi

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0.58 & 0.06 & 0.34 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Gauname, kad siekiant kuo labiau msumažinti riziką, didžiausią turto dalį reikėtų investuoti į *Apple Inc.* - 58 proc. bendrų lėšų. Šioje situacijoje į *Netflix* investuojama mažiausia

lėšų dalis - tik 1 proc., kadangi šiame uždavinyje neatsižvelgiama į grąžą, o siekiama kuo labiau sumažinti riziką.

Uždavinio rezultatai:

Tikėtina grąža	0.001156
Standartinis nuokrypis	0.016128

8.6 lentelė: Minimalios rizikos portfelis

8.6 Minimalios rizikos optimalus portfelis

Minimalios rizikos portfelio SOLVER diversifikavimo sąlygos:

- 1) Visų aktyvų svoriai turi būti didesni už nulį - neleidžiama skolinimosi galimybė.
- 2) Visų aktyvų suma turi būti lygi vienetui.
- 3) Nustatomas siekiamos grąžos dydis - grąža turi būti lygi 0.00118 per dieną.

Uždavinyje nustatomas konkretus siekiamos grąžos dydis ir yra ieškoma minimalios rizikos portfelis siekiant šios grąžos.

Pagal SOLVER funkciją gauname, jog portfelio matrica yra lygi

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.05 & 0.21 & 0.08 \end{pmatrix}.$$

Šiame uždavinyje padidinama investuojamų į *Netflix* aktyvą lėšų dalis - 8 proc., kadangi yra nustatomas tam tikras grąžos dydis, kuris turi būti pasiektas investuojant, tačiau pagrindinis kriterijus išlieka kuo labiau sumažinta rizika. dar labiau padidinama investicijų dalis į *Apple Inc.* - 65 proc.

Uždavinio rezultatai:

Tikėtina grąža	0.00118
Standartinis nuokrypis	0.01622

8.7 lentelė: Minimalios rizikos optimalus portfelis

8.7 Rezultatų apibendrinimas

Galima sulyginti visas lenteles, kuriose atvaizduojami gauti rezultatai investuojant vienu ar kitu būdu.

Didžiausią investicinę gražą turi aktyvas *Netflix*, todėl į šį aktyvą investuojama didžiausia lėšų dalis siekiant padidinti pelną. tačiau šis aktyvas turi ir didelį standartinį nuokrypį. Šis aktyvas yra rizikingas, tačiau ir pelningiausias.

Aktyvas *Amazon* turi nedidelę investicinę gražą ir vieną mažiausių standartinių nuokrypių. Dėl nedidelės gražos į šį aktyvą nebuvo investuota maksimizuojant pelną. Kadangi aktyvo standartinis nuokrypis yra nedidelis, šis aktyvas turi didesnę svorį rizikos minimizavimo portfeliuose. Šis aktyvas yra nerizikingas, bet ir neteikiantis didelio pelno.

Aktyvas *Tesla Motors* turi sąlyginai nedidelę investicinę gražą ir yra rizikingiausias, todėl sprendžiant uždavinį į šį aktyvą nebuvo investuojama išvis arba buvo investuojama nedidelė dalis lėšų. Šio aktyvo svoris buvo nelygus nuliui tik rizikos minimizavimo uždaviniuose, kadangi vienas iš esminių rizikos mažinimo būdų - lėšų paskirstymas skirtingiems aktyvams (diversifikavimas). Šis aktyvas yra neefektyviausias.

Aktyvas *Apple Inc.* turi vieną didžiausių investicinių gražų taip pat ir mažiausią standartinį nuokrypį, todėl optimizuojant uždavinį dviem būdais (maksimizuojant gražą fiksavus riziką ir minimizuojant riziką fiksavus gražą) į šį aktyvą yra investuojama didelė dalis lėšų. Abiem optimizavimo atvejais, kai yra įvedami papildomi apribojimai, šio aktyvo svoris padidėja, todėl galima daryti išvadą, jog šis aktyvas yra efektyviausias.

9 skyrius

Išvados

Modernus investicinio portfelio optimizavimo procesas yra paremtas Markowitz optimalaus portfelio teorija. Teorijos pagrindinės idėjos - investuojant į tam tikrus aktyvus reikia atsižvelgti ne tik į investicinę grąžą, tačiau ir į aktyvo riziką. Įvertinti portfelio investicinės grąžos ir standartinio nuokrypio santykį yra formuojamas efektyvumo frontas - aibė portfelių, kurie turi didžiausią investicinę grąžą fiksuotam rizikos lygiui arba turi mažiausią riziką tam tikrai siekiamai grąžai. Visi portfeliai priklausantys efektyvumo frontui yra optimalūs ir sprendimas, į kurį portfelį investuoti, priklauso nuo investuotojo polinkio rizikuoti.

