ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

INFORMATIKOS, MATEMATIKOS IR E. STUDIJŲ INSTITUTAS

MATEMATIKOS KATEDRA

Nikolaj Diadko

Freše diferencijuojamumas pagal tikimybę reguliariuose statistiniuose eksperimentuose

Magistro darbas

Darbo vadovas

doc. Vaidotas Kanišauskas

Šiauliai, 2015

TURINYS

ĮVADAS

Darbo tikslas: pritaikyti Freše diferencijuojamumą pagal tikimybę tiriant taškinių procesų lokalųjį asimptotinį normalumą (LAN).

Uždaviniai:

1. rasti reguliarumo sąlygas prie kurių taškiniai procesai tenkina LAN;
2. pritaikyti Freše diferencijuojamumą pagal tikimybę ir patikrinti rastas bendrąsias LAN sąlygas Puasono tipo taškiniams procesams, kurių intensyvumo funkcija tiesiškai priklauso nuo parametro.

Šiuolaikinėje asimptotinėje parametrų įvertinimo teorijoje fundamentali yra LAN sąvoka, įvesta A. Valdo ir toliau išplėtota Le Kamo ir J. Hajeko. Ta sąvoka yra susijusi su normuoto tikėtinumo santykiu ir gaunama esant artimiems tikimybinėms matams, nauju pavidalu. Tas pavidalas garantuoja, kad nagrinėjamos procesų klasės maksimalaus tikėtinumo įvertis bus asimptotiškai normalus. Praktiškai statistinių eksperimentų klasė, kuriai galioja LAN sąlyga, toliau gali būti nagrinėjama užmirštant statistinių eksperimentų prigimtį, nesvarbu ar tai yra taškinių procesų, Markovo procesų, martingalų ar kitokių procesų statistiniai eksperimentai. Svarbu, kad jų tikėtinumo funkcijos pavidalas yra visiem vienodas, kuriem yra tenkinama LAN sąlyga. Kad užtikrinti LAN sąlygą, normuotas tikėtinumo santykis po tam tikrų subtilių transformacijų, asimptotiškai turi susivesti į reikiamą pavidalą, atliekant tas transformacijas svarbios tampa tam tikros reguliarumo sąlygos, uždėdamos normuotam tikėtinumo santykiui, tiksliau tam tikrom atsitiktinėm funkcijom, įeinančiom į tą santykį. Pradinė iš tokių transformacijų, uždengtom atsitiktinėm funkcijom yra diferencijavimo galimybė. Tai, kad pati funkcija yra atsitiktinė, sukelia tam tikrų problemų, kokį diferencijavimo būdą šiom atsitiktinėm funkcijom taikyti ar taikyti abstraktų diferencijavimo būdą C_1^0 įvestą J. Linkovo. Kada ignoruojamos funkcijos atsitiktinumas, ar taikyti Freše diferenecijuojamumą normuotoje erdvėje, kas tam tikrais atvejais sutampa su diferencijuojamumo erdvei L_2. Panašius atsitiktinius procesus nagrinėjo V. Kanišauskas [4], J. Linkovas [10], A. Kutojancas [12]. V. Kanišauskas ir J. Linkovas taikė diferencijuojamumą erdvėje C_1^0, kas labai supaprastina situaciją. A. Kutojancas daugiausia nagrinėjo nehomogeninį Puasono proceso statistinius eksperimentus, kada diferencijuojamumo sąlygos buvo uždedamos to proceso (nehomogeninis Puasono procesas) intensyvumo funkcijai, kuri nebuvo atsitiktinė. Magistriniame darbe yra įvedamas atsitiktinės funkcijos parametro diferencijuojamumas pagal Freše tam tikroje normoje pagal tikimybę. Tuo požiūriu nebėra ignoruojamas atsitiktinumo faktorius nagrinėjamoje situacijoje. Taikant diferencijavimą pagal Freše pagal tikimybę nebegalima sakyti, kad viskas gerai, kaip buvo erdvės C_1^0 atveju, o reikia patikrinti kiekvieną, net ir paprasčiausią atvejį taikant Freše diferencijavimą, nurodytoje normoje pagal tikimybę apibrėžimo taikymu.

TEORINĖ DALIS

1. REGULIARŪS STATISTINIAI EKSPERIMENTAI

Tarkime, kad $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta, \theta \in \Theta)$ yra tikimybinė erdvė, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ - mati erdvė, $\mathcal{X}$ - matus atvaizdis iš $(\Omega, \mathcal{F})$ į $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, P^X - atsitiktinio elemento X tikimybinis skirstinys, t.y.

$$P_\theta^X(A) = P_\theta\{\omega : X(\omega) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}.$$

Atsitiktinis elementas X vadinamas stebėjimais, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ - imčių erdve, o apie elemento X skirstinį P_θ^X žinome tik tiek, kad jis priklauso skirstinių klasei $\{P_\theta^X, \theta \in \Theta\}$, sudarytai nors iš dviejų elementų.

Apibrėžimas [4]. Trejetas $\mathcal{E} = (\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X, \theta \in \Theta)$ vadinamas stebėjimų X indukuotu statistiniu eksperimentu.

