VILNIAUS UNIVERSITETAS

VAIDOTAS CHARACIEJUS

RIBINIS ILGOSIOS ATMINTIES FUNKCINIŲ TIESINIŲ PROCESŲ ELGESYS

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2015

Disertacija rengta 2010-2014 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:

prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P).

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje

Pirmininkas:

prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P);

Nariai:

prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P);

prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P);

prof. habil. dr. Donatas Surgailis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P);

prof. habil. dr. Anne Philippe (Nanto universitetas, Prancūzija, fiziniai mokslai, matematika - 01 P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2015 m. vasario mėn. 13 d. 16 val. Matematikos ir informatikos fakulteto Jono Kubiliaus (102) auditorijoje.

Adresas: Naugarduko g. 24, Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2015 m. sausio mėn. 13 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

1 Nagrinėjama problema

Tarkime, jog $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ yra tiesinis procesas su reikšmėmis separabilioje Hilberto erdvėje $\mathbb{H}$, t.y. $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ yra tokia erdvės $\mathbb{H}$ atsitiktinių elementų seka, kurios kiekvienas narys apibrėžiamas lygybe

$$X_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\varepsilon_{k-j}), \tag{1}$$

čia $\{a_j : j \geq 0\} \subset L(\mathbb{H})$ yra tiesiniai aprėžti operatoriai, apibrėžti erdvėje $\mathbb{H}$ ir įgyjantis reikšmes taip pat erdvėje $\mathbb{H}$, $\{\varepsilon_k : k \in \mathbb{Z}\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai erdvės $\mathbb{H}$ elementai. Svarbus klausimas, ar tiesinio proceso $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ribinis elgesys skiriasi nuo nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių erdvės $\mathbb{H}$ elementų ribinio elgesio.

Ribinis elgesys disertacijoje nagrinėjamas kaip normuotų dalinių sumų ir normuotų atsitiktinių laužčių konvergavimas tam tikra prasme. Dalinės sumos $\{S_n : n \geq 1\}$ apibrėžiamos lygybe

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

visiems $n \geq 1$, o atsitiktinės laužtės $\{\zeta_n : n \geq 1\} = \{\zeta_n(t) : t \in [0,1]\}_{n \geq 1}$ apibrėžiamos lygybe

$$\zeta_n(t) = S_{\lfloor nt \rfloor} + (nt - \lfloor nt \rfloor) X_{\lfloor nt \rfloor + 1}$$

visiems $n \geq 1$ ir visiems $t \in [0,1]$, čia $\lfloor x \rfloor$ yra sveikoji realiojo skaičiaus $x \in \mathbb{R}$ dalis, apibrėžiama lygybe $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$ visiems $x \in \mathbb{R}$.

Tiesinio proceso $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ribinis elgesys priklauso nuo to, ar operatorių normų eilutė

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\| \tag{2}$$

konverguoja, čia $\|a_j\| = \sup\{\|a_j(x)\| : x \in \mathbb{H} \text{ su } \|x\| \leq 1\}$ visiems $j \geq 0$. Jei (2) eilutė konverguoja, tiesinių procesų ribinis elgesys iš esmės yra toks kaip nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių elementų (tokį atvejį nagrinėjo Merlevède, Peligrad ir Utev [16] bei Račkauskas ir Suquet [19]). Pavyzdžiui, jeigu (2) eilutė konverguoja, $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$ ir $\mathrm{E}\,\|\varepsilon_0\|^2 < \infty$ (čia $\|\cdot\|$ yra erdvės $\mathbb{H}$ norma), tada $n^{-1/2} S_n$ konverguoja pagal pasiskirstymą į erdvės $\mathbb{H}$ nulinio vidurkio gausinį atsitiktinį elementą. Tačiau kai (2) eilutė diverguoja, ribinis elgesys gali skirtis nuo nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių elementų ribinio elgesio (tokį atvejį nagrinėjo Louhichi ir Soulier [14], Račkauskas ir Suquet [20], Characiejus ir Račkauskas [4, 5]).

2 Problemos aktualumas

Centrinė ribinė teorema

Ibragimov ir Linnik [11] įrodė, jog realiesiems tiesiniams procesams centrinė ribinė teorema galioja, kai normuojama šaknimi iš dalinių sumų dispersijos, jeigu dalinių sumų dispersija auga.

1 teorema. *Tarkime, kad* $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *yra realusis tiesinis procesas su* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 < \infty$, $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$ *ir* $\mathrm{E}\,\varepsilon_0^2 < \infty$. *Jeigu* $\mathrm{E}\,|S_n|^2 \to \infty$, *kai* $n \to \infty$, *tada*

$$\frac{S_n}{\sqrt{\mathrm{E}\,|S_n|^2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1), \quad \textit{kai} \quad n \to \infty,$$

čia ir toliau $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ *žymi konvergavimą pagal pasiskirstymą.*

Tačiau iš 1 teoremos sąlygų neišeina gauti ribinio dalinių sumų dispersijos elgesio – tam reikalingos papildomos sąlygos realiajai sekai $\{a_j : j \geq 0\}$.

Dalinių sumų dispersija auga tiesiškai, jeigu (2) eilutė konverguoja ir eilutė

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

nėra lygi nuliui. Tokiu atveju centrinė ribinė teorema realiajam tiesiniam procesui galioja su tokiu pačiu normavimu kaip nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių atveju, t.y. normuojama $\sqrt{n}$ (žiūrėkite Phillips ir Solo [18] bei Beran, Ghosh, Feng ir Kulik [1]).

Kai (2) eilutė diverguoja, dalinių sumų dispersija gali augti greičiau negu tiesiškai ir centrinėje ribinėje teoremoje gali būti normuojama nebe $\sqrt{n}$. Tokio tiesinio proceso paprastas pavyzdys yra realusis tiesinis procesas su realiąja seka$\{a_j : j \geq 0\}$, apibrėžta lygybe

$$a_j = (j+1)^{-\varphi} \tag{3}$$

visiems $j \geq 0$ su $1/2 < \varphi < 1$. Tada dalinių sumų dispersijai galioja toks sąryšis:

$$\mathrm{E}\,|S_n|^2 \sim c \cdot n^{3-2\varphi}, \quad \text{kai} \quad n \to \infty,$$

čia c yra teigiama konstanta, o simboliu $\sim$ žymima tai, jog kairėje ir dešinėje pusėje esančių sekų santykis artėja į 1, kai $n \to \infty$. Centrinė ribinė teorema realiajam tiesiniam procesui su realiąja seka $\{a_j : j \geq 0\}$, apibrėžta (3) lygybe, galioja su normavimu $n^{3/2-\varphi}$ (žiūrėkite Giraitis, Koul ir Surgailis [9] bei Beran, Ghosh, Feng ir Kulik [1]).

Nagrinėdami centrinę ribinę teoremą tiesiniams procesams su reikšmėmis erdvėje $\mathbb{H}$ Merlevède, Peligrad ir Utev [16] parodė, jog be papildomų prielaidų operatoriams $\{a_j : j \geq 0\}$ ar ε_0 kovariacijos operatoriui sekos $\{S_n/\sqrt{n} : n \geq 1\}$ ir $\{S_n/\operatorname{E}\|S_n\|^2 : n \geq 1\}$ gali būti netirštos. Taigi 1 teorema neturi paprasto apibendrinimo tiesiniams procesams su reikšmėmis erdvėje $\mathbb{H}$. Tačiau jeigu (2) eilutė konverguoja, centrinė ribinė teorema tiesiniams procesams su reikšmėmis erdvėje $\mathbb{H}$ galioja su standartiniu normavimu $\sqrt{n}$ (žiūrėkite Merlevède, Peligrad ir Utev [16] bei Račkauskas ir Suquet [19]).