Investicinis portfelis, kuris yra optimizuojamas pagal Markowitz teoriją, yra sudarytas tik iš rizikingų aktyvų. Rizikingų aktyvų derinimas su nerizikingais išplėtė Markowitz teoriją. Rizikingų atvyvų derinimas su nerizikingais yra nagrinėjamas CAPM modelyje. Šiame modelyje yra įvertinama ne tik aktyvo istorinės dispersijos, bet ir rinkos rizika.

Efektyvaus fronto ir CAPM modeliai didesnę dėmesį skiria įvertinti portfelio riziką nei investicinę grąžą. Baigiamojo darbo uždavinyje atvaizduojama, kad jei formuojant maksimalios grąžos portfelį yra nesilaikoma rizikos ribojimo, portfelis tampa labai rizikingu, nors ir žadantis didelę grąžą. Analogiškai, jeigu formuojamas minimalios rizikos portfelis nenustatant siekiamos grąžos, rizika yra sumažinama iki minimumo, tačiau tokiu atveju portfelis yra neteikiantis pelno.

Literatūra

- [1] D.P. BERTSEKAS, J.N. TSITSIKLIS *Introduction to Probability* https://vfubg/en/e-Learning/Math--Bertsekas_Tsitsiklis_Introduction_to_probability.pdf
- [2] D. CIBULSKIENĖ, Ž. GRIGALIŪNIENĖ *Modernios portfelio teorijos genezė ir vystymasis* ISSN 1648-9098 *Ekonomika ir vadyba: aktualijos ir perspektyvos*. 2007. 1 (8). 52–61 http://www.su.lt/bylos/mokslo_leidiniai/ekonomika/7_8/cibulskiene.pdf?fbclid=IwAR246-aEHXOMwU0CEKzX_7F8MoSAZEizQcqVYqy4rLGS8IYQ_ZggNeCiLnk
- [3] G. CORNUEJOLS, R. TUTUNCU *Optimization methods in Finance* http://web.math.ku.dk/~rolf/CT_FinOpt.pdf, 141-171, 2006
- [4] A. GANTI *Capital Market Line CML* <https://www.investopedia.com/terms/c/cml.asp>
- [5] A. GRIGUTIS *Rizikingų aktyvų portfelis* <https://klevas.mif.vu.lt/~andriusg>
- [6] LIETUVOS BANKAS *Investavimas: Nuo ko pradėti?* <https://www.lb.lt/lt/investavimas-nuo-ko-pradeti#ex-1-2>
- [7] H. MARKOWITZ *Portfolio Selection* *The Journal of Finance*, Vol.7, No. 1, 1952 https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf
- [8] E. PICARDO *Investing* <https://www.investopedia.com/terms/i/investing.asp>
- [9] YAHOO FINANCE *Apple Inc. Historical Price* <https://finance.yahoo.com/quote/AAPL/history/>

- [10] YAHOO FINANCE *Tesla Motors Historical Price* <https://finance.yahoo.com/quote/TSLA/history/>
- [11] YAHOO FINANCE *Amazon Historical Price* <https://finance.yahoo.com/quote/AMZN/history/>
- [12] YAHOO FINANCE *Netflix Historical Price* <https://finance.yahoo.com/quote/NFLX/history/>

A Priedas

Aktyvų akcijų kainos

Pridedama informacija - aktyvų akcijų kainos. Optimizavimo uždavinys buvo sprendžiamas su kasdieninėmis, o ne kas mėnesinėmis gražomis, tačiau šie duomenys buvo sutraukti ir į priedų skyrių įtraukiamas tik duomenų fragmentas.

DATA	UŽDARYMO KAINA			
	Apple	Tesla Motors	Amazon	Netflix
12/31/2019	293.65	418.33	1847.84	323.57
11/29/2019	267.25	329.94	1800.8	314.66
10/31/2019	248.76	314.92	1776.66	287.41
9/30/2019	223.97	240.87	1735.91	267.62
8/30/2019	208.74	225.61	1776.29	293.75
7/31/2019	213.04	241.61	1866.78	322.99
6/28/2019	197.92	223.46	1893.63	367.32
5/31/2019	175.07	185.16	1775.07	343.28
4/30/2019	200.67	238.69	1926.52	370.54
3/29/2019	189.95	279.86	1780.75	356.56
2/28/2019	173.15	319.88	1639.83	358.10
1/31/2019	166.44	307.02	1718.73	339.50
12/31/2018	157.74	332.80	1501.97	267.66
11/30/2018	178.58	350.48	1690.17	286.13
10/31/2018	218.86	337.32	1598.01	301.78
9/28/2018	225.74	264.77	2003	374.13
8/31/2018	227.63	301.66	2012.71	367.68
7/31/2018	190.29	298.14	1777.44	337.45
6/29/2018	185.11	342.95	1699.8	391.43
5/31/2018	186.87	284.73	1629.62	351.60
4/30/2018	165.26	293.90	1566.13	312.46
3/29/2018	167.78	266.13	1447.34	295.35
2/28/2018	178.12	343.06	1512.45	291.38
1/31/2018	167.43	354.31	1450.89	270.30

A.1 pav.: Aktyvų akcijų kainos kas mėnesį