Akivaizdu, kad tikimybinių erdvių šeima $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta)$ yra pagalbinis objektas ir gali būti apibrėžta įvairiais būdais. Natūralu už Ω imti $\mathcal{X}$, už $\mathcal{F}$ σ - algebra $\mathcal{B}$ ir tarti, kad $P_\theta(A) = P_\theta^X(A)$, kai $A \in \mathcal{B}$ ir apibrėžti $X(x) = x$, kai $x \in \mathcal{X}$.

Pagrindinis parametrinės statistikos uždavinys yra daryti išvadas apie X tikimybinį skirstinį P_θ^X, remiantis stebėjimais X, iš anksto nežinant, kokia tikroji parametro θ reikšmė, tik žinant, kad ji priklauso tam tikrai atvirai ir iškilai aibei $\Theta \in \mathrm{R}^\mathrm{k}$, $\mathrm{k} \geq 1$.

Apibrėžimas [4]. Tarkime, kad $(\mathcal{U}, \mathcal{A}) -$ kita mati erdvė. Statistika vadinamas kiekvienas matus atvaizdis $T = T(X)$ iš $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ į $(\mathcal{U}, \mathcal{A})$.

Tuo atveju, kada $\mathcal{U} = \Theta$, o $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Theta)$ ($\mathcal{B}(\Theta) - \Theta$ poaibių σ - algebra), statistika $T = T(X)$ vadinama parametro θ įverčiu ir dažnai žymima $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$.

Apibrėžimas [4]. Statistinis eksperimentas $\mathcal{E} = (\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X, \theta \in \Theta)$ vadinamas dominuojamu mato Q^X atžvilgiu, jei egzistuoja σ - baigtinis matas Q^X toks, kad $P_\theta^X << Q^X$ su visais $\theta \in \Theta$.

Tarkime, kad statistinis eksperimentas $\mathcal{E} = (\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X, \theta \in \Theta)$, $\Theta \in \mathrm{R}^\mathrm{k}$, $\mathrm{k} \geq 1$ dominuojamas mato Q^X. Pažymėkime

$$Z(\theta, x) = \frac{dP_\theta^X}{dQ^X}(x), \qquad x \in \mathcal{B}.$$

Apibrėžimas [4]. Statistika $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$ vadinama parametro θ maksimalaus tikėtinumo įverčiu, jei

$$Z(\hat{\theta}, x) = \exp_{\theta \in \overline{\Theta}} Z(\theta, x)$$

čia $\overline{\Theta}$ - aibės Θ uždarinys.

Apibrėžimas [4]. Statistinis eksperimentas $\mathcal{E} = \left(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X, \theta \in \Theta\right)$ vadinamas reguliariu aibėje Θ, jei

1) funkcija $Z^{\frac{1}{2}}(u,\circ)$ diferencijuojama (pagal Freše) erdvėje $L_2(Q^X)$ kiekviename aibės Θ taške $u = \theta$;
2) funkcija $\psi(\theta,\circ) = \frac{\partial}{\partial\theta} Z^{\frac{1}{2}}(u,\circ)$ tolydi, kai $\theta \in \Theta$ erdvėje $L_2(Q^X)$.

2. DIFERENCIJUOJAMUMAS PAGAL FREŠE

Šiame darbe pažymėjimų sistema taikoma, kaip ir Ž. Žakodo ir A. Širiajevo knygoje [9] arba V. Kanišausko disertacijoje [4]. Tarkime, kad funkcija $U = U_s(w, \theta)$, $(w, s, \theta) \in \Omega \times R_1 \times \Theta$ (Θ – atviras R^k, $k \geq 1$ poaibis) tokia, kad $U \in \mathcal{L}_{loc}^2(A)$, $(A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}} \cap \mathcal{P})$ su visais y iš tam tikros taško $\theta \in \Theta$ aplinkos. Sakysime, kad funkcija U diferencijuojama pagal Freše taške θ erdvėje $\mathcal{L}_{loc}^2(A)$ arba normoje $\|\cdot\|_A$ pagal P - tikimybę, jei egzistuoja tokia vektorinė funkcija $\dot{U} = \left(\dot{U}_s(w, \theta)\right)$, $(w, s) \in \Omega \times R_+$, priklausanti erdvei $\mathcal{L}_{loc}^{2,(k)}(A)$ tokio, kad

$$U_s(w, \theta + h) - U_s(w, \theta) = h' \dot{U}_s(w, \theta) + \mathcal{E}_s(w, \theta, h)$$

čia dydis $\mathcal{E}_s(w, \theta, h)$ toks, kad

$$P - \lim_{h \to 0} \frac{\|\mathcal{E}_s(\theta, h)\|_{A_t}}{|h|} = 0, \qquad t \in \times R_+$$

$$\|\mathcal{E}_s(\theta,h)\|_{A_t} = (\mathcal{E}^2(\theta,h)\cdot A_t)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^t \mathcal{E}^2(\theta,h,s)d\,A(s)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Galime apjungti į vieną formulę:

$$P - \lim_{h\to 0}\frac{\|U(\theta+h)-U(\theta)-(h,U(\dot{\theta}))\|_{A_t}}{|h|} = 0, \qquad t \in \times R_+ \qquad (1)$$

Apibrėžimas. Tarkime, kad funkcija $V = V(y)\epsilon\mathcal{L}_{loc}^2(\varphi), A(\theta)\ \epsilon\ \mathcal{P}\otimes\mathcal{E}$ su visais y iš tam tikros $\theta \subset \mathrm{R}^{\mathrm{k}}$ aplinkos. Sakysime, kad $V(y)$ Freše – diferencijuojama taške $y = \theta$ erdvėje $\mathcal{L}_{loc}^2(A(\theta)$) pagal P – tikimybę, jei egzistuoja $\mathcal{P}\otimes\mathcal{E}$ - mati funkcija $V(\theta) = (V_1(\theta),\dots,V_k(\theta))'\epsilon\ \mathcal{L}_{loc}^{2,(k)}(\theta)$ tokia,

$$V(w,s,x,\theta+h) - V(w,s,x,\theta) = h'\,\dot{V}(w,s,x,\theta) + \delta(w,s,x,\theta,h),$$

čia dydis $\delta(w,s,x,\theta,h)$ toks, kad

$$P - \lim_{h\to 0}\frac{\|\delta_s(\theta,h)\|_{A(\theta)}}{|h|} = 0, \text{ o } \|\delta(\theta,h)\|_{A(\theta)} = (\delta^2(\theta,h)\cdot A(\theta)_t)^{\frac{1}{2}}$$

Abi sąlygas apjungę į vieną gauname

$$P - \lim_{h\to 0}\frac{\left\|V(\theta,h) - V(\theta) - h'\,\dot{V}(\theta)\right\|_{A(\theta)_t}}{|h|} = 0, \ \ t\ \epsilon\ R_+$$

Pažymėjimas $\mathcal{L}_{loc}^{2,(k)}(A(\theta))$ reiškia, kad kiekviena vektoriaus koordinatė priklauso $\mathcal{L}_{loc}^2(A(\theta))$. $P - \lim_{h\to 0}$ žymi konvergavimą pagal tikimybė kai $h \to 0$.

Sakysime, kad funkcija $V(y)\epsilon\mathcal{L}_{loc}^2(\varphi), A(\theta)\ \ \epsilon\ \mathcal{P}\otimes\mathcal{E}$ tolydi atviroje ir iškiloje aibėje Θ erdvėje $\mathcal{L}_{loc}^{2,(k)}(\varphi)$, jei

$$P - \lim_{h\to 0}|V(y+h) - V(y)|^2\cdot A(\theta))_t = 0$$

su visais $t\ \epsilon\ R_+$ ir $y, y+h\ \epsilon\ \Theta \subset \mathrm{R}^{\mathrm{k}}$.

Šiuo atveju Rymano sumų

(1) atsižvelgiant, kad $\|g_s(\theta,h)\|_{A_t} = (g_s(\theta,h)\cdot A_t)^{\frac{1}{2}} = \int_0^t g$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z' V(\theta + \tau_t z)(t_{k+1} - t_k)$$

$$(0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1, \quad \tau_k \,\epsilon\, [t_k, t_{k+1}], \;\; \lambda = \max[t_{k+1} - t_k]$$

Riba erdvėje $\mathcal{L}^2_{loc}(\partial)$ pagal P – tikimybę, kai $\lambda \to 0$ žymima

$$z' \int_0^1 V(\theta + sz)ds$$

Kada $\theta + sz \,\epsilon\, \Theta$, kai $s \,\epsilon\, [0;1]$.

Teorema 1. Tegu funkcija $V(\theta) = V(w, \theta, s, x), (w, \theta, s, x) \epsilon\, \Omega \times \Theta \times R_+ \times E$ tolydžiai Freše - diferencijuojama atviroje ir iškiloje aibėje $\Theta \subset R^k$ erdvėje $\mathcal{L}^2_{loc}(A(\theta)), A(\theta) \,\epsilon\, \mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ pagal tikimybę. Tada erdvėje $\mathcal{L}^2_{loc}(A(\theta))$

$$V(\theta + u) - V(\theta) = u' \int_0^1 \dot{V}(\theta + zu)dz,$$

Čia $\theta + zu \,\epsilon\, \Theta$, kai $0 \le z \le 1$.

Įrodymas. Remiantis $V(\theta)$ Freše diferencijuojamumu aibėje Θ erdvėje $\mathcal{L}^2_{loc}(\varphi)$ pagal P – tikimybę, galime užrašyti

$$\begin{aligned} V(\theta + u) - V(\theta) &= \sum_{k=0}^{n-1} [V(\theta + t_k + u) - V(\theta + t_k u)] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \dot{V}(\theta + t_k u) u\, (t_{k+1} - t_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \delta(\theta + t_k u, (t_{k+1} - t_k)u) \end{aligned}$$

čia

$$P - \lim_{t_{k+1} - t_k \to 0} \frac{\|\delta(\theta + t_k u, (t_{k+1} - t_k)u)\|_{\partial_t}}{(t_{k+1} - t_k)u|u|} = 0, \;\; t \,\epsilon\, R_+.$$

todėl

$$\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\left[V(\theta+t_{k+1}+u)-V(\theta+t_k u)-\dot V(\theta+\tau_k u)\cdot u(t_{k+1}-t_k)\right]\right\|_{\varphi_t}$$
$$\leq |u|\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\left\|\,\dot V(\theta+t_k u)-\dot V(\theta+\tau_k u)\right\|_{\varphi_t}$$
$$+\frac{\|\delta(\theta+t_k u,(t_{k+1}-t_k)u)\|_{A_t}}{(t_{k+1}-t_k)|u|}\xrightarrow{P}0,$$

Kai $\lambda = \max[t_{k+1}-t_k] \to 0$ ir $t \,\epsilon\, R_+$, o $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1, \quad \tau_k \,\epsilon\, [t_k, t_{k+1}]$.

Čia pasinaudosime $\dot V(y)$ tolydumu intervale $[\theta, \theta+u]$ erdvėje $\mathcal{L}^2_{loc}(\varphi)$ pagal P – tikimybę.

Teorema įrodyta.

Išvada. Jei $V(\theta)\cdot(\mu-\partial)_t \,\epsilon\, \mathcal{M}^2_{loc},\ \theta \,\epsilon\, \Theta \subset R^k, k \geq 1$ ir $V(\theta)$ jo Freše išvestinė, tai

$$\big(V(\theta+u)-V(\theta)\big)\cdot(\mu-\theta)_t = u'\int_0^1 \dot V(\theta+su)ds\cdot(\mu-\partial)_t$$

erdvėje $\mathcal{L}^2_{loc}(\partial)$ pagal P – tikimybę.

3. DAUGIAVARIANČIAI TAŠKINIAI PROCESAI

Tarkime, kad duota stochastinė bazė $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ ir Lūzino erdvė$(\mathrm{E}, \mathcal{E})$.

Apibrėžimas [8]. Daugiavariančiu taškiniu procesu vadiname seką $(T_n, X_n),\ n \geq 1$, kurioje T_n - stabdymo momentai atžvilgiu $\mathbb{F}$ tokie, kad $0 < T_1$, $T_n < T_{n+1}$, jei $T_n < \infty$ ir $T_{n+1} = T_n$, jei $T_n = \infty$, ir $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T_\infty \leq \infty$, o $X_n - \mathcal{F}_{T_n}$- matūs dydžiai su reikšmėmis iš mačios erdvės $(\mathrm{E}, \mathcal{E})$.

Seka $(T_n, X_n),\ n \geq 1$ pilnai charakterizuoja sveikaskaitis atsitiktinis matas [9]

$$\mu([0,t],\Gamma) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}\,(T_n \leq t)\ \mathbb{1}\,(X_n \in \Gamma), \qquad \Gamma \in \mathcal{E}, \qquad t \geq 0.$$

Toliau tarsime, kad

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0 \vee \mathcal{F}_t^{\mu}, \qquad \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t), \qquad t \geq 0, \qquad \mathcal{F} = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t,$$

čia

$$F_t^{\mu} = \sigma\{\mu([0,s],\Gamma), \qquad s \leq t, \qquad \Gamma \in \mathcal{E}\}.$$

Jei $\mathrm{E} = \{1\}$, t.y. $X_n \equiv 1$, tada turime seką $(T_n, 1),\ n \geq 1$, kuri vadinama taškiniu procesu. Ji atitinka procesas

$$N_t = \mu([0,t],\{1\}), \qquad t \geq 0,$$

kuris vadinamas skaičiuojančiu procesu.

Pastebėsime, kad

$$N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}\,(T_n \leq t), \qquad t \geq 0,$$

šio proceso trajektorijos yra laiptuotos funkcijos, prasidedančios iš nulio ir turinčios $+1$ dydžio šuoliukus $T_n,\ n \geq 1$ laiko momentais.

Apibrėžimas [4]. Procesas N_t vadinamas nehomogeniniu Puasono procesu su intensyvumu $\lambda(t), t \geq 0,$ jei jo pokyčiai ant nesikertančių intervalų nepriklausomi ir pasiskirstę pagal Puasono dėsnį su parametru $\int_0^t \lambda(s)ds$, t.y.

$$P(N_t - N_s = k) = \frac{\left(\int_0^t \lambda(x)dx,\right)^k}{k!} exp\left\{-\int_0^t \lambda(x)dx\right\},$$

su kiekvienais $0 \leq s \leq t,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

Jei $\lambda(t) \equiv \lambda = const.$, tada procesas N_t vadinamas homogeniniu, o kada $\lambda \equiv 1$ - standartiniu Puasono procesu.

Apibrėžimas [4]. Skaičiuojantis procesas N_t vadinamas atstatymo procesu, jei $T_n - T_{n+1}, n = 1,2, \ldots$ ($T_0 = 0$), nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę.

Apibrėžimas [4]. Skaičiuojantys procesas N_t su absoliučiai tolydžiu kompensatoriu

$$A_t = \int_0^t \lambda(\omega) ds$$

kur $\lambda = (\lambda_t(\omega), \mathcal{F}_t), t \geq 0$ - numatoma neneigiama funkcija, vadinamas Puasono tipo procesu su intensyvumo funkcija $\lambda_t(\omega)$.

4. LOKALAUS ASIMPTOTINIO NORMALUMO GALIOJIMO SĄLYGOS

Tegu stochastinėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P_\theta, \theta \in \Theta)$ $\Theta \subset \mathrm{R}^{\mathrm{k}}, k \geq 1$ su Lūzino erdve $(E, \mathcal{E})$ uždDuotas žymių taškinis procesas $(T_n, X_n), n \geq 1$, kurį atitinkantis sveikaskaitis atsitiktinis matas

$$\mu([0,t], \Gamma) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}(T_n \leq 1)\, 1(X_n \in \Gamma), \Gamma \in \mathcal{E}, t \geq 0$$

turi kompensatorių tokio pavidalo

$$\nu_t(\theta, \Gamma) = \iint_{0\,\Gamma}^{\mathrm{t}} \mathrm{h}(\mathrm{s}, \theta, x) g(s, dx) ds, \Gamma \in \mathcal{E}, \theta \in \Theta,$$

čia

$h_s(\theta, x) - (\mathbb{F}, P_\theta)$ – numatomas procesas.

Tarkime, kad

$$\left(1 - \sqrt{\frac{h(y)}{h(\theta)}}\right)^2 \cdot \nu(\theta)_t < \infty,$$

Tada $P_y^t << P_\theta^t$ ir lokalaus tankio procesas [9] $Z_t(y, \theta) = \frac{dP_y^t}{dP_\theta^t}$ turi pavidalą

$$Z_t(y,\theta) = exp\left\{\ln\frac{h(y)}{h(\theta)}\cdot\mu_t - \left(\frac{h(y)}{h(\theta)} - 1\right)\cdot\nu(\theta)_t\right\}$$

Pažymėkime $V(y,\theta) = \frac{h(y)}{h(\theta)}$ (2), tada $Z_t(y,\theta)$ užsirašys taip

$$Z_t(y,\theta) = \exp\{V(y,\theta)\cdot(\mu - \nu(\theta))_t - V(y,\theta) - 1 - \ln V(y,\theta))\cdot\nu(\theta))_t\}$$

čia $V\cdot\mu_t = \iint_0^t V(w,s,x)\,\mu(w,ds,dx)$.

Įvesime sąlygas prie kurių žymių taškiniam procesui galioja LAN.

Sąlyga 1A. Su kiekvienu $\theta \epsilon \Theta$ atsitiktines funkcijos tolydžiai $V(y,\theta)$ ir $\ln V(y,\theta)$ Freše diferencijuojamos taške $y \epsilon U\delta(\theta) = \{x: |x-\theta| < \delta\}$, $\delta > 0$ pagal P_θ - tikimybę erdvėje $\mathcal{L}^2_{loc}(\partial(\theta))$ ir

$$\dot{V}(y,\theta), \frac{\dot{V}(y,\theta)}{V(y,\theta)} \;\epsilon\; \mathcal{L}^{2,k}_{loc}(\varphi(\theta,\mathbb{F},P_\theta)$$

kur

$$\dot{V}(y,\theta) = \left(\frac{\partial V(y,\theta)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial V(y,\theta)}{\partial y_k}\right)'$$

Sąlyga 2A. Kiekvienam kompaktui $K \epsilon \Theta$ tolygiai pagal $\theta \epsilon K$

$$P_\theta - \lim_{t\to\infty}\varphi_t(\theta)\left[\dot{V}(\theta,\theta)\left(\dot{V}(\theta,\theta)\right)'\cdot\nu(\theta))_t\right]\nu_t(\theta) = I_k,$$

Čia I_k vienetinė $k \times k$ matavimų matrica.

Sąlyga 3A. Kiekvienam kompaktui $K \epsilon \Theta$ ir $\mathcal{E} \epsilon (0;1]$ tolygiai pagal $\theta \epsilon K$

$$P_\theta - \lim_{t\to\infty}\mathbb{1}\left\{\left|\varphi_t(\theta)\dot{V}(\theta,\theta)\right| > E\right\}\left|\mu_t(\theta)\dot{V}(\theta,\theta)\right|^2\cdot\nu(\theta)_t = 0$$

Sąlyga 4A. Kiekvienam kompaktui $K \epsilon \Theta$ ir visiems $c\,\epsilon(0,\infty)$ tolygiai pagal $\theta \epsilon K$ ir $|u| \le c$, kai $u \epsilon U_{\theta,t}$

$$P_\theta - \lim_{t\to\infty}\left(\int_0^1 \left|\varphi_t(\theta)(\dot V(\theta + s\mu_t(\theta),\theta) - \dot V(\theta,\theta)\right|^2 + \left|\varphi_t(\theta)\left(\frac{\dot V(\theta + s\mu_t(\theta)u,\theta)}{V(\theta + s\mu_t(\theta)u,\theta)} - \dot V(\theta,\theta)\right)\right|^2 ds\cdot \nu(\theta)_t\right) = 0$$

Sąlyga 5A. Kiekvienam kompaktui $K \epsilon \Theta$

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{t\,\epsilon\, R_+}\sup_{\theta\,\epsilon\, K} P_\theta\left\{\varphi_t(\theta)\left[\dot V(\theta,\theta)\left(\dot V(\theta,\theta)\right)'\cdot\partial(\theta))_t\right]\cdot\varphi_t(\theta) > N\right\} = 0.$$

čia $I_t(\theta) = \mathbb{E}\,\dot V(\theta,\theta)\left(\dot V(\theta,\theta)\right)'\cdot\partial(\theta))_t,\ \ \varphi_t(\theta) = \ [I_t(\theta)]^{\frac{1}{2}},$ (3)

$\theta_u = \theta + \varphi_t(\theta)u,\ \ U_{\theta,t} = \{u\,\epsilon R^k\colon \theta + \sigma_t(\theta)u\ \epsilon\ \Theta\},\ \ \theta\ \epsilon\ \Theta,\ \ t\ \epsilon\ R_+,\ \ |A| = (spAA')^{\frac{1}{2}}$ matricai A, ir $|x| = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Teorema 2. Jei patenkintas 1A-5A sąlygos, tai kiekvienam kompaktui $K \epsilon \Theta$ su $\theta \epsilon K$ ir $u \epsilon U_{\theta,t}$

$$Z_{t,\theta} = \frac{dP^t_{\theta u}}{dP^t_\theta} = exp\left\{u'\left(\eta_{t,\theta} + \delta_{t,\theta}\right) - \frac{1}{2}u'\left(I_k + P_{t,\theta}\right)u\right\},\quad (4)$$

čia

$\eta_{t,\theta} = \varphi_t(\theta)\left\{\dot V(\theta,\theta)\cdot(\mu - \nu(\theta))_t\right\}\epsilon\ \mathcal{M}^{2,(k)}_{loc}$ $(\mathbb{F}, P_\theta)$, ir tolygiai pagal $\theta \epsilon K$

$\mathcal{L}\left(\eta_{t,\theta}|P_\theta\right) \Rightarrow N(0, I_k),\ \ t\to\infty,$

$\delta_{t,\theta}$ ir $P_{t,\theta}$ tokie vektorinis ir matricinis procesai, kad tolygiai pagal $\theta \epsilon K$

$$P_\theta - \lim_{t\to\infty}\left(\left|\delta_{t,\theta}\right| + \left|P_{t,\theta}\right|\right) = 0.$$

Įrodymas. Pažymėkime $\Delta_t =,\ \ \sigma_t(\theta)u,$

$$L(\theta,z) = \frac{\dot V(\theta + z\Delta_t,\theta)}{V(\theta + z\Delta_t,\theta)},$$

Tada funkcija $Z_{t,\theta}(u) = \frac{dP^t_{\theta u}}{dP^t_\theta}$ dėka 1A sąlygos gauname

$$\ln Z_{t,\theta}(u) = \left(A_t' \int_0^1 L(\theta,z)dz\right) \cdot (\mu - \varphi(\theta))_t$$

$$- \left(A_t' \int_0^1 L(\theta,S) \int_0^S \left(\dot{V}(\theta + z\Delta_t,\theta)\right)' dzds\Delta_t \cdot \sigma_t(\theta)_t\right)$$

$$= u'\left(\eta_{t,\theta} + \delta_{t,\theta}\right) - \frac{1}{2}u'\left(I_k + P_{t,\theta}\right)u,$$

čia

$$\delta_{t,\theta} = \sigma_t(\theta)\left(\int_0^1 L(\theta,z)dz - \dot{V}(\theta,\theta)\right) \cdot (\mu - \nu(\theta))_t$$

$$P_{t,\theta} = P_{t,\theta}^1 + P_{t,\theta}^2,$$

$$P_{t,\theta}^1 = \varphi_t(\theta)\left[\dot{V}(\theta,\theta)\left(\dot{V}(\theta,\theta)\right)' \cdot \partial(\theta))_t\right]\sigma_t(\theta) - I_k$$

$$P_{t,\theta}^2 = 2\varphi_t(\theta)\int_0^1\int_0^S \left[L(\theta,S)\left(\dot{V}(\theta + z\Delta_t,\theta)\right)' - \dot{V}(\theta,\theta)\left(\dot{V}(\theta,\theta)\right)'\right] \cdot dzds \cdot \partial(\theta))_t\varphi_t(\theta).$$

Iš 2A sąlygos matyti, kad

$$P_\theta - \lim_{t\to\infty}\left(\left|P_{t,\theta}^1\right|\right) = 0.$$

Remdamiesi $\sigma_t(\theta)$ apibrėžimu ir 1A ir 2A sąlygomis, gauname, kad $\delta_{t,\theta} \epsilon \mathcal{M}_{loc}^{2,(k)} (\mathbb{F}, P_\theta)$. Šis martingalas neviršija savo kvadratinės charakteristikos, kurią įvertinant su 4A sąlyga gauname, kad tolygiai pagal $\theta \epsilon K$

$$P_\theta - \lim_{t\to\infty}\left(\left|\delta_{t,\theta}\right|\right) = 0$$

$P_{t,\theta}^2$ išskaidome į kelias dalis ir standartiškai išskaidome:

$$P_{t,\theta}^2 = 2\left(d_{t,\theta}^1 + d_{t,\theta}^2 + d_{t,\theta}^3\right)$$

kur

$$\left|d_{t,\theta}^{1}\right|^{2} \leq \left(\int_{0}^{1} \left|\varphi_{t}(\theta)\left[L(\theta,S) - \dot{V}(\theta,\theta)\right]\right|^{2} ds\, \varphi(\theta)\right)$$
$$\cdot \left(\int_{0}^{1} \left|\varphi_{t}(\theta)\left[\dot{V}(\theta + s\Delta_{t},\theta) - \dot{V}(\theta,\theta)\right]\right|^{2} ds\, \varphi(\theta)_{t}\right)$$

$$\left|d_{t,\theta}^{2}\right|^{2} \leq \left(\int_{0}^{1} \left|\varphi_{t}(\theta)\left[L(\theta,S) - \dot{V}(\theta,\theta)\right]\right|^{2} ds\, \varphi(\theta)_{t}\right) \cdot \left(\left|\sigma_{t}(\theta)\dot{V}(\theta,\theta)\right|^{2} \varphi(\theta)_{t}\right)$$

$$\left|d_{t,\theta}^{3}\right|^{2} \leq \left(\left|\varphi_{t}(\theta)\dot{V}(\theta,\theta)\right|^{2} \varphi(\theta)_{t}\right)\left(\int_{0}^{1} \left|\sigma_{t}(\theta)\left[\dot{V}(\theta + z\Delta_{t},\theta) - \dot{V}(\theta,\theta)\right]\right|^{2} dz\, \varphi(\theta)_{t}\right).$$

Atsižvelgę į $\mu_t(\theta)$ apibrėžimą ir 4A sąlygą gauname, kad tolygiai pagal $\theta \epsilon K$

$$P_{\theta} - \lim_{t\to\infty}\left(\left|P_{t,\theta}^{2}\right|\right) = 0$$

$\eta_{t,\theta}$ tolygus asimptotinis normalumas gaunamas paprasčiausiai pritaikius jam centrinę ribinę teoremą ir atsižvelgus į 3A ir 5A sąlygas.

Teorema įrodyta.

TAIKYMAI

Žinome, kad Puasono tipo proceso kompensatorius yra pavidalo $A(\theta,t) = \int_0^t h(\theta,s)ds$. Tarkime, kad intensyvumo funkcija $h(\theta,x)$ yra tokio pavidalo: $h(\theta,x) = \theta h(x)$, kur $\theta > 0$, $h(x)$ – numatomas atsitiktinis procesas, kad

$$P_\theta\left(\lim_{x\to\infty}\int_0^t h(x)dx = \infty\right) = 1 \qquad (5)$$

Tada, akivaizdu, kad

$$\lim_{x\to\infty} M\int_0^t h(x)dx = \lim_{x\to\infty} MH(x) = \infty$$

5. PIRMINIS TYRIMAS

Rasime $h(\theta,x) = \theta h(x)$ Freše išvestinę θ atžvilgiu pagal tikimybę, kai $A_t = A(\theta,t)$. Tarkime, kad ta išvestinė sutampa su formule $h(\theta,x)$ išraiškos $\theta h(x)$ išvestine $h(x)$, t.y.

$$\dot{h}(\theta,x) = h(x).$$

Patikrinsime ar tokia išvestinė tenkina Freše išvestinės pagal tikimybę apibrėžimą (1). Mūsų atveju (1) atrodo taip

$$P_\theta - \lim_{h\to 0}\frac{\left\|h(\theta+h) - h(\theta) - h\dot{h}(\theta)\right\|_{A(\theta)_t}}{|h|} = 0$$

Kadangi $\|g_s(\theta,h)\|_{A(\theta)_t} = \left(\int_0^t g^2(\theta,h,s)d\,A(\theta,s)\right)^{\frac{1}{2}}$

iš čia

$$\frac{\left\|h(\theta+h) - h(\theta) - h\dot{h}(\theta)\right\|_{A(\theta,t)}}{|h|} = \frac{1}{|h|}\left\{\int_0^t [(\theta+h)h(x) - \theta h(x) - hh(x)]^2 dA(\theta,x)\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{|h|}\left\{\int_0^t 0\cdot dA(\theta,x)\right\}^{\frac{1}{2}} = 0$$

Vadinasi $h(\theta,x) = \theta h(x)$ diferencijuojama pagal θ, pagal tikimybę normoje $\|\cdot\|_{A(\theta,t)}$ ir lygi $\dot{h}(\theta,x) = h(x)$.

Surasime kam lygi $\dot{V}(y,\theta), \dot{V}(\theta,\theta)$, kai $\dot{h}(\theta,x) = h(x)$ - $\|\cdot\|_{A(\theta,t)}$ normoje.

Pagal $V(y,\theta)$ apibrėžimą (žiūrėti (2) formulę) $V(y,\theta) = \frac{h(y)}{h(\theta)}$ - sutrumpintas pažymėjimas arba $V(y,\theta,x) = \frac{h(y,x)}{h(\theta,x)}$.

Kadangi $h(y,\theta) = yh(x)$, tai

$$V(y,\theta,x) = \frac{yh(x)}{\theta h(x)} = \frac{y}{\theta} \qquad (6)$$

kai y ir θ fiksuoti.

Formaliai $\dot{V}(y,\theta,x) = \frac{\dot{h}(y,x)}{h(\theta,x)}$, tada iš (6) seka, kad $\dot{V}(y,\theta,x) = \frac{1}{\theta}$ su bet kokias y.

Akivaizdžiai ir $\dot{V}(\theta,\theta,x) = \frac{1}{\theta}$.

Išvada. Jei $h(\theta,x) = \theta h(x)$, tai kai $\dot{h}(\theta,x) = h(x)$ $\|\cdot\|_{A(\theta,t)}$ normoje pagal Freše ir $\dot{V}(y,\theta,x)$, $\dot{V}(\theta,\theta,x) = \frac{1}{\theta}$.

Rasime $I_t(\theta)$, kuris lygus $I_t(\theta) = M\dot{V}(\theta,\theta), \left(\dot{V}(\theta,\theta)\right)' \cdot A(t,\theta)$, kadangi θ – vienmatis, tai ir $\dot{V}(\theta,\theta)$ vienmatis ir

$$I_t(\theta) = M\dot{V}(\theta,\theta), \left(\dot{V}(\theta,\theta)\right)^2 \cdot A(t,\theta).$$

Pasinaudoję tuo, kad $g \cdot A(\theta)_t = \int_0^t g(x)dA(\theta,x)$ gauname, kad

$$I_t(\theta) = M\int_0^t \dot{V}(\theta,\theta,x)^2 dA(\theta,x).$$

Kadangi $A(\theta,x) = \int_0^x h(\theta,s)ds$, o $\dot{V}(\theta,\theta,x) = \frac{1}{\theta}$, $h(\theta,s) = \theta h(s)$, tai

$$I_t(\theta) = M\int_0^t \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 d\int_0^x h(\theta,s)ds = \frac{1}{\theta} M\int_0^t h(\theta,s)ds\,.$$

Pažymėkime $H(t) = M\int_0^t h(\theta,s)ds$. Kadangi $h(s)$ tenkina (6) sąlygą, tai

$$\lim_{t\to\infty} M\int_0^t h(s)ds = \infty$$

Vadinasi $H(t) \to \infty$, kai $t \to \infty$.

$I_t(\theta) = \frac{H(t)}{\theta}$, todėl ir $I_t(\theta) \to \infty$, kai $t \to \infty$, kai θ fiksuotas.

Išvada. Kadangi $I_t(\theta) \to \infty$, $t \to \infty$, tai galime apibrėžti $\varphi_t(\theta)$ pagal (3) formulę:

$$\varphi_t(\theta) = [I_t(\theta)]^{-\frac{1}{2}} \qquad (7)$$

Mūsų atveju, kadangi $I_t(\theta) = \frac{H(t)}{\theta}$, tai iš (7) išplaukia, kad

$$\varphi_t(\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{H(t)}} \qquad (8)$$

Dabar galime apibendrinti gautus tarpinius rezultatus išvadose.

Išvados. Kai $h(\theta,x)=\theta h(x)$, o $h(x)$ tenkina (5) sąlygą, egzistuoja $h(\theta,x)$ Freše išvestinė pagal P_θ - tikimybę normoje $\|\cdot\|_{A(\theta,t)}$ ir ji lygi $h(x)$.

Tada be papildomų sąlygų (2) $V(y,\theta,x)=\frac{h(y,x)}{h(\theta,x)}=\frac{yh(x)}{\theta h(x)}=\frac{y}{\theta}$ diferencijuojama pagal Freše, pagal P_θ - tikimybę taške y normoje $\|\cdot\|_{A(\theta,t)}$ ir $\dot{V}(y,\theta,x)=\frac{\dot{h}(y,x)}{h(\theta,x)}=\frac{1}{\theta}$ su bet kokiu y.

Toks išvestinės pavidalas turėtų palengvinti skaičiavimus. Pažiūrėsime ar taip bus ateityje.

6. LAN SĄLYGŲ TIKRINIMAS, KAI PUASONO TIPO INTENSYVUMO FUNKCIJA NUO PARAMETRO PRIKLAUSO TIESIŠKAI

1A sąlygos tikrinimas. Kadangi formaliai ln $V(y,\theta,x)$ Freše išvestinė pagal y yra $\frac{\dot{V}(y,\theta,x)}{V(y,\theta,x)}$, o $\dot{V}(y,\theta,x)=\frac{1}{\theta}$, $V(y,\theta,x)=\frac{y}{\theta}$, tai $\frac{\dot{V}(y,\theta,x)}{V(y,\theta,x)}=\frac{1}{y}$ ir galime teigti, kad ln $V(y,\theta,x)$ diferencijuojamumas pagal Freše taške y be papildomų sąlygų.

Vadinasi 1A sąlyga patenkinta.

2A sąlygos tikrinimas. Mūsų atveju (žiūrėti (8) formulę) $I_t(\theta)=\frac{H(t)}{\theta}$, $\varphi_t(\theta)=\sqrt{\frac{\theta}{H(t)}}$, kur $H(t)=M\int_0^t h(\theta,s)ds$. Viską įsirašome į 2A sąlyga gauname, kad

$$\varphi_t(\theta)\dot{V}(\theta,\theta,x)^2\cdot\nu(\theta)_t\varphi_t(\theta)$$
$$=\sqrt{\frac{\theta}{H(t)}}\int_0^t\left(\frac{1}{\theta}\right)^2 d\int_0^x h(\theta,s)ds\sqrt{\frac{\theta}{H(t)}}=\frac{1}{H(t)}\int_0^t h(s)ds=\frac{\int_0^t h(s)ds}{M\int_0^t h(s)ds}$$

Dabar 2A sąlyga virsta tokiu teiginiu kiekvienam kompaktui $K\,\epsilon\,\Theta$ tolygiