VILNIAUS UNIVERSITETAS

ERIKAS KARIKOVAS

HURVICO DZETA FUNKCIJŲ SAVIAPROKSIMACIJA

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2015

Disertacija rengta 2010-2014 m. Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas – prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Konsultantas – prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje.

Pirmininkas

- Prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Nariai:

- Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Prof. habil. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Prof. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Doc. dr. Takashi Nakamura (Tokijo mokslų universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2015 m. balandžio 30 d. 15 val. VU Matematikos ir informatikos fakultete.
Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.
Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2015 m. kovo 27 d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius .

VILNIUS UNIVERSITY

ERIKAS KARIKOVAS

SELF-APPROXIMATION OF HURWITZ ZETA-FUNCTIONS

Summary of doctoral dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2015

The scientific work was carried out in 2010-2014 at Vilnius University.

Scientific supervisor - prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Scientific adviser - prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The thesis is defended in the council of Mathematics of Vilnius University.

Chairman

- Prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Members:

- Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Prof. habil. dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Prof. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Junior Associate Prof. dr. Takashi Nakamura (Tokyo University of Science, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on April 30, 2015 at 3pm at Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics.
Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.
The summary of the dissertation was distributed on 27 March, 2015.
The dissertation is available at Vilnius University's library and at VU website: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius .

Disertacinio darbo aprašymas

1. Tyrimo objektai

Tegu $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o ω – realusis skaičius iš intervalo (0,1]. Kai $\sigma > 1$, tai Hurvico (Hurwitz) dzeta funkcija apibrėžiama lygybe

$$\zeta(s, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\omega)^s}.$$

Tegu $\mathfrak{A} = \{c_m : m \in \mathbb{N}_0\}, \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka, kurios mažiausias teigiamas periodas $k \in \mathbb{N}$. Kai $\sigma > 1$, tai periodinė Hurvico dzeta funkcija apibrėžiama eilute

$$\zeta(s, \omega; \mathfrak{A}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{(m+\omega)^s}.$$

Šios disertacijos pagrindiniai objektai yra Hurvico dzeta funkcijų ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų saviaproksimacijos.

2. Darbo struktūra ir apimtis

Disertacija parašyta anglų kalba. Ją sudaro penki skyriai, pabaigoje pateikiamos išvados, santrauka ir literatūros sąrašas. Įvade supažindinama su tyrimo objektais, pristatomi nagrinėjami uždaviniai ir gauti rezultatai. Antrajame skyriuje aptariami senesni rezultatai, susiję su disertacijoje nagrinėjamais uždaviniais, pateikiama svarbiausia teorija apie pagrindinius šio darbo objektus. Kituose skyriuose formuluojami gauti moksliniai rezultatai, pateikiami svarbiausi teiginiai ir išsamūs jų matematiniai įrodymai. Disertacijos apimtis yra 70 puslapių.

3. Trumpa mokslinės problemos istorija

Kai $\sigma > 1$, Rymano (Riemann) dzeta funkcija apibrėžiama taip:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

čia p yra pirminis skaičius. Šią funkciją galima analiziškai pratęsti į visą kompleksinių skaičių plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$. Rymano dzeta funkcija yra vienas svarbiausių ir įdomiausių objektų skaičių teorijoje. Vis dar neįrodyta Rymano hipotezė teigia, kad funkcija $\zeta(s)$ neturi nulių srityje $\sigma > \frac{1}{2}$.

1975 m. S. M. Voroninas (Voronin) [55] įrodė *universalumo teoremą* Rymano dzeta funkcijai. Teoremoje teigiama, kad kritinėje juostoje $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ bet kuri analizinė, neturinti nulių funkcija gali būti aproksimuojama $\zeta(s + i\tau)$ poslinkiais.

2.1.1 teorema (Voroninas, [55])**.** *Tegu* $0 < r < \frac{1}{4}$. *Tarkime, kad* $f(s)$ *yra tolydi, neturinti nulių skritulyje* $|s| \leq r$ *funkcija, kuri yra analizinė skritulio* $|s| \leq r$ *viduje. Tada kiekvienam* $\varepsilon > 0$ *egzistuoja toks skaičius* $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, *su kuriuo*

$$\max_{s \leq r} \left| \zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Tegu $\mathrm{meas}\{A\}$ žymi aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego (Lebesgue) matą. Primename, kad Lebego prasme išmatuojamos aibės $A \subset (0, \infty)$ apatinis tankis apibrėžiamas

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas}(A \cap (0, T]).$$

Be to, jei ši riba yra teigiama, sakysime, kad aibė A turi teigiamą apatinį tankį.

Vėliau buvo įrodyta stipresnė Voronino *universalumo teoremos* versija.

2.1.2 teorema (Voronino universalumo teorema [29])**.** *Tegu* $\mathcal{K}$ *yra kompaktinis kritinės juostos* $\mathcal{D}$ *poaibis, turintis jungųjį papildinį, o* $f(s)$ *yra tolydi, neturinti nulių aibėje* $\mathcal{K}$ *funkcija, kuri yra analizinė aibės* $\mathcal{K}$ *viduje. Tada kiekvienam* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0, T] : \max_{s \in \mathcal{K}} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Ši teorema parodo, kad aibė, sudaryta iš Rymano dzeta funkcijos poslinkių, kurie aproksimuoja analizinę funkciją $f(s)$, yra pakankamai gausi: turi teigiamą apatinį tankį.

Vėliau buvo nagrinėjami panašūs rezultatai ir kitoms funkcijoms.