2 teorema. *Tarkime, kad* $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *yra tiesinis procesas su reikšmėmis erdvėje* $\mathbb{H}$, $\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\| < \infty$, $\operatorname{E}\varepsilon_0 = 0$ *ir* $\operatorname{E}\|\varepsilon_0\|^2 < \infty$. *Tada*

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, AC_{\varepsilon_0}A^*), \quad \textit{kai} \quad n \to \infty,$$

čia $\mathcal{N}$ *yra gausinis atsitiktinis elementas su reikšmėmis erdvėje* $\mathbb{H}$, C_{ε_0} *yra* ε_0 *kovariacijos operatorius*, $A = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *ir* A^* *yra operatoriaus* A *jungtinis operatorius.*

Funkcinė centrinė ribinė teorema

Apžvelkime funkcinę centrinę ribinę teoremą realiesiems tiesiniams procesams. Funkcinėje centrinėje ribinėje teoremoje nuo (2) eilutės konvergavimo priklauso ne tik normavimas, bet ir tai, ar ribinio proceso prieaugiai bus nepriklausomi. Tuo atveju, kai (2) eilutė konverguoja, atsitiktinės laužtės, normuotos $\sqrt{n}$, konverguoja pagal pasiskirstymą erdvėje $C[0,1]$ į Vynerio procesą, o šis procesas turi nepriklausomus prieaugiais (žiūrėkite Wang, Lin ir Gulati [22] bei Merlevède, Peligrad ir Utev [17]). Jeigu (2) eilutė diverguoja, dalinių sumų disepersija gali augti greičiau negu tiesiškai. Paprastas pavyzdys yra realusis tiesinis procesas su realiąja seka $\{a_j : j \geq 0\}$, apibrėžta (3) lygybe. Tada funkcinėje centrinėje ribinėje teoremoje pasikeičia ne tik normavimas, bet ir ribinis procesas: normuojama $c \cdot n^{3/2-\varphi}$, čia c yra teigiama konstanta, o ribinis procesas yra trupmeninis Brauno judesys su savipanašumo parametru $3/2 - \varphi$ (pirmasis tokį atvejį nagrinėjo Davydov [7], taip pat žiūrėkite Beran, Ghosh, Feng ir Kulik [1] bei Konstantopoulos ir Sakhanenko [12]). Trupmeninis Brauno judesys su savipanašumo parametru $1/2 < 3/2 - \varphi < 1$ turi priklausomus prieaugius.

Pereikime prie funkcinės centrinės ribinės teoremos tiesiniams procesams su reikšmėmis erdvėje $\mathbb{H}$. Jeigu (2) eilutė konverguoja, galioja panašus į 2 teoremą teiginys tiesiniams procesams su reikšmėmis erdvėje $\mathbb{H}$ (tokį atvejį nagrinėjo Račkauskas ir Suquet [19]). Apibrėžkime Vynerio procesą su reikšmėmis erdvėje $\mathbb{H}$. Tarkime, kad G yra nulinio vidurkio gausinis atsitiktinis elementas su reikšmėmis erdvėje $\mathbb{H}$ ir kovariacijos operatoriumi Q. Tada Vynerio procesas $W_Q = \{W_Q(t) : t \geq 0\}$ su reikšmėmis erdvėje $\mathbb{H}$ yra gausinis nulinio vidurkio atsitiktinis procesas su nepriklausomais prieaugiais ir $W_Q(s) - W_Q(t)$ skirstinys yra toks pat kaip ir $|s-t|^{1/2}G$ skirstinys su visais $s \geq 0$ ir $t \geq 0$.

3 teorema. *Tarkime, kad* $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *yra tiesinis procesas su reikšmėmis erdvėje* $\mathbb{H}$, $\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\| < \infty$, $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$ *ir* $\mathrm{E}\,\|\varepsilon_0\|^2 < \infty$. *Tada*

$$\frac{\zeta_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} W_{AC_{\varepsilon_0}A^*}$$

erdvėje $C([0,1];\mathbb{H})$, *kai* $n \to \infty$, *čia* $W_{AC_{\varepsilon_0}A^*}$ *yra Vynerio procesas su reikšmėmis erdvėje* $\mathbb{H}$, C_{ε_0} *yra* ε_0 *kovariacijos operatorius,* $A = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *ir* A^* *yra operatoriaus* A *jungtinis operatorius.*

Norint nagrinėti funkcinę centrinę ribinę teoremą tiesiniams procesams su reikšmėmis erdvėje $\mathbb{H}$, kai (2) eilutė diverguoja, reikia apibrėžti trupmeninį Brauno judesį su reikšmėmis erdvėje $\mathbb{H}$. Pirmieji trupmeninio Brauno judesio apibrėžimą apibendrino Duncan, Pasik-Duncan ir Maslowski [8]. Račkauskas ir Suquet [20] pasiūlė tokį trupmeninio Brauno judesio apibrėžimo apibendrinimą: pažymėkime I tapatingąjį operatorių ir tarkime, jog $H \in L(\mathbb{H})$ bei $Q \in L(\mathbb{H})$ yra neneigiami operatoriai, H yra savijungis operatorius, $1/2I < H < I$, Q yra pėdsako klasės operatorius ir operatorius H komutuoja su operatoriumi Q, tada operatorinis trupmeninis Q-Brauno judesys $B_{H,Q} = \{B_{H,Q}(t) : t \geq 0\}$ su operatoriniu savipanašumo parametru H yra gausinis nulinio vidurkio atsitiktinis procesas su reikšmėmis erdvėje $\mathbb{H}$ ir kovariacine funkcija apibrėžta lygybe

$$\mathrm{Cov}[B_{H,Q}(s), B_{H,Q}(t)] = 2^{-1}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H})Q$$

visiems $s \geq 0$ ir $t \geq 0$. Račkauskas ir Suquet [20] parodė, jog operatorinis trupmeninis Q-Brauno judesys egzistuoja ir turi versiją su beveik tikrai tolydžiomis trajektorijomis. Jie taip pat nagrinėja tiesinį procesą $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ su reikšmėmis erdvėje $\mathbb{H}$ ir operatoriais $\{a_j : j \geq 0\}$, apibrėžtais lygybėmis

$$a_0 = I, \qquad a_j = j^{-T} \qquad \text{kiekvienam} \qquad j \geq 1$$

su tokiu $T \in L(\mathbb{H})$, kad $1/2I < T < I$, $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$ ir $\mathrm{E}\,\|\varepsilon_0\|^2 < \infty$. Tarkime, jog Q yra ε_0 kovariacijos operatorius ir operatorius T komutuoja su operatoriumi Q. Račkauskas ir Suquet [20] parodė, jog tada (2) eilutė diverguoja ir normuotų laužčių seka konverguoja pagal pasiskirstymą į operatorinį trupmeninį Q-Brauno judesį su operatoriniu savipanašumo parametru $H = 3/2I - T$.

Didžiųjų skaičių dėsnis

Žinomų rezultatų apie didžiųjų skaičių dėsnį tiesiniams procesams yra mažiau nei apie centrinę ribinę teoremą ar funkcinę centrinę ribinę teoremą tiesiniams procesams. Phillips ir Solo [18] parodė, jog didžiųjų skaičių dėsnis tiesiniams procesams galioja esant stipresniems apribojimams negu (2) eilutės konvergavimas. Jie įrodė, jog realiesiems tiesiniams procesams galioja klasikinis stiprusis didžiųjų skaičių dėsnis, jeigu teisinga viena iš šių dviejų sąlygų:

(i) $\sum_{j=1}^{\infty} |ja_j|^2 < \infty$, $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$ ir $\mathrm{E}\,\varepsilon_0^2 < \infty$;

(ii) $\sum_{j=1}^{\infty} j|a_j| < \infty$, $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$ ir $\mathrm{E}\,|\varepsilon_0| < \infty$

Taigi sustiprinus prielaidą realiajai sekai $\{a_j : j \geq 0\}$ galima susilpninti momentų prielaidą atsitiktiniams dydžiams $\{\varepsilon_k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Louhichi ir Soulier [14] nagrinėja Marcinkiewicz-Zygmund stiprųjį didžiųjų skaičių dėsnį ilgosios atminties realiesiems tiesiniams procesams. Jie taria, jog $\{\varepsilon_k : k \in \mathbb{Z}\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę simetriški α-stabilūs atsitiktiniai dydžiai su $1 < \alpha < 2$ arba nekoreliuoti su baigtine dispesija (pastarasis atvejis paprastumo dėlei žymimas $\alpha = 2$). Tarkime, jog

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^{\alpha} < \infty.$$

Louhichi and Soulier [14] įrodė 4 teoremą.

4 teorema. *Tarkime, jog egzistuoja toks $s \in [1, \alpha)$, su kuriuo $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^s < \infty$. Tada su visais tokiais p, su kuriais $1/p > 1 - 1/s + 1/\alpha$,*

$$\frac{S_n}{n^{1/p}} \xrightarrow{a.s.} 0, \quad kai \quad n \to \infty,$$

čia ir toliau $\xrightarrow{a.s.}$ žymi konvergavimą beveik tikrai.

3 Tikslai ir uždaviniai

Disertacijos tikslas yra nagrinėti funkcinių tiesinių procesų ribinį elgesį, kai operatorių normų eilutė diverguoja, t.y.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\| = \infty.$$

Tokie funkciniai tiesiniai procesai yra įdomūs tuo, kad jų ribinis elgesys gali skirtis nuo nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių elementų ribinio elgesio. Jeigu operatorių normų eilutė diverguoja ir funkcinio tiesinio proceso ribinis elgesys skiriasi nuo nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių elementų ribinio elgesio, tada sakome, jog funkcinis tiesinis procesas turi ilgąją atmintį.

Tarkime, jog $(\mathbb{S}, \mathcal{S}, \mu)$ yra erdvė su σ-baigtiniu matu, $L_2(\mu) = L_2(\mathbb{S}, \mathcal{S}, \mu)$ yra μ-beveik visur lygių kvadratu integruojamų funkcijų ekvivalentumo klasių realioji Hilberto erdvė. Disertacijoje nagrinėjamas tiesinis procesas su reikšmėmis erdvėje $L_2(\mu)$ ir operatoriais $\{a_j : j \geq 0\}$, apibrėžtais lygybe

$$a_j = (j+1)^{-D} \tag{4}$$

visiems $j \geq 0$ su sandaugos operatoriumi $D : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$, kuris funkcijai $f \in L_2(\mu)$ priskiria funkciją $Df = \{d(s)f(s) : s \in \mathbb{S}\}$, o $d : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ yra mati funkcija. Operatoriai $\{(j+1)^{-D} : j \geq 0\}$ apibrėžiami lygybėmis $(j+1)^{-D} = \exp\{-D\log(j+1)\} = \sum_{k=0}^{\infty}(-D\log(j+1))^k/k!$ visiems $j \geq 0$.

Pagrindiniai disertacijos uždaviniai yra tokie:

1. Rasti pakankamas sąlygas centrinei ribinei teoremai funkciniam tiesiniam procesui $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ su reikšmėmis separabilioje Hilberto erdvėje $L_2(\mu)$, apibrėžtais (4) lygybe operatoriais $\{a_j : j \geq 0\}$ bei diverguojančia operatorių normų eilute.

2. Rasti pakankamas sąlygas funkcinei centrinei ribinei teoremai funkciniam tiesiniam procesui $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ su reikšmėmis separabilioje Hilberto erdvėje $L_2(\mu)$, apibrėžtais (4) lygybe operatoriais $\{a_j : j \geq 0\}$ bei diverguojančia operatorių normų eilute. Šis atvejis skiriasi nuo Račkauskas ir Suquet [20] nagrinėto atvejo tuo, kad operatorius D ir ε_0 kovariacijos operatorius nebūtinai komutuoja.

3. Rasti pakankamas sąlygas Marcinkiewicz-Zygmund tipo silpnajam ir stipriajam didžiųjų skaičių dėsniams abstraktiems tiesiniams procesams su reikšmėmis erdvėje $\mathbb{H}$,

kai operatorių normų eilutė konverguoja ir kai operatorių normų eilutė nebūtinai konverguoja.

4 Darbo mokslinis naujumas

Disertacijoje gauti rezultatai yra nauji ir išspausdinti dviejuose straipsniuose recenzuojamuose mokslo žurnaluose, pristatyti trijuose moksliniuose renginiuose bei keliuose Vilniaus universiteto moksliniuose seminaruose (straipsnių ir konferencijų sąrašas pateikiamas santraukos gale).

5 Tyrimų metodika

Įrodant centrinę ribinę teoremą ir funkcinę centrinę ribinę teoremą naudojama silpnojo konvergavimo teorija. Įrodant didžiųjų skaičių dėsnį naudojami rezultatai, palyginantys tam tikrų procesų ribinį elgesį su nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių elementų ribiniu elgesiu, taip pat naudojamas nupjovimas bei įvairios tikimybinės nelygybės.

6 Svarbiausi rezultatai

Pagrindiniai disertacijos rezultatai yra centrinė ribinė teorema ir funkcinė centrinė ribinė teorema konkrečiam tiesiniam procesui ir Marcinkiewicz-Zygmund tipo silpnasis bei stiprusis didžiųjų skaičių dėsniai abstraktiems tiesiniams procesams.

6.1 Centrinė ribinė teorema ir funkcinė centrinė ribinė teorema

Nagrinėjant centrinę ribinę teoremą ir funkcinę centrinę ribinę teoremą tiriamas tiesinis procesas $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ su reikšmėmis erdvėje $L_2(\mu)$ ir (4) lygybe apibrėžtais operatoriais $\{a_j : j \geq 0\}$. Tariama, jog $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$ ir $\mathrm{E}\,\|\varepsilon_0\|^2 < \infty$ arba $\mathrm{E}\,\|\varepsilon_0\|^p < \infty$ su $p > 2$.

Kadangi (4) lygybe apibrėžti operatoriai $\{a_j : j \geq 0\}$ yra sandaugos operatoriai, atvaizduojantys erdvę $L_2(\mu)$ į tą pačią erdvę $L_2(\mu)$, jų normai teisinga lygybė

$$\|(j+1)^{-D}\| = \inf\{c > 0 : \mu(s \in \mathbb{S} : |(j+1)^{-d(s)}| > c) = 0\} = (j+1)^{-\operatorname{ess\,inf} d}$$

(įrodymą pateikia Conway [6], žiūrėkite 1.5 teoremą 28 psl.).

6.1.1 Tiesinio proceso konstrukcija

Pirmiausiai randamos sąlygos, kurioms galiojant tiesinis procesas yra apibrėžtas korektiškai, t.y. (1) eilutė konverguoja beveik tikrai.

1 teiginys. *Tarkime, kad* $\{a_j : j \geq 0\}$ *yra apibrėžti* (4) *lygybe,* $\{\varepsilon_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai elementai su reikšmėmis erdvėje* $L_2(\mu)$*,* $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$ *bei* $\mathrm{E}\,\|\varepsilon_0\|^2 < \infty$*.* (1) *eilutė konverguoja kvadratinio vidurkio prasme tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia mati aibė* $\mathbb{S}_0 \subset \mathbb{S}$*, kurios* $\mu(\mathbb{S} \setminus \mathbb{S}_0) = 0$ *bei* $d(s) > 1/2$ *kiekvienam* $s \in \mathbb{S}_0$*, ir integralas*

$$\int_{\mathbb{S}} \frac{\sigma^2(v)}{2d(v) - 1} \mu(\mathrm{d}v)$$

yra baigtinis.

Kadangi $\{\varepsilon_k : k \in \mathbb{Z}\}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai elementai, iš Lévy-Itô-Nisio teoremos (Ledoux ir Talagrand [13], 6.1 teorema, 151 psl.) ir 1 teiginio gauname, jog (1) eilutė konverguoja ir beveik tikrai.

Į tiesinį procesą $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ taip pat galima žiūrėti kaip į atsitiktinių procesų seką su beveik tikrai kvadartu μ-integruojamomis trajektorijos. Tarkime, $\{\varepsilon_k\} = \{\varepsilon_k(s) : s \in \mathbb{S}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę matūs atsitiktiniai procesai apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, t.y. $\{\varepsilon_k : k \in \mathbb{Z}\}$ yra $\mathcal{F} \otimes \mathcal{S}$-mačios funkcijos $\varepsilon_k : \Omega \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}$. Tarkime, kad $\mathrm{E}\,\varepsilon_0(s) = 0$ ir $\mathrm{E}\,\varepsilon_0^2(s) < \infty$ kiekvienam $s \in \mathbb{S}$, pažymėkime

$$\sigma(r, s) = \mathrm{E}[\varepsilon_0(r)\varepsilon_0(s)], \quad \sigma^2(s) = \mathrm{E}\,\varepsilon_0^2(s), \quad r, \, s \in \mathbb{S}.$$

Tiesinis procesas $\{X_k\} = \{X_k(s) : s \in \mathbb{S}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ apibrėžiamas lygybe

$$X_k(s) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^{-d(s)} \varepsilon_{k-j}(s) \tag{5}$$

kiekvienam $s \in \mathbb{S}$ ir kiekvienam $k \in \mathbb{Z}$. Iš Kolmogorovo trijų eilučių teoremos gauname, jog $d(s) > 1/2$ yra būtina ir pakankama sąlygą (5) eilutei konverguoti beveik tikrai.

2 teiginyje suformuluotos būtinos ir pakankamos sąlygos tam, kad atsitiktinių procesų $\{X_k(s) : s \in \mathbb{S}\}$ trajektorijos būtų beveik tikrai kvadratu μ-integruojamos ir $\mathrm{E}\,\|X_k\|^2 < \infty$, čia $\|\cdot\|$ yra erdvės $L_2(\mu)$ norma.

2 teiginys. *Atsitiktinių procesų* $\{X_k(s) : s \in \mathbb{S}\}$ *trajektorijos yra beveik tikrai kvadratu* μ*-inegruojamos ir* $\mathrm{E}\,\|X_k\|^2 < \infty$ *tada ir tik tada, kai abu integralai*

$$\mathrm{E}\,\|\varepsilon_0\|^2 = \int_{\mathbb{S}} \sigma^2(v)\mu(\mathrm{d}v) \qquad \textit{ir} \qquad \int_{\mathbb{S}} \frac{\sigma^2(v)}{2d(v)-1}\mu(\mathrm{d}v) \tag{6}$$

yra baigtiniai.

Su kiekvienu $s \in \mathbb{S}$ atsitiktinių dydžių seka $\{X_k(s)\}$ yra iš esmės panaši į trupmeninį ARIMA$(0, 1-d(t), 0)$ procesą (žiūrėkite Brockwell ir Davis [3]). Panaudojus Stirlingo formulę trupmeninio ARIMA$(0, 1-d(t), 0)$ proceso koeficientams gaunamas sąryšis

$$\frac{\Gamma(j+1-d(t))}{\Gamma(j+1)\Gamma(1-d(t))} \sim \frac{j^{-d(t)}}{\Gamma(1-d(t))},$$

kai $j \to \infty$.

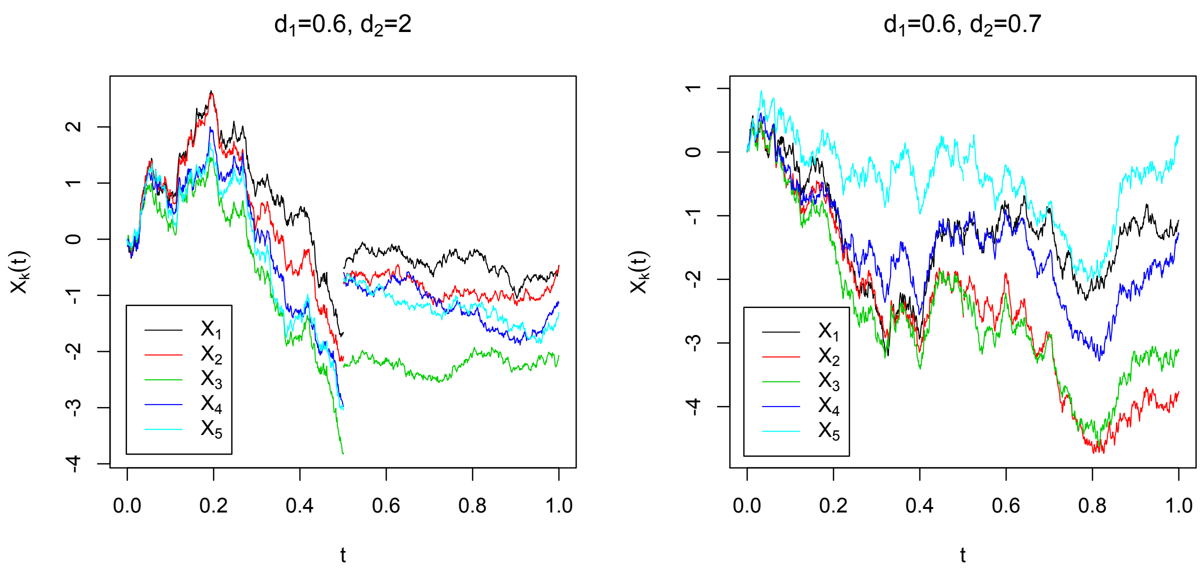
Dalinių sumų $\{\sum_{k=1}^n X_k(s)\}$ augimo greitis priklauso nuo $d(s)$ reikšmės. Žiūrėdami į aibę $\mathbb{S}$ kaip į erdvės indeksų aibę, o į aibę $\mathbb{Z}$ kaip į laiko indeksų aibę, turime funkcinį procesą $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ su erdvėje kintančia atmintimi. Taigi į tiesinį procesą $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ su (4) lygybe apibrėžtais operatoriais $\{a_j : j \geq 0\}$ taip pat galima žiūrėti kaip į atsitiktinių procesų seką su erdvėje kintančia atmintimi ir beveik tikrai kvadratu μ-integruojamomis trajektorijomis. Tokios atsitiktinių procesų sekos galėtų būti įdomus modelis funkcinėje duomenų analizėje (Ramsay ir Silverman [21] bei Horváth ir Kokoszka [10] pateikia įvadą į funkcinę duomenų analizę, Bosq [2] bei Mas ir Pumo [15] pateikia įvadą į funkcinių tiesinių procesų teoriją).

1 paveiksle pavaizduotos sugeneruotos atsitiktinių procesų $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ trajektorijos. Tariama, jog $\{\varepsilon_k\} = \{\varepsilon_k(t) : t \in [0,1]\}$ yra nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių ir indeksuotų uždaru intervalu $[0,1]$ standartinių Vynerio procesų seka, o funkcija $d : [0,1] \to (1/2, +\infty)$ yra laiptinė funkcija su $d(t) = d_1\chi_{[0,1/2)}(t) + d_2\chi_{[1/2,1]}(t)$ kiekvienam $t \in [0,1]$, čia χ_A yra aibės A indikatorinė funkcija. Sugeneruotos ir nubrėžtos trajektorijos 5 paeiliui einantiems sekos $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ nariams. Trajektorijos sugeneruotos dviems parametrų d_1 ir d_2 rinkiniams ($d_1 = 0.6, d_2 = 2$ ir $d_1 = 0.6, d_2 = 0.7$).

6.1.2 Ribinis kovariacijos elgesys

Pažymėkime

$$S_n(s) = \sum_{k=1}^n X_k(s)$$



1 pav.: Sugeneruotos atsitiktinių procesų $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ trajektorijos

bei

$$\zeta_n(s,t) = S_{\lfloor nt \rfloor}(s) + (nt - \lfloor nt \rfloor)X_{\lfloor nt \rfloor + 1}(s)$$

kiekvienam $n \geq 1$, $s \in \mathbb{S}$ ir $t \in [0,1]$. Taip pat pažymėkime

$$c(r,s) = \int_0^{\infty} x^{-d(r)}(x+1)^{-d(s)}\mathrm{d}x, \qquad c(s) = c(s,s) \tag{7}$$

ir

$$d(r,s) = d(r) + d(s) \tag{8}$$

kiekvienam $r, s \in \mathbb{S}$. Konstanta $c(r,s)$ yra baigtinė, jeigu $1/2 < d(r) < 1$ ir $d(s) > 1/2$.

3 teiginys. *Jei* $1/2 < d(s) < 1$ *ir* $1/2 < d(t) < 1$, *tada*

$$\mathrm{E}\big[S_n(r)S_n(s)\big] \sim \frac{[c(r,s) + c(s,r)]\sigma(r,s)}{[2 - d(r,s)][3 - d(r,s)]} \cdot n^{3-d(r,s)}, \quad \textit{kai} \quad n \to \infty. \tag{9}$$

$c(r,s)$ *yra apibrėžta* (7) *lygybe ir* $d(r,s)$ *yra apibrėžta* (8) *lygybe.*

Jei $d(r) = d(s) = 1$, *tai*

$$\mathrm{E}\big[S_n(r)S_n(s)\big] \sim \sigma(r,s) \cdot n \log^2 n, \quad \textit{kai} \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Iš 3 teiginio gaunamas dalinių sumų dispersijos ribinis elgesys: jei $1/2 < d(s) < 1$, tada

$$\mathrm{E}\, S_n^2(s) \sim \frac{c(s)\sigma^2(s)}{[1 - d(s)][3 - 2d(s)]} \cdot n^{3-2d(s)};$$

jei $d(s) = 1$, tada

$$\mathrm{E}\, S_n^2(s) \sim \sigma^2(s) \cdot n \ln^2 n.$$

Pažymėkime $\mathbb{T} = \mathbb{S} \times [0, \infty)$ ir apibrėžkime funkciją $V : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$

$$V((r,t),(s,u)) = \frac{\sigma(r,s)}{[2-d(r,s)][3-d(r,s)]}\big[c(s,r)t^{3-d(r,s)} + c(r,s)u^{3-d(r,s)} - C(r,s;t-u)|t-u|^{3-d(r,s)}\big], \quad (11)$$

čia $d(r,s)$ yra apibrėžtas (8) lygybe, $c(r,s)$ apibrėžtas (7) lygybe, o

$$C(r,s;t) = \begin{cases} c(r,s) & \text{if } t < 0; \\ c(s,r) & \text{if } t > 0. \end{cases}$$

4 teiginys. *Tarkime, kad arba* $1/2 < d(r) < 1$ *ir* $1/2 < d(s) < 1$, *arba* $d(r) = d(s) = 1$. *Abiem atvejais galioja ribinis sąryšis*

$$\mathrm{E}[\zeta_n(r,t)\zeta_n(s,u)] \sim \mathrm{E}[S_{\lfloor nt \rfloor}(r) S_{\lfloor nu \rfloor}(s)].$$

5 teiginys. *Jei* $1/2 < d(r) < 1$ *ir* $1/2 < d(s) < 1$, *tai*

$$\mathrm{E}[S_{\lfloor nt \rfloor}(r) S_{\lfloor nu \rfloor}(s)] \sim V((r,t),(s,u)) \cdot n^{3-d(r,s)}$$

visiems $(r,t),(s,u) \in \mathbb{S} \times [0,1]$, *čia funkcija* V *yra apibrėžta* (11) *lygybe.*

Jei $d(r) = d(s) = 1$, *tai*

$$\mathrm{E}[S_{\lfloor nt \rfloor}(r) S_{\lfloor nu \rfloor}(s)] \sim \sigma(r,s) \cdot \min(t,u) \cdot n \log^2 n.$$

6.1.3 Operatoriškai savipanašus procesas

Disertacijoje įrodoma, jog egzistuoja gausinis atsitiktinis procesas $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}(s,t) : (s,t) \in \mathbb{T}\}$ su nuliniu vidurkiu ir (11) lygybe apibrėžta kovariacijos funkcija V. Atsitiktinis procesas $\{\mathcal{X}(\cdot,t) : t \geq 0\}$ yra operatoriškai savipanašus procesas su reikšmėmis erdvėje $L_2(\mu)$.

Pirmiausiai parodoma, jog (11) lygybe apibrėžta funkcija V yra kovariacijos funkcija.

6 teiginys. (11) *lygybe apibrėžta funkcija* $V : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *su* $1/2 < d(s) < 1$ *kiekvienam* $s \in \mathbb{S}$ *yra indeksuoto aibe* $\mathbb{T}$ *atsitiktinio proceso kovariacijos funkcija.*

Iš 6 teiginio gaunama tokia išvada:

1 išvada. *Egzistuoja gausinis atsitiktinis procesas* $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}(s,t) : (s,t) \in \mathbb{T}\}$ *su nuliniu vidurkiu ir* (11) *lygybe apibrėžta kovariacijos funkcija* V.

Toliau nagrinėjamos atsitiktinio proceso $\mathcal{X}$ trajektorijos.

7 teiginys. *Jei* $1/2 < d(s) < 1$ *visiems* $s \in \mathbb{S}$ *bei integralai*

$$\int_{\mathbb{S}} \frac{\sigma^2(v)}{[1-d(v)]^2}\mu(\mathrm{d}v) \quad ir \quad \int_{\mathbb{S}} \frac{\sigma^2(v)}{[1-d(v)][2d(v)-1]}\mu(\mathrm{d}v)$$

yra baigtiniai, tai atsitiktinį procesą $\{\mathcal{X}(s,t) : s \in \mathbb{S}\}$ *su visais* $t \geq 0$ *atitinka gausinis atsitiktinis elementas su reikšmėmis erdvėje* $L_2(\mu)$*, kuris žymimas* $\mathcal{X}(\cdot,t)$. *Atsitiktinis procesas* $\{\mathcal{X}(\cdot,t) : t \geq 0\}$ *su reikšmėmis erdvėje* $L_2(\mu)$ *yra gausinis.*

Galiausiai parodoma, jog gausinis atsitiktinis procesas $\{\mathcal{X}(\cdot,t) : t \geq 0\}$ su reikšmėmis erdvėje $L_2(\mu)$ yra operatoriškai savipanašus.

8 teiginys. *Atsitiktinis procesas* $\{\mathcal{X}(\cdot,t) : t \geq 0\}$ *yra operatoriškai savipanašus, t.y. visiems* $a > 0$

$$\{\mathcal{X}(at) : t \geq 0\} \stackrel{fdd}{=} \{a^H \mathcal{X}(t) : t \geq 0\}$$

su sandaugos operatoriais $\{a^H : a > 0\}$*, atvaizduojančiais kiekvieną* $f \in L_2(\mu)$ *į* $a^H f = \{a^{3/2-d(s)} f(s) : s \in \mathbb{S}\}$*, čia* $\stackrel{fdd}{=}$ *žymi baigtiniamačių skirstinių lygybę.*

6.1.4 Centrinė ribinė teorema

Tiek centrinėje ribinėje teoremoje, tiek ir funkcinėje centrinėje ribinėje teoremoje naudojamas tas pats normavimas. Kai $1/2 < d(s) < 1$ visiems $s \in \mathbb{S}$, normuojama operatoriais

$$\{n^{-H}\} = \{n^{-H} : n \geq 1\},$$

čia $H : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ yra sandaugos operatorius, kuris funkcijai $f \in L_2(\mu)$ priskiria funkciją

$$Hf = \{[3/2 - d(s)]f(s) : s \in \mathbb{S}\}.$$

Pagrindiniai disertacijos rezultatai nagrinėjant centrinę ribinę teoremą yra 5 teorema ir 6 teorema. 7 teorema gaunama iš 2 teoremos, nes galiojant 7 teoremos sąlygoms (2) eilutė konverguoja.

5 teorema. *Tarkime, kad* $1/2 < d(s) < 1$ *visiems* $s \in \mathbb{S}$, $\mathrm{E}\,\varepsilon_0^2(s) < \infty$ *kiekvienam* $s \in \mathbb{S}$, *integralai*

$$\int_{\mathbb{S}} \frac{\sigma^2(v)}{[1-d(v)]^2}\mu(\mathrm{d}v) \quad ir \quad \int_{\mathbb{S}} \frac{\sigma^2(v)}{[1-d(v)][2d(v)-1]}\mu(\mathrm{d}v) \tag{12}$$

yra baigtiniai. Tada

$$n^{-H} S_n \xrightarrow{\mathcal{D}} G, \quad kai \quad n \to \infty,$$

čia $G = \{G(s) : s \in \mathbb{S}\}$ *yra nulinio vidurkio gausinis atsitiktinis procesas su autokovariacijos funkcija*

$$\mathrm{E}[G(r)G(s)] = \frac{[c(r,s) + c(s,r)]\sigma(r,s)}{[2 - d(r,s)][3 - d(r,s)]},$$

čia $c(r,s)$ *yra apibrėžtas* (7) *lygybe,* $d(r,s)$ *apibrėžtas* (8) *lygybe, o* $\sigma(r,s) = \mathrm{E}[\varepsilon_0(r)\varepsilon_0(s)]$ *kiekvienam* $r \in \mathbb{S}$ *ir* $s \in \mathbb{S}$.

6 teorema. *Tarkime, kad* $d(s) = 1$ *visiems* $s \in \mathbb{S}$, $\mathrm{E}\,\varepsilon_0^2(s) < \infty$ *visiems* $s \in \mathbb{S}$ *ir*

$$\int_{\mathbb{S}} \sigma^2(v)\mu(\mathrm{d}v) < \infty.$$

Tada

$$(\sqrt{n}\ln n)^{-1} S_n \xrightarrow{\mathcal{D}} G', \quad kai \quad n \to \infty,$$

čia $G' = \{G'(s) : s \in \mathbb{S}\}$ *yra nulinio vidurkio gausinis atsitiktinis procesas su autokovariacijos funkcija* $\mathrm{E}[G'(r)G'(s)] = \sigma(r,s)$, *o* $\sigma(r,s) = \mathrm{E}[\varepsilon_0(r)\varepsilon_0(s)]$ *kiekvienam* $r \in \mathbb{S}$ *ir* $s \in \mathbb{S}$.

7 teorema. *Tarkime, kad* $\operatorname{ess\,inf} d > 1$ *ir* $\mathrm{E}\,\varepsilon_0^2(s) < \infty$ *kiekvienam* $s \in \mathbb{S}$. *Tada*

$$(\sqrt{n})^{-1} S_n \xrightarrow{\mathcal{D}} G'',$$

čia $G'' = \{G''(s) : s \in \mathbb{S}\}$ *yra nulinio vidurkio gausinis atsitiktinis procesas.*

6.1.5 Funkcinė centrinė ribinė teorema

$\{\zeta_n : n \geq 1\}$ yra atsitiktiniai separabilios Banacho erdvės $C([0,1]; L_2(\mu))$ elementai. Šios erdvės elementai yra tolydžios funkcijos $f : [0,1] \to L_2(\mu)$ ir ši erdvė nagrinėjama su įprastine norma

$$\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} \Big[\int_{\mathbb{S}} f^2(v,t)\mu(\mathrm{d}v)\Big]^{1/2}, \quad f \in C([0,1]; L_2(\mu)).$$

Prieš suformuluojant pakankamas sąlygas funkcinei centrinei ribinei teoremai, apibrėžiami ribiniai procesai

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{G}(s,t) : (s,t) \in \mathbb{S} \times [0,1]\} \quad \text{ir} \quad \mathcal{G}' = \{\mathcal{G}'(s,t) : (s,t) \in \mathbb{S} \times [0,1]\}.$$

Atsitiktinis procesas $\mathcal{G}$ yra atsitiktinio proceso $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}(s,t) : (s,t) \in \mathbb{S} \times [0,\infty)\}$ siaurinys aibėje $\mathbb{S} \times [0,1]$. Atsitiktinis procesas $\mathcal{G}'$ yra gausinis su kovariacijos funkcija

$$\mathrm{E}[\mathcal{G}'(r,t)\mathcal{G}'(s,u)] = \sigma(r,s)\min(t,u),$$

$(r,t),(s,u) \in \mathbb{S} \times [0,1]$. Jeigu integralas $\int_{\mathbb{S}} \sigma^2(v)\mu(\mathrm{d}v)$ yra baigtinis, tai kiekvienam $t \in [0,1]$ atsitikinį procesą $\{\mathcal{G}'(s,t) : s \in \mathbb{S}\}$ atitinka atsitiktinis erdvės $L_2(\mu)$ elementas.

Kitame teiginyje suformuluotos pakankamos sąlygos atsitiktiniams procesams $\{\mathcal{G}(\cdot,t) : t \in [0,1]\}$ ir $\{\mathcal{G}'(\cdot,t) : t \in [0,1]\}$ su reikšmėmis erdvėje $L_2(\mu)$ turėti tolydžias versijas.

9 teiginys. *Jei integralai*

$$\int_{\mathbb{S}} \frac{\sigma^2(v)}{[1-d(v)]^2}\mu(\mathrm{d}v) \quad \textit{ir} \quad \int_{\mathbb{S}} \frac{\sigma^2(v)}{[1-d(v)][2d(v)-1]}\mu(\mathrm{d}v)$$

yra baigtiniai, tai atsitiktinis procesas $\{\mathcal{G}(\cdot,t) : t \in [0,1]\}$ *su reikšmėmis erdvėje* $L_2(\mu)$ *turi tolydžią versiją.*

Jeigu integralas

$$\int_{\mathbb{S}} \sigma^2(v)\mu(\mathrm{d}v)$$

yra baigtinis, tai atsitiktinis procesas $\{\mathcal{G}'(\cdot,t) : t \in [0,1]\}$ *su reikšmėmis erdvėje* $L_2(\mu)$ *turi tolydžią versiją.*

Imamos gausinių atsitiktinių procesų $\mathcal{G}$ ir $\mathcal{G}'$ tolydžios versijos ir šie procesai tuomet laikomi atsitiktiniais erdvės $C([0,1];L_2(\mu))$ elementais.

Disertacijos pagrindiniai rezultatai nagrinėjant funkcinę centrinę ribinę teoremą yra 8 teorema ir 9 teorema. 10 teorema gaunama iš 3, nes tuo atveju (2) eilutė konverguoja.

8 teorema. *Tarkime, kad* $1/2 < d(s) < 1$ *visiems* $s \in \mathbb{S}$, *integralai*

$$\mathrm{E}\Big[\int_{\mathbb{S}} \frac{\varepsilon_0^2(v)}{[1-d(v)]^2}\mu(\mathrm{d}v)\Big]^{p/2} \quad \textit{bei} \quad \int_{\mathbb{S}} \frac{\sigma^2(v)}{[1-d(v)][2d(v)-1]}\mu(\mathrm{d}v)$$

yra baigtiniai ir arba $p=2$ *bei* $\bar{d} = \operatorname{ess\,sup} d < 1$, *arba* $p > 2$. *Tada*

$$n^{-H}\zeta_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{G}$$

erdvėje $C([0,1];L_2(\mu))$, *kai* $n \to \infty$, *čia* $\{n^{-H}\}$ *yra sandaugos operatoriai, funkciją* $f \in L_2(\mu)$ *atvaizduojantys į* $n^{-H}f = \{n^{-[3/2-d(s)]}f(s) : s \in \mathbb{S}\}$.

Pastaba. Kai $1/2 < d(s) < 1$ visiems $s \in \mathbb{S}$ ir $p > 0$, teisinga nelygybė

$$\mathrm{E}\,\|\varepsilon_0\|^p < 2^{-p}\,\mathrm{E}\Big[\int_{\mathbb{S}} \frac{\varepsilon_0^2(v)}{[1-d(v)]^2}\mu(\mathrm{d}v)\Big]^{p/2},$$

nes $1-d(v) < 1/2$.

9 teorema. *Tarkime, kad* $d(s)=1$ *visiems* $s \in \mathbb{S}$ *ir* $\mathrm{E}\,\|\varepsilon_0\|^p < \infty$ *su* $p > 2$. *Tada*

$$(\sqrt{n}\log n)^{-1}\zeta_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{G}'$$

erdvėje $C([0,1];L_2(\mu))$, *kai* $n \to \infty$.

10 teorema. *Tarkime, kad* $\underline{d} = \operatorname{ess\,inf} d > 1$ *ir* $\mathrm{E}\,\|\varepsilon_0\|^2 < \infty$. *Tada*

$$(\sqrt{n})^{-1}\zeta_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{G}'$$

erdvėje $C([0,1]; L_2(\mu))$, *kai* $n \to \infty$.

6.2 Didžiųjų skaičių dėsnis

Disertacijoje nagrinėjamas Marcinkiewicz-Zygmund didžiųjų skaičių dėsnis abstraktiems tiesiniams procesams su reikšmėmis separabilioje Hilberto erdvėje $\mathbb{H}$.

Apibrėžkime normuojančią seką $\{b_n(p)\} = \{b_n(p) : n \geq 1\}$ su $p \geq 1$. Pažymėkime

$$\tilde{a}_j = \begin{cases} a_j, & \text{jei } j \geq 0, \\ 0, & \text{jei } j < 0. \end{cases}$$

kiekvienam $j \in \mathbb{Z}$. Kiekvienam $n \geq 1$ teisingos šios lygybės

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=-\infty}^{k} a_{k-j}\varepsilon_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=-\infty}^{n} \tilde{a}_{k-j}\varepsilon_j = \sum_{j=-\infty}^{n} w_{nj}\varepsilon_j,$$

čia

$$w_{nj} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{k-j} \tag{13}$$

kiekvienam $n \geq 1$ ir $j \in \mathbb{Z}$. (13) suma turi daugiausiai $\min\{n - j + 1, n\}$ nenulinių elementų kiekvienam $j \leq n$.

Pažymėkime

$$b_n(p) = \left(\sum_{j=-\infty}^{n} \|w_{nj}\|^p \right)^{1/p} \tag{14}$$

kiekvienam $n \geq 1$ ir $p > 0$. Eilutė (14) išraiškoje konverguoja kiekvienam $n \geq 1$ ir kiekvienam $p \geq 1$, jeigu $\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\|^p < \infty$.

Pagrindinai disertacijos rezultatai nagrinėjant didžiųjų skaičių dėsnį yra žemiau pateiktos keturios teoremos. Pradėkime nuo to atvejo, kai eilutė $\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\|$ konverguoja.

11 teorema. *Tarkime, kad* $1 < p < 2$, $\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\| < \infty$, $x^p \Pr\{\|\varepsilon_0\| > x\} \to 0$, *kai* $x \to \infty$, *ir* $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$. *Tada*

$$\frac{S_n}{n^{1/p}} \xrightarrow{\Pr} 0, \quad \textit{kai} \quad n \to \infty,$$

čia ir toliau $\xrightarrow{\Pr}$ *žymi konvergavimą pagal tikimybę.*

12 teorema. *Tarkime, kad* $1 < p < 2$, $\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\| < \infty$, $\mathrm{E}\,\|\varepsilon_0\|^p < \infty$ *ir* $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$. *Tada*

$$\frac{S_n}{n^{1/p}} \xrightarrow{a.s.} 0, \quad kai \quad n \to \infty.$$

Tuo atveju, kai eilutė $\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\|$ nebūtinai konverguoja, naudojamas abstraktus normavimas $b_n(p)$.

13 teorema. *Tarkime, kad* $1 < p < 2$, $\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\|^p < \infty$, $x^p \operatorname{Pr}\{\|\varepsilon_0\| > x\} \to 0$, *kai* $x \to \infty$, *ir* $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$. *Jei*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sup_{j\le n} \|w_{nj}\|}{b_n(p)} = 0,$$

tada

$$\frac{S_n}{b_n(p)} \xrightarrow{\mathrm{Pr}} 0, \quad kai \quad n \to \infty.$$

Kadangi $\sup_{j\le n} \|w_{nj}\| \le b_n(q)$ kiekvienam $q \ge 1$, turime tokią 13 teoremos išvadą.

2 išvada. *Tarkime, kad* $1 < p < 2$, $\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\|^p < \infty$, $x^p \operatorname{Pr}\{\|\varepsilon_0\| > x\} \to 0$, *kai* $x \to \infty$, *ir* $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$. *Jeigu*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n(q)}{b_n(p)} = 0$$

kokiam nors $q > p$, *tada*

$$\frac{S_n}{b_n(p)} \xrightarrow{\mathrm{Pr}} 0, \quad kai \quad n \to \infty.$$

14 teorema. *Tarkime, kad* $1 \le p < 2$, $\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\|^p < \infty$, $\mathrm{E}[\|\varepsilon_0\|^p \log(1 + \|\varepsilon_0\|)] < \infty$ *ir* $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$. *Jeigu*

$$\frac{b_n(q)}{b_n(p)} = O(n^{1/q-1/p}),$$

kai $n \to \infty$ *kokiam nors* $p < q \le 2$, *tada*

$$\frac{S_n}{b_n(p)} \xrightarrow{a.s.} 0, \quad kai \quad n \to \infty.$$

6.2.1 Pavyzdžiai

Disertacijoje pateikiamos dvi konkrečios normuojančios sekos $\{b_n(p)\}$ išraiškos, kai (2) eilutė diverguoja.

10 teiginys. *Tarkime, kad* $p > 1$, $1/p < \varphi < 1$, $\mathbb{H} = \mathbb{R}$ *ir* $a_j = (j+1)^{-\varphi}$ *visiems* $j \ge 0$. *Tada*

$$b_n(p) \sim c \cdot n^{1/p+1-\varphi},$$

kai $n \to \infty$, *čia* c *yra teigiama konstanta.*

Palyginkime disertacijoje gautus rezultatus su Louhichi ir Soulier [14] gautu rezultatu (4 teorema). Tarkime, kad $1 \leq s < \alpha < 2$, $a_j = (j+1)^{-\varphi}$ visiems $j \geq 0$ su kokiu nors $1/s < \varphi < 1$, $\mathrm{E}\,\varepsilon_0 = 0$ ir $\mathrm{E}[|\varepsilon_0|^p \log(1+|\varepsilon_0|)] < \infty$ visiems $s \leq p < \alpha$. Tada iš disertacijoje gautų rezultatų (13 teoremos ir 10 teiginio) gauname tai, jog

$$\frac{S_n}{n^{1/p+1-1/s}} \xrightarrow{a.s.} 0, \quad \text{kai} \quad n \to \infty,$$

visiems $p \leq \alpha$, nes $1/s < \varphi$. Mūsų rezultato privalumas yra tas, kad nereikia tarti, jog $\{\varepsilon_k : k \in \mathbb{Z}\}$ yra simetriški α-stabilūs atsitiktiniai dydžiai. Louhichi ir Soulier [14] rezultato privalumas yra tas, kad nereikia tarti, jog $a_j = (j+1)^{-\varphi}$ visiems $j \geq 0$, pakanka tik tarti, kad $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^s < \infty$ su kokiu nors $1 \leq s < \alpha$.

Kitame teiginyje įrodytas normuojančios sekos $\{b_n(p)\}$ ribinis elgesys, kai operatoriai $\{a_j : j \geq 0\}$ yra apibrėžti (4) lygybe.

11 teiginys. *Tarkime, kad $\mathbb{H} = L_2(\mu)$ ir $\{a_j : j \geq 0\}$ apibrėžti*

$$a_j = (j+1)^{-D}$$

visiems $j \geq 0$, čia D yra toks sandaugos operatorius, kuris $Df = \{d(s)f(ts) : s \in \mathbb{S}\}$ visoms $f \in L_2(\mu)$ su mačia funkcija $d : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$. Pažymėkime $\underline{d} = \operatorname{ess\,inf}_{s \in \mathbb{S}} d(s)$. Jeigu $1/p < \underline{d} < 1$, tai

$$b_n(p) \sim c \cdot n^{1/p+1-\underline{d}},$$

kai $n \to \infty$, čia c yra teigiama konstanta.

7 Išvados

Sukonstruotas funkcinio tiesinio proceso su reikšmėmis erdvėje $L_2(\mu)$ ir (4) lygybe apibrėžtais operatoriais $\{a_j : j \geq 0\}$ pavyzdys rodo, kad toks procesas gali būti natūralus modelis funkcinėje duomenų analizėje, kai nagrinėjama erdvėje kintanti atmintis.

Nagrinėjant centrinę ribinę teoremą, kai operatorių $\{a_j : j \geq 0\}$ normų eilutė diverguoja, esminė išvada yra ta, kad tokiu atveju gali reikėti visiškai kitokio normavimo. Gali būti normuojama nebe realiųjų skaičių seka, o tam tikrų sandaugos operatorių seka, priklausančia nuo konkrečios operatorių $\{a_j : j \geq 0\}$ išraiškos, o ne tik nuo operatorių $\{a_j : j \geq 0\}$ normų eilutės konvergavimo ar divergavimo.

Įrodyta funkcinė centrinė ribinė teorema rodo, jog Račkausko ir Suquet [20] prielaida apie ε_0 kovariacijos operatoriaus ir operatoriaus T komutavimą yra esminė – funkcinėje centrinėje ribinėje teoremoje gautas ribinis gausinis procesas turi kitokią kovariacijos struktūrą nei operatorinis trupmeninis Q-Brauno judesys. Funkcinėje centrinėje ribinėje teoremoje taip pat naudojamas operatorinis normavimas kaip ir centrinėje ribinėje teoremoje, o ribinis procesas generuoja operatoriškai savipanašų procesų.

Nagrinėjant Marcinkiewicz-Zygmund tipo didžiųjų skaičių dėsnį, kai operatorių $\{a_j : j \geq 0\}$ normų eilutė nebūtinai konverguoja, gauti rezultatai yra iš esmės panašūs į Ibragimov ir Linnik [11] rezultatą (žiūrėkite 1 teoremą) centrinės ribinės teoremos atveju: rastos pakankamos sąlygos Marcinkiewicz-Zygmund tipo tiek silpnajam, tiek stipriajam didžiųjų skaičių dėsniui su $1 < p < 2$ ir abstrakčiu normavimu, kuris tinka nepriklausomai nuo to, ar $\{a_j : j \geq 0\}$ normų eilutė konverguoja.

Kai $\{a_j : j \geq 0\}$ normų eilutė diverguoja, parodoma, jog normuojama ne tokia pačia seka kaip nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių elementų atveju. Tačiau tuo atveju, kai $\{a_j : j \geq 0\}$ normų eilutė konverguoja, gauti rezultatai rodo, kad kaip ir centrinės ribinės teoremos bei funkcinės centrinės ribinės teoremos atveju operatorių $\{a_j : j \geq 0\}$ normų eilutės konvergavimas yra pakankama sąlyga gauti tokį pat ribinį elgesį kaip nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių elementų. Taigi ir didžiųjų skaičių dėsnis rodo tai, jog kai $\{a_j : j \geq 0\}$ normų eilutė konverguoja, tiesinio proceso ribinis elgesys yra toks pat kaip nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių elementų. Disertacijoje nėra daroma prielaida apie konkretų $\{\varepsilon_k : k \in \mathbb{Z}\}$ skirstinį, todėl šia prasme disertacijos rezultatai apibendrina Louhichi ir Soulier [14] rezultatą.

Literatūra

[1] Jan Beran, Sucharita Ghosh, Yuanhua Feng, and Rafal Kulik. *Long-Memory Processes: Probabilistic Properties and Statistical Methods.* Springer, 2013. ISBN 3642355127.

[2] Denis Bosq. *Linear Processes in Function Spaces: Theory and Applications*, volume 149 of *Lecture Notes in Statistics.* Springer, 2000.

[3] Peter J. Brockwell and Richard A. Davis. *Time Series: Theory and Methods.* Springer Series in Statistics. Springer, second edition, 1991. ISBN 1441903194.

[4] Vaidotas Characiejus and Alfredas Račkauskas. The central limit theorem for a sequence of random processes with space-varying long memory. *Lithuanian Mathematical Journal*, 53(2):149–160, April 2013.

[5] Vaidotas Characiejus and Alfredas Račkauskas. Operator self-similar processes and functional central limit theorems. *Stochastic Processes and their Applications*, 124(8): 2605–2627, August 2014.

[6] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, second edition, 1990. ISBN 0387972455.

[7] Yu. A. Davydov. The invariance principle for stationary processes. *Theory of Probability & Its Applications*, 15(3):487–498, 1970.

[8] T. E. Duncan, B. Pasik-Duncan, and B. Maslowski. Fractional Brownian motion and stochastic equations in Hilbert spaces. *Stochastics and Dynamics*, 2(2):225–250, June 2002.

[9] Liudas Giraitis, Hira L. Koul, and Donatas Surgailis. *Large Sample Inference for Long Memory Processes.* Imperial College Press, 2012. ISBN 1848162782.

[10] Lajos Horváth and Piotr Kokoszka. *Inference for Functional Data with Applications.* Springer Series in Statistics. Springer, 2012. ISBN 1461436546.

[11] I. A. Ibragimov and Yu. V. Linnik. *Independent and stationary sequences of random variables.* Series of Monographs and Textbooks on Pure and Applied Mathematics. Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971. ISBN 9001418856.

[12] Takis Konstantopoulos and Alexander Sakhanenko. Convergence and convergence rate to fractional Brownian motion for weighted random sums. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 1:47–63, October 2004.

[13] Michel Ledoux and Michel Talagrand. *Probability in Banach Spaces*. Springer, 1991. ISBN 3540520139.

[14] Sana Louhichi and Philippe Soulier. Marcinkiewicz-Zygmund strong laws for infinite variance time series. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 3(1-2):31–40, 2000.

[15] André Mas and Besnik Pumo. Linear processes for functional data. arXiv: 0901.2503v1 [math.ST], January 2009.

[16] Florance Merlevède, Magda Peligrad, and Sergey Utev. Sharp conditions for the CLT of linear processes in a Hilbert space. *Journal of Theoretical Probability*, 10(3):681–693, July 1997.

[17] Florance Merlevède, Magda Peligrad, and Sergey Utev. Recent advances in invariance principles for stationary sequences. *Probability Surveys*, 3:1–36, 2006.

[18] Peter C. B. Phillips and Victor Solo. Asymptotics for linear processes. *The Annals of Statistics*, 20(2):971–1001, June 1992.

[19] Alfredas Račkauskas and Charles Suquet. On limit theorems for Banach-space-valued linear processes. *Lithuanian Mathematical Journal*, 50(1):71–87, January 2010.

[20] Alfredas Račkauskas and Charles Suquet. Operator fractional Brownian motion as limit of polygonal line processes in Hilbert space. *Stochastics and Dynamics*, 11(1): 49–70, March 2011.

[21] J.O. Ramsay and B.W. Silverman. *Functional Data Analysis*. Springer Series in Statistics. Springer, second edition, 2005. ISBN 1441923004.

[22] Qiying Wang, Yan-Xia Lin, and Chandra M. Gulati. The invariance principle for linear processes with applications. *Econometric Theory*, 18(1):119–139, February 2002.

Straipsniai ir pranešimai konferencijose

Straipsniai

1. Vaidotas Characiejus and Alfredas Račkauskas. The central limit theorem for a sequence of random processes with space-varying long memory. *Lithuanian Mathematical Journal*, 53(2):149–160, April 2013.

2. Vaidotas Characiejus and Alfredas Račkauskas. Operator self-similar processes and functional central limit theorems. *Stochastic Processes and their Applications*, 124(8): 2605–2627, August 2014.

3. Vaidotas Characiejus and Alfredas Račkauskas. Law of large numbers for linear processes. *Preprint*.

Pranešimai konferencijose

1. 3-ioji tarptautinė jaunųjų matematikų konferencija *Young Researchers in Mathematics* vykusi 2012 m. balandžio mėn 2–4 d. Jungtinėje Karalystėje, Bristolyje (pranešimo tema: *Limit theorems for a functional linear process with long memory*).

2. 54-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija, vykusi 2013 m. birželio mėn. 19–20 d. Vilniuje (pranešimo tema: *Ribinės teoremos atsitiktiniams procesams su erdvėje kintančia ilga atmintimi*).

3. 11-oji tarptautinė tikimybių teorijos ir matematinės statistikos konferencija, vykusi 2014 m. birželio mėn. 30 d. – liepos mėn. 4 d. Vilniuje (pranešimo tema: *Limit theorems for functional linear processes with long memory*).

Duomenys apie disertantą

Išsilavinimas

- 2010 – 2014 m. Matematikos doktorantūra, Vilniaus universitetas;
- 2008 – 2010 m. Ekonometrijos magistrantūra, Vilniaus universitetas;
- 2004 – 2008 m. Ekonomikos bakalauras, Vilniaus universitetas.

Darbo patirtis

- 2012 m. kovo mėn. – 2014 m. gruodžio mėn. jaunesnysis mokslo darbuotojas (Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos instituto Atsitiktinių procesų skyrius);
- 2010 m. vasario mėn. – 2010 m. rugsėjo mėn. laborantas (Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Ekonometrinės analizės katedra).

Summary

Suppose that $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ is a linear process with values in a separable Hilbert space $\mathbb{H}$, i.e. $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ is a sequence of $\mathbb{H}$-valued random elements such that

$$X_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\varepsilon_{k-j})$$

for each $k \in \mathbb{Z}$, where $\{a_j : j \geq 0\} \subset L(\mathbb{H})$ are bounded linear operators from $\mathbb{H}$ to $\mathbb{H}$ and $\{\varepsilon_k : k \in \mathbb{Z}\}$ are independent and identically distributed $\mathbb{H}$-valued random elements.

The asymptotic behaviour of the linear process depends on the convergence of the series

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\|, \tag{*}$$

where $\|\cdot\|$ is the operator norm. If series (*) converges, then the asymptotic behaviour of linear process is essentially the same as that of independent and identically distributed random elements. However, if series (*) fails to converge, the asymptotic behaviour of the linear process might be different than that of independent and identically distributed random elements. We investigate the asymptotic behaviour of linear processes when series (*) diverges.

Let $L_2(\mu) = L_2(\mathbb{S}, \mathcal{S}, \mu)$ be the real separable Hilbert space of equivalence classes of μ-almost everywhere equal square-integrable functions, where $(\mathbb{S}, \mathcal{S}, \mu)$ is a σ-finite measure space. We investigate a linear process with values in the space $L_2(\mu)$ and the operators $\{a_j : j \geq 0\}$ given by

$$a_j = (j+1)^{-D} \tag{\#}$$

for each $j \geq 0$, where $D : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ is a multiplication operator defined by $Df = \{d(s)f(s) : s \in \mathbb{S}\}$ for each $f \in L_2(\mu)$ with a measurable function $d : \mathbb{S} \to (1/2, 1)$.

We establish sufficient conditions for the central limit theorem for the linear process with values in $L_2(\mu)$ and the operators $\{a_j : j \geq 0\}$ given by (#). The most interesting feature of this central limit theorem is that the normalizing sequence is a sequence of operators.

We also establish sufficient conditions for the functional central limit theorem for the linear process with values in $L_2(\mu)$ and the operators $\{a_j : j \geq 0\}$ given by (#). Under certain conditions, the random polygonal functions normalized by a sequence of operators converge

in distribution in the space $C([0,1]; L_2(\mu))$ to a Gaussian random element with zero mean. This limit Gaussian process generates an operator-self similar process.

We establish that if series (*) converges, then the Marcinkiewicz-Zygmund type weak and strong laws of large numbers with $1 < p < 2$ for a linear process hold with the same normalizing sequence as in the case of independent and identically distributed random elements.

If series (*) does not necessarily converge, we use an abstract normalizing sequence $\{b_n(p) : n \geq 1\}$ defined by

$$b_n(p) = \left(\sum_{j=-\infty}^{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{k-j} \right\|^p \right)^{1/p}$$

for each $n \geq 1$ and $1 < p < 2$, were $\| \cdot \|$ is the operator norm, $\tilde{a}_j = a_j$ if $j \geq 0$ and 0 otherwise. Under certain additional assumptions, we show that if the series $\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\|^p$ converges, then the Marcinkiewicz-Zygmund type weak and strong laws of large numbers with $1 < p < 2$ for a linear process hold with the normalizing sequence $\{b_n(p)\}$.