Kai $\sigma > 1$, tai Dirichlė (Dirichlet) L funkcija yra apibrėžiama lygybe

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Ši funkcija yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. Kai $q = 1$, tai $L(s,\chi) = \zeta(s)$.

S. M. Voroninas taip pat gavo apibendrinantį *universalumo teoremos* rezultatą. Jis įrodė *jungtinio universalumo* teoremą Dirichlė L funkcijoms.

2.1.3 teorema (Voronino jungtinio universalumo teorema [52])**.** *Tegu χ_1 mod q_1,...,χ_m mod q_m yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai, $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_m$ yra juostos $1/2 < \sigma < 1$ kompaktiniai poaibiai, turintys jungiuosius papildinius. Tegu $f_l(s)$ yra tolydžios, neturinčios nulių aibėje $\mathcal{K}_l$ ir analizinės aibės $\mathcal{K}_l$ viduje funkcijos (čia $1 \le l \le m$). Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ galioja*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0,T] : \max_{1\le l\le m} \max_{s\in\mathcal{K}_l} \left| L\left(s + i\tau, \chi_l\right) - f_l\left(s\right) \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Teoremoje teigiama, kad Dirichlė L funkcijų su neekvivalenčiais charakteriais rinkinys tolygiai aproksimuoja neturinčias nulių analizines funkcijas; šiek tiek skirtingomis formomis šie rezultatai buvo paskelbti tiek Goneko (Gonek) [16], tiek ir Bagči (Bagchi) [2] darbuose.

Dabar pateikiame apibendrintąją Rymano hipotezę.

Apibendrintoji Rymano hipotezė. *Visi funkcijos $L(s,\chi)$ nuliai, kai $0 < \sigma < 1$, yra kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$.*

1982 m. B. Bagči [3] atrado įdomų ekvivalentą Rymano hipotezei. Jis įrodė, kad apibendrintoji Rymano hipotezė $L(s,\chi)$ funkcijoms (čia χ yra bet kuris Dirichlė charakteris) galioja tada ir tik tada, kai su kiekvienu kompaktiniu kritinės juostos $1/2 < \sigma < 1$ poaibiu $\mathcal{K}$ ir kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas} \left\{ \tau \in [0,T] : \max_{s\in\mathcal{K}} |L(s+i\tau,\chi) - L(s,\chi)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Dar vėliau, T. Nakamura [40] išnagrinėjo jungtinį universalumą Dirichlė L funkcijų poslinkiams. Toliau pateiktas rezultatas yra Bagči kriterijaus apibendrinimas, dar vadinamas saviaproksimacija. Tarkime, kad $1 = d_1, d_2, \ldots, d_m$ yra realieji algebriniai skaičiai, tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, ir χ yra bet kuris Dirichlė charakteris. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$ galioja

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \text{meas} \Big\{ \tau \in [0,T] : \tag{1}$$

$$\max_{1\le j,k\le m} \max_{s\in\mathcal{K}} |L(s+id_j\tau,\chi) - L(s+id_k\tau,\chi)| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Kai $m = 2$, L. Pankovskis (Pańkowski) [43] įrodė, kad (1) nelygybė galioja su visais realiaisiais skaičiais d_1, d_2, kurie yra tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Nepriklausomai vienas nuo kito Garunkštis [12] ir Nakamura [41] nagrinėjo atvejį, kai $d_1/d_2 \in \mathbb{Q}$. Dar vienas gerai žinomas rezultatas Rymano dzeta funkcijai buvo gautas Nakamuros ir Pankovskio [42]. Jie nagrinėjo atvejį, kai $d_1 = 1$ ir $d_2 = a/b \in \mathbb{Q}$ tenkina sąlygas $\gcd(a,b) = 1$, $|a-b| \neq 1$. Taip pat verta paminėti, kad bendrasis atvejis, kai $d_1 = 1$ ir d_2 yra nelygus nuliui racionalusis skaičius, vis dar neišnagrinėtas.

Pateikiame keletą svarbiausių įrodytų rezultatų, parodančių Hurvico dzeta funkcijų universalumą.

2.4.1 teorema (Hurvico dzeta funkcijų universalumas)**.** *Tegu ω yra trancendentusis arba racionalusis skaičius, nelygus $1, \frac{1}{2}$. Tegu $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ yra kompaktinis poaibis, turintis jungųjį papildinį, o $f(s)$ – tolydi aibėje $\mathcal{K}$ funkcija, kuri yra analizinė aibės $\mathcal{K}$ viduje. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0,T] : \max_{s\in\mathcal{K}} |\zeta(s+i\tau,\omega) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Ši teorema skirtingais metodais buvo išnagrinėta Bagči [2] ir Goneko [16] darbuose.

Apibrėžkime aibę

$$L(\omega_1,\dots,\omega_r) = \{\log(m+\omega_j) : m \in \mathbb{N}_0, \omega_j \in (0;1], j = 1,\dots,r\}.$$

2.4.2 teorema (Jungtinis Hurvico dzeta funkcijų universalumas)**.** *Tarkime, kad aibė $L(\omega_1,\dots,\omega_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tegu $\mathcal{K}_j \subset \mathcal{D}$ yra kompaktinis poaibis, turintis jungųjį papildinį, o $f_j(s)$ – tolydi aibėje $\mathcal{K}_j$ funkcija, kuri yra analizinė $\mathcal{K}_j$ viduje (čia $j = 1,\dots,r$). Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0,T] : \max_{1\le j\le r} \max_{s\in\mathcal{K}_j} |\zeta(s+i\tau,\omega_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Šios teoremos įrodymą galima rasti Laurinčiko darbe [31].

Galiausiai pateikiame periodinių Hurvico dzeta funkcijų universalumo teoremą, kurios įrodymą galima rasti Javtoko ir Laurinčiko darbuose [20], [22].

2.4.3 teorema (Periodinių Hurvico dzeta funkcijų universalumas)**.** *Tegu ω yra trancendentusis skaičius. Tegu $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ yra kompaktinis poaibis, turintis jungųjį papildinį, o $f(s)$ – tolydi aibėje $\mathcal{K}$ funkcija, kuri yra analizinė $\mathcal{K}$ viduje. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0,T] : \max_{s\in\mathcal{K}} |\zeta\left(s+i\tau,\omega;\mathfrak{A}\right) - f\left(s\right)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Daugiau rezultatų, gautų nagrinėjant Hurvico dzeta funkcijų universalumą, galima rasti [20], [21], [30], [31], [35], [38].

4. Pagrindiniai darbo uždaviniai

Disertacijoje buvo keliami šie uždaviniai:

1. **Hurvico dzeta funkcijų su trancendenčiuoju parametru saviaproksimacija**

   Trečiajame disertacijos skyriuje nagrinėjamos Hurvico dzeta funkcijų reikšmės $\zeta(s+id_j\tau,\omega)$ ir $\zeta(s+id_k\tau,\omega)$, čia $m \in \mathbb{N}$, $1 \le j,k \le m$ ir ω – trancendentusis skaičius.

   Sprendžiamas klausimas, kokioms sąlygoms esant reikšmės $\zeta(s+id_j\tau,\omega)$ ir $\zeta(s+id_k\tau,\omega)$ yra artimos su be galo daug realiųjų skaičių τ?

2. **Hurvico dzeta funkcijų su racionaliuoju parametru saviaproksimacija**

   Ketvirtajame disertacijos skyriuje nagrinėjamos Hurvico dzeta funkcijų reikšmės $\zeta(s+i\alpha\tau,\omega)$ ir $\zeta(s+i\beta\tau,\omega)$, čia $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ir ω – racionalusis skaičius.

   Sprendžiamas klausimas, kokioms sąlygoms esant reikšmės $\zeta(s+i\alpha\tau,\omega)$ ir $\zeta(s+i\beta\tau,\omega)$ yra artimos su be galo daug realiųjų skaičių τ?

3. **Periodinių Hurvico dzeta funkcijų su trancendenčiuoju ir racionaliuoju parametrais saviaproksimacijos**

   Penktasis disertacijos skyrius skirtas minėtiems uždaviniams apibendrinti. Čia nagrinėjamos periodinės Hurvico dzeta funkcijų reikšmės $\zeta(s+i\alpha\tau,\omega;\mathfrak{A})$ ir $\zeta(s+i\beta\tau,\omega;\mathfrak{A})$, kai $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ir ω – racionalusis arba trancendentusis skaičius. Aiškinamasi, kada reikšmės $\zeta(s+i\alpha\tau,\omega;\mathfrak{A})$ ir $\zeta(s+i\beta\tau,\omega;\mathfrak{A})$ yra artimos su be galo daug realiųjų skaičių τ.

5. Tyrimo metodai

Šioje disertacijoje gautiems rezultatams įrodyti buvo taikyti metodai, nagrinėti neseniai gautuose Garunkščio [12] ir Pankovskio [43], [44] darbuose. Taip pat taikyti kompleksinio kintamojo funkcijų elementai, mato teorija ir diofantiniai metodai.

6. Moksliniai rezultatai

1. **Hurvico dzeta funkcijų su trancendenčiuoju parametru saviaproksimacija**

Tarkime, $d_1, d_2, \ldots, d_k$ yra realieji skaičiai, o ω – realusis skaičius, priklausantis intervalui (0,1] .

Tegu

$$A(d_1, d_2, \ldots, d_k; \omega) = \{d_j \log(n + \omega) : j = 1, \ldots, k; n \in \mathbb{N}_0\}$$

yra multiaibė.

Jei multiaibė $A(d_1, d_2, \ldots, d_k; \omega)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių, tai $A(d_1, d_2, \ldots, d_k; \omega)$ yra aibė ir skaičiai $d_1, \ldots, d_k$ yra taip pat tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$.

Trečiajame disertacijos skyriuje įrodyta tokia teorema.

3.4.1 teorema. *Tegu $l \leq m$ yra natūralusis skaičius, o ω – trancendentusis skaičius, priklausantis intervalui (0,1]. Tarkime, $d_1, \ldots, d_l \in \mathbb{R}$ tokie, kad $A(d_1, d_2, \ldots, d_l; \omega)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Kai $m > l$, tegu $d_{l+1}, \ldots, d_m \in \mathbb{R}$ tokie, kad kiekvienas d_k, $k = l + 1, \ldots, m$, yra skaičių $d_1, \ldots, d_l$ tiesinė kombinacija virš $\mathbb{Q}$. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \Big\{ \tau \in [0, T] : \max_{1\leq j,k\leq m} \max_{s\in K} |\zeta(s + id_j\tau, \omega) - \zeta(s + id_k\tau, \omega)| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Be to, šiame skyriuje išnagrinėtos aibės $A(d_1, d_2, \ldots, d_k; \omega)$ savybės ir įrodyti du svarbūs teiginiai, parodantys, kad ši teorema nėra „tuščia“.

Toliau pateikti teiginiai parodo, kad su kiekvienu $l \in \mathbb{N}$ „dauguma“ skaičių $d_1, d_2, \ldots, d_l, \omega$ (čia $0 < \omega \leq 1$) rinkinių tokie, jog aibė $A(d_1, d_2, \ldots, d_l; \omega)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$.

3.4.3 teiginys. *Tegu ω yra trancendentusis skaičius, $l \geq 2$, o aibė $A(d_1, d_2,$*

$\ldots, d_{l-1}; \omega)$ – tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tuomet aibė

$$E = \{d_l \in \mathbb{R} : A(d_1, d_2, \ldots, d_l; \omega) \textit{ yra tiesiškai priklausoma virš } \mathbb{Q}\}$$

yra skaiti.

3.4.4 teiginys. *Tegu $d_1, d_2, \ldots, d_l$ yra realieji skaičiai, tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$. Tuomet aibė*

$$H = \{\omega \in (0, 1] : A(d_1, d_2, \ldots, d_l; \omega) \textit{ yra tiesiškai priklausoma virš } \mathbb{Q}\}$$

yra skaiti.

Verta paminėti, kad sunku sukonstruoti pavyzdžių, kuriuose $d_1, d_2, \ldots, d_l$ yra tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$ ir aibė $A(d_1, d_2, \ldots, d_l; \omega)$ taip pat būtų tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$.

2. **Hurvico dzeta funkcijų su racionaliuoju parametru saviaproksimacija**

Tegu $\omega = \frac{a}{b}$ yra racionalusis skaičius, tenkinantis sąlygas $0 < a < b$ ir $gcd(a, b) = 1$. Tuomet Hurvico dzeta funkciją galima išreikšti Dirichlė L funkcijų tiesine kombinacija

$$\zeta\left(s + i\tau, \frac{a}{b}\right) = \frac{b^{s+i\tau}}{\varphi(b)} \sum_{\chi \bmod b} \overline{\chi(a)} L(s + i\tau, \chi).$$

Ketvirtajame disertacijos skyriuje įrodyta svarbiausia teorema.

4.1.1 teorema. *Tegu $\omega = \frac{a}{b}$ yra racionalusis skaičius, tenkinantis sąlygas $0 < a < b$ ir $gcd(a, b) = 1$. Be to, tarkime, kad α, β yra realieji tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$ skaičiai, o $\mathcal{K}$ – bet kuris kritinės juostos $1/2 < \sigma < 1$ kompaktinis poaibis. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} meas \left\{\tau \in [0, T] : \max_{s \in \mathcal{K}} \left|\zeta\left(s + i\alpha\tau, \frac{a}{b}\right) - \zeta\left(s + i\beta\tau, \frac{a}{b}\right)\right| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Šios teoremos įrodymui netinka tas pats metodas, kuris buvo taikytas 3.4.1 teoremai, nes mes parodėme, kad aibė $A(d_1, d_2, \ldots, d_l; \omega)$ yra visuomet tiesiškai priklausoma, kai ω – racionalusis skaičius.

Taip pat šiame skyriuje įrodyti pagalbiniai rezultatai, reikalingi pagrindinės teoremos įrodymui.

Atvirą ir aprėžtą aibės $\mathbb{C}$ poaibį G vadinsime *leistinuoju*, jei su kiekvienu $\varepsilon > 0$ aibė

$$G_\varepsilon = \left\{s \in \mathbb{C} : |s - w| < \varepsilon \text{ su tam tikru } w \in G\right\}$$

turi jungųjį papildinį.

Visų pirma pateikiame pagalbinę lemą.

4.3.1 lema. *Tegu $\chi_1, \ldots, \chi_n$ yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai, G – tokia leistinoji aibė, kad $\overline{G} \subset D$ ir f_j, g_j $(j = 1, \ldots, n)$ yra analizinės ir neturinčios nulių aibėje $\overline{G}$ funkcijos. Be to, tarkime, kad B yra baigtinė pirminių skaičių aibė, α, β – realieji, tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$ skaičiai, o $A = A(\alpha, \beta)$ – pirminių skaičių aibė, kurią sudaro daugiausia du elementai, ir aibė*

$$\{\alpha \log p\}_{p \in \mathbb{P} \setminus A} \cup \{\beta \log p\}_{p \in \mathbb{P}},$$

yra tiesiškai neprikalausoma virš $\mathbb{Q}$.

Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$ ir bet kuria aibe $G_0 \subset \overline{G_0} \subset G$ egzistuoja baigtinės aibės $A_1 \subset \mathbb{P} \setminus (A \cup B)$, $A_2 \subset \mathbb{P} \setminus B$ ir tokie realieji skaičiai $\theta_p^{(1)}$, $p \in A_1$, $\theta_p^{(2)}$, $p \in A_2$, kad aibė realiųjų skaičių τ, kai

$$\max_{1 \le j \le n} \max_{s \in \overline{G_0}} \Bigg| L(s + i\alpha\tau, \chi_j)_{|(A \cup A_1 \cup B)} - f_j(s) \prod_{p \in A \cup B} \left(1 - \frac{\chi_j(p)}{p^s}\right) \prod_{p \in A_1} \left(1 - \frac{\chi_j(p) e(-\theta_p^{(1)})}{p^s}\right) \Bigg| < \varepsilon,$$

$$\max_{1 \le j \le n} \max_{s \in \overline{G_0}} \Bigg| L(s + i\beta\tau, \chi_j)_{|(A_2 \cup B)} - g_j(s) \prod_{p \in B} \left(1 - \frac{\chi_j(p)}{p^s}\right) \prod_{p \in A_2} \left(1 - \frac{\chi_j(p) e(-\theta_p^{(2)})}{p^s}\right) \Bigg| < \varepsilon,$$

$$\max_{\gamma \in \{\alpha, \beta\}} \max_{p \in B} \left\| \gamma\tau \frac{\log p}{2\pi} \right\| < \varepsilon,$$

$$\max_{p \in A} \left\| \alpha\tau \frac{\log p}{2\pi} \right\| < \varepsilon,$$

$$\max_{p \in A_1} \left\| \alpha\tau \frac{\log p}{2\pi} - \theta_p^{(1)} \right\| < \varepsilon,$$

$$\max_{p \in A_2} \left\| \beta\tau \frac{\log p}{2\pi} - \theta_p^{(2)} \right\| < \varepsilon,$$

turi teigiamą apatinį tankį.

Pateikiame pagalbinę teoremą, kurios įrodymas paremtas pagalbine 4.3.1 lema.

4.5.1 teorema. *Tegu $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ yra bet kuri kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, $\chi_1, \ldots, \chi_n$ – poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai, o $f_j, g_j, (j = 1, \ldots, n)$ – neturinčios nulių ir tolydžios aibėje $\mathcal{K}$ funkcijos, analizinės $\mathcal{K}$ viduje.*

Be to, tarkime, kad α, β yra realieji skaičiai, tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, ir B – baigtinė pirminių skaičių aibė.

Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$ aibė realiųjų skaičių τ, tenkinančių sąlygas

$$\max_{1\le j\le n}\max_{s\in\mathcal{K}}|L(s+i\alpha\tau,\chi_j)-f_j(s)|<\varepsilon,$$

$$\max_{1\le j\le n}\max_{s\in\mathcal{K}}|L(s+i\beta\tau,\chi_j)-g_j(s)|<\varepsilon,$$

$$\max_{p\in B}\left\|\tau\frac{(\alpha-\beta)\log p}{2\pi}\right\|<\varepsilon,$$

turi teigiamą apatinį tankį.

Tarę, kad $f_j = g_j$, gautumėme, jog aibė skaičių $\tau \in \mathbb{R}$, tenkinančių sąlygas

$$\max_{1\le j\le n}\max_{s\in\mathcal{K}}|L(s+i\alpha\tau,\chi_j)-L(s+i\beta\tau,\chi_j)|<\varepsilon,$$

$$\max_{p\in B}\left\|\tau\frac{(\alpha-\beta)\log p}{2\pi}\right\|<\varepsilon,$$

turi teigiamą apatinį tankį.

3. **Periodinių Hurvico dzeta funkcijų su trancendenčiuoju ir racionaliuoju parametrais saviaproksimacijos**

Penktajame disertacijos skyriuje įrodytos dvi teoremos, apibendrinančios ankstesnius mūsų gautus rezultatus. Remsimės tuo, kad kai $\sigma > 1$, tai

$$\begin{aligned}\zeta(s,\omega;\mathfrak{A}) &= \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_l}{(mk+l+\omega)^s} = \frac{1}{k^s}\sum_{l=0}^{k-1}c_l\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+(l+\omega/k))^s}\\ &= \frac{1}{k^s}\sum_{l=0}^{k-1}c_l\zeta\left(s,\frac{l+\omega}{k}\right).\end{aligned}$$

Visų pirma pateikiame periodinės Hurvico dzeta funkcijos su racionaliuoju parametru saviaproksimacijos teoremą.

5.1.1 teorema. *Tegu $\mathfrak{A} = \{c_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka, kurios mažiausias teigiamas periodas $k \in \mathbb{N}$. Tegu $\omega = \frac{a}{b}$, $0 < a < b$, $gcd(a,b) = 1$. Be to, tarkime, kad α, β yra realieji skaičiai, tiesiškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, o $\mathcal{K}$ – bet kuris kompaktinis juostos $1/2 < \sigma < 1$ poaibis. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\Big\{\tau\in[0,T]:\\ \max_{s\in\mathcal{K}}\left|\zeta\left(s+i\alpha\tau,\frac{a}{b};\mathfrak{A}\right)-\zeta\left(s+i\beta\tau,\frac{a}{b};\mathfrak{A}\right)\right|<\varepsilon\Big\}>0.$$

Šios teoremos įrodymas remiasi mūsų įrodytu tokiu teiginiu.

5.2.1 teiginys. *Tegu* $k, n \in \mathbb{N}$ *ir* $\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ *yra racionalieji skaičiai, tenkinantys sąlygas* $0 < a_j < b_j$ *ir* $gcd(a_j, b_j) = 1$*, kai* $j = 1, 2, \dots, n$*. Be to, tarkime, kad* α, β *yra realieji skaičiai, tiesiškai nepriklausomi virš* $\mathbb{Q}$ *, o* $\mathcal{K}$ *– bet kuris kompaktinis juostos* $1/2 < \sigma < 1$ *poaibis. Tada su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0, T] : \max_{s\in\mathcal{K}} \max_{1\le j\le n} \left| \zeta\left(s + i\alpha\tau, \frac{a_j}{b_j}\right) - \zeta\left(s + i\beta\tau, \frac{a_j}{b_j}\right) \right| < \varepsilon, \right.$$
$$\left. \max_{p|k} \left|\left| \frac{1}{2\pi}\tau \log p \right|\right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Galiausiai pateikiame paskutinį disertacijoje įrodytą rezultatą – periodinės Hurvico dzeta funkcijos su trancendenčiuoju parametru teoremą.

5.1.2 teorema. *Tegu* $\mathfrak{A} = \{c_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ *yra periodinė kompleksinių skaičių seka, kurios mažiausias teigiamas periodas* $k \in \mathbb{N}$*. Tarkime, kad* ω *yra trancendentusis skaičius, priklausantis intervalui* $(0, 1]$*. Be to, skaičiai* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tokie, kad aibė* $A(\alpha, \beta; \omega)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$*, o* $\mathcal{K}$ *– bet kuris kompaktinis juostos* $1/2 < \sigma < 1$ *poaibis. Tada su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0, T] : \max_{s\in\mathcal{K}} \left| \zeta\left(s + i\alpha\tau, \omega; \mathfrak{A}\right) - \zeta\left(s + i\beta\tau, \omega; \mathfrak{A}\right) \right| < \varepsilon, \right.$$
$$\left. \left|\left| \frac{(\alpha - \beta)\tau \log k}{2\pi} \right|\right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Šios teoremos įrodymas paremtas skaičių $\log(n + \omega_l)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ ir $\log k$ (čia $\omega_l = \frac{l+\omega}{k}$, $l = 0, \dots, k - 1$) tiesiniu nepriklausomumu virš $\mathbb{Q}$ ir atskiru 3.4.1 teoremos atveju, kai $m = 2$, t. y. $d_1 = \alpha, d_2 = \beta$.

7. Aprobacija

Konferencijos ir mokyklos

- E. KARIKOVAS, *Self-approximation of Hurwitz zeta-functions*, Summer school, Four faces of number theory, August 7–11, 2012, Department of Mathematics Julius-Maximilians-Universität, Würzburg, Germany.
- E. KARIKOVAS, *Self-approximation of Hurwitz zeta-functions with rational parameter*, 54-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija, birželio 19–20, 2013, Vilnius, Lietuva.
- E. KARIKOVAS, *Self-approximation of Hurwitz zeta-functions*, 28th Journées Arithmétiques, June 1–5, 2013, Grenoble, France.
- E. KARIKOVAS, *Self-approximation of periodic Hurwitz zeta-functions*, Elementare und Analytische Zahlentheorie, ELAZ Conference at University of Hildesheim, June 28 – August 1, 2014, Hildesheim, Germany.

Išvardytų konferencijų ir vizitų metu buvo pristatyti disertacijos rezultatai. Taip pat šie rezultatai pristatyti Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros seminaruose.

8. Rezultatų naujumas ir vertė

Disertacijoje visi gauti rezultatai yra nauji ir originalūs. Tikimės, kad jie bus naudingi ir svarbūs naujiems tyrimams.

9. Pagrindinės publikacijos

Pagrindiniai disertacijos rezultatai yra publikuoti išvardytuose straipsniuose.

Išspausdinti straipsniai

1. R. GARUNKŠTIS, E. KARIKOVAS, *Self-approximation of Hurwitz zeta-functions*, Funct. Approx. Comment. Math., **51(1)**, 2014, 181–188.
2. E. KARIKOVAS, Ł. PAŃKOWSKI, *Self-approximation of Hurwitz zeta-functions with rational parameter*, Lith. Math. J., **54(1)**, 2014, 74–81.

Priimti straipsniai

1. E. KARIKOVAS, *Self-approximation of periodic Hurwitz zeta-functions*, to appear in Nonlinear Anal. Model. Control.

10. Išvados

Tyrimų rezultatai rodo:

- Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \omega)$ turi saviaproksimacijos savybę, kai ω yra trancendentusis arba racionalusis skaičius.
- Periodinės Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \omega; \mathfrak{A})$ turi saviaproksimacijos savybę, kai ω yra trancendentusis arba racionalusis skaičius.
- Algebrinio iracionaliojo ω atveju metodika nepateikiama.

11. Summary

The main objects studied in this thesis are self-approximation property of Hurwitz zeta-functions and periodic Hurwitz zeta-functions. Let $s = \sigma + it$ denote a complex variable and let ω be a parameter from the interval (0,1]. For $\sigma > 1$, the Hurwitz zeta-function is given by

$$\zeta(s, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\omega)^s}.$$

Denote by $\mathfrak{A} = \{c_m : m \in \mathbb{N}_0\}$, a periodic sequence of complex numbers with the smallest period $k \in \mathbb{N}$.
For $\sigma > 1$, the periodic Hurwitz zeta-function is defined by

$$\zeta(s, \omega; \mathfrak{A}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{(m+\omega)^s}.$$

- We proved that Hurwitz zeta-functions has the self-approximation property when ω is a transcendental number from the interval (0,1].

  Let $l \leq m$ be positive integers and $d_1, \ldots, d_l \in \mathbb{R}$ be such that the set

  $$A(d_1, d_2, \ldots, d_l; \omega) = \{d_j \log(n+\omega) : j = 1, \ldots, l; n \in \mathbb{N}_0\}$$

  is linearly independent over $\mathbb{Q}$. For $m > l$, let $d_{l+1}, \ldots, d_m \in \mathbb{R}$ be such that each d_k, $k = l+1, \ldots, m$ is a linear combination of $d_1, \ldots, d_l$ over $\mathbb{Q}$. We showed that exists 'many' real numbers $\tau \in \mathbb{R}$ such that the shifts of Hurwitz zeta-functions $\zeta(s + id_j\tau, \omega)$ and $\zeta(s + id_k\tau, \omega)$ are 'near' each other, where $1 \leq j, k \leq m$.

  This result is similar to that obtained by Garunkštis for Dirichlet L-functions. Moreover, we showed that, for any positive integer l, 'most' collections of real numbers $d_1, d_2, \ldots, d_l, \omega$, where $0 < \omega \leq 1$, are such that $A(d_1, d_2, \ldots, d_l; \omega)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$.

- We proved the self-approximation property for Hurwitz zeta-functions with rational parameters.

  We recall that for rational $\omega = \frac{a}{b}$ satisfying $0 < a < b$ and $gcd(a, b) = 1$ the Hurwitz zeta function can be expressed as a linear combination of Dirichlet L-functions:

  $$\zeta\left(s + i\tau, \frac{a}{b}\right) = \frac{b^{s+i\tau}}{\varphi(b)} \sum_{\chi \bmod b} \overline{\chi(a)} L(s + i\tau, \chi).$$

Namely, we used last equality and proved that $\zeta(s + i\alpha\tau, \frac{a}{b})$ approximates uniformly $\zeta(s + i\beta\tau, \frac{a}{b})$ for infinitely many real τ, where α, β are arbitrary real numbers linearly independent over $\mathbb{Q}$ and s is in a compact set lying in the open right half of the critical strip. This result is similar to that of Pańkowski for Dirichlet L-functions.

- We used the previous results and showed the self-approximation properties of periodic Hurwitz zeta-functions $\zeta(s, \omega; \mathfrak{A})$ for rational and transcendental parameters.

In the thesis we applied recent methods introduced by Garunkštis [12] and Pańkowski [43], [44]. Also, elements of complex analysis, measure theory and diophantine methods are used.

Literatūra

[1] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, (1976).

[2] B. Bagchi, *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta- function and other allied Dirichlet series*, PhD Thesis, Calcutta: Indian Statistical Institute, (1981).

[3] B. Bagchi, *A joint universality theorem for Dirichlet L-functions*, Math. Z., **181** (1982), 319–334.

[4] A. Baker, *Transcendental number theory*, London: Cambridge University Press, (1975).

[5] A. Baker, *A concise introduction to the theory of number theory*, Cambridge University Press, (1984).

[6] V. I. Bogachev, *Measure Theory*, Vol. I and II, Springer, (2007).

[7] C. C. Clawson, Mathematical mysteries: The beauty and magic of numbers, Cambridge, Massachusetts, (1999).

[8] F. Carlson, *Contributions à la théorie des séries de Dirichlet. Note I.*, Arkiv för Mat., Astron. och Fysik, **16**, no. 18 (1922), 19 pp.

[9] H. Davenport, *Multiplicative number theory, Graduate Texts in Mathematics*, 74 (3rd revised ed.), New York: Springer-Verlag, (2000).

[10] A. Dubickas, *Multiplicative dependence of quadratic polynomials*, Lith. Math. J., **38(3)**, (1998), 225–231.

[11] D. Gaier, *Vorlesungen über Approximation im Komplexen*, Birkhäuser, Basel, (1980).

[12] R. Garunkštis, *Self-approximation of Dirichlet L-functions*, J. Number Theory **131**, (2011), 1286–1295.

[13] R. Garunkštis and E. Karikovas, *Self-approximation of Hurwitz zeta-functions*, Funct. Approx. Comment. Math., **51(1)** (2014), 181–188.

[14] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, and J. Steuding, *On the mean square of Lerch zeta-functions*, Arch. Math., **80** (2003), 47–60.

[15] R. Garunkštis and J. Steuding, *On the distribution of zeros of the Hurwitz zeta-function*, Mathematics of computation, **76** (257), (2007), 323–337.

[16] S. M. Gonek, *Analytic Properties of Zeta and L-Functions*, PhD Thesis, University of Michigan, (1979).

[17] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic number theory*, Americ. Math. soc., Colloquium Publications, vol. 53, (2004).

[18] K. Janulis and A. Laurinčikas, *Joint universality of Dirichlet L-functions and Hurwitz zeta-function*, Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. **39** (2013), 203–214.

[19] K. Janulis, A. Laurinčikas, R. Macaitienė and D. Šiaučiūnas, *Joint universality of Dirichlet L-functions and periodic Hurwitz zeta-function*, Math. Model. Anal., **17** (2012), 673–685.

[20] A. Javtokas, A. Laurinčikas, *The universality of the periodic Hurwit zeta-function*, Integral Transform. Spec. Funct., **17** (10) (2006), 711–722.

[21] A. Javtokas, A. Laurinčikas, *A joint universality theorem for the periodic Hurwitz zeta-functions*, Bull. Austral. Math. Soc., **78** (2008), 13–33.

[22] A. Javtokas, A. Laurinčikas, *On the periodic Hurwitz zeta-function*, Hardy-Ramanujan J., **29** (2006), 18–36.

[23] A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann Zeta Functions*, Berlin: de Gruyter, (1992).

[24] E. Karikovas and Ł. Pańkowski, *Self-approximation of Hurwitz zeta-functions with rational parameter*, Lith. Math. J., vol 54, **1**, (2014), 74–81.

[25] E. Karikovas, *Self-approximation of periodic Hurwitz zeta-functions*, to appear in Nonlinear Anal. Model. Control.

[26] J. Kaczorowski, M. Kulas, *On the non-trivial zeros off the critical line for L-functions from extended Selberg class*, Monatsh. Math., **150** (2007), 217–232.

[27] J. Kaczorowski, A. Laurinčikas, and J. Steuding, *On the value distribution of shifts of universal Dirichlet series*, Monatsh. Math., **147** (2006), 309–317.

[28] S. Lang, *Transcendental numbers and diophantine approximation*, Bull. Amer. Math. Soc., **77** (1971), 635–677.

[29] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, (1996).

[30] A. Laurinčikas, *Joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions*, Izv. RAN, Ser. Mat., **72** (4) (2008), 121–140 (in Russian)= Izv. Math., **72** (4) (2008), 741–760.

[31] A. Laurinčikas, *The joint universality of Hurwitz zeta-functions*, Šiauliai Math. Semin., **3** (11) (2008), 169–187.

[32] A. Laurinčikas and R. Garunkštis, *The Lerch Zeta-function*, Kluwer, (2002).

[33] A. Laurinčikas, K. Matsumoto, *The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms*, Acta Arith., **98** (4) (2009), 345–359.

[34] A. Laurinčikas, K. Matsumoto and J. Steuding, *The universality of L-functions associated with new forms*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., **67** (1) (2009), 83–98; transl. in Izv. Math., **67** (1) (2003), 77–90.

[35] A. Laurinčikas and S. Skerstonaitė, *A joint universality theorem for periodic Hurwitz zeta-functions II*, Lith. Math. J., **49** (3) (2009), 287–296.

[36] K. Matsumoto *A survey on the theory of universality for zeta and L-functions*, arXiv:1407.4216 [math.NT], (2014).

[37] H. Mishou, *The universality theorem for Hecke L-functions zeta-functions*, Acta Arith., **110** (1) (2003), 45–71.

[38] H. Mishou, *The joint value-distribution of the Riemann zeta function and Hurwitz zeta functions*, Lith. Math. J., **47** (1) (2007), 32–47.

[39] H. L. Montgomery, *Multiplicative number theory I: Classical theory*, Cambridge University Press, (2006).

[40] T. Nakamura, *The joint universality and the generalized strong recurrence for Dirichlet L-functions*, Acta Arith., **138** (2009), 357–362.

[41] T. Nakamura, *The existence and non-existence of joint t-universality for Lerch zeta-functions*, J. Number theory, **125** (2) (2007), 424–441.

[42] T. Nakamura, Ł. Pańkowski, *Self-approximation for Riemann zeta function*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, **87** (2013), 452–461.

[43] Ł. Pańkowski, *Some remarks on the generalized strong recurrence for L-functions*, in: New Directions in Value Distribution Theory of zeta and L-Functions, Ber. Math., Shaker Verlag, Aachen, (2009), 305–315.

[44] Ł. Pańkowski, *Hybrid joint universality theorem for L-functions*, Acta Arith., **141** (1) (2010), 59–72.

[45] Ł. Pańkowski, *Hybrid universality theorem for L-functions without Euler product* , Integral Transform. Spec. Funct., **24** (1) (2013), 39–49.

[46] G. Pólya, G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer, Berlin, (1964).

[47] K. Ramachandra, *Contributions to the theory of transcendental numbers I, II*, Acta Arith., **14** (1967/68), 66–72.

[48] V. V. Rane, *On the mean square value of Dirichlet L-series*, J. London Math. Soc., **21** (2), (1980), 203–215.

[49] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monat. der Königl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre 1859 (1860), 671–680; also, Gesammelte math. Werke und wissensch. Nachlass, 2. Aufl., (1892), 145–155.

[50] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3nd edition, (1976).

[51] C. L. Siegel, *Transcendental numbers*, Annals of Math. Studies, **16**, Princeton, (1949).

[52] J. Steuding, *Value distribution of L-functions*, Lecture Notes in Mathematics 1877, Springer, Berlin, (2007).

[53] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2nd edition, Oxford University Press, (1939).

[54] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd edition, revised by D. R. Heath-Brown, Oxford University Press, (1986).

[55] S. M. Voronin, *Theorem on the universality of the Riemann zeta-function*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **39** (1975), 475–486 (in Russian)= Math. USSR, Izv., **9** (1975), 443–453.

[56] H. Weber, *Leopold Kronecker*, Math. Ann. **43** (1893), 1–25.

12. Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta

1986 metų birželio 18 diena, Marijampolė.

Išsilavinimas

- **2004 m.** Baigta Marijampolės Rimanto Stankevičiaus vidurinė mokykla.
- **2004 - 2008 m.** Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas. Matematikos ir informatikos mokymo studijų programa. Įgytas matematikos bakalauro kvalifikacinis laipsnis, mokytojo profesinė kvalifikacija.
- **2008 - 2010 m.** Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas. Matematikos ir informatikos dėstymo studijų programa. Įgytas matematikos magistro kvalifikacinis laipsnis, mokytojo profesinė kvalifikacija.
- **2010 - 2014 m.** Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas. Matematikos doktorantūros studijos.

Darbo patirtis

- **2007 - 2010 m.** Vilniaus Jeruzalės vidurinės mokyklos matematikos mokytojas.
- **2008 – iki dabar** Vilniaus licėjaus matematikos vyr. mokytojas.
- **2010 m. vasaris – balandis** Vilniaus kolegija, Elektronikos ir informatikos fakultetas. Matematikos ir informatikos dėstytojas (atlikta praktika).
- **2012 - 2014 m.** Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros asistentas. Dėstyti kursai: Tikimybių teorija, Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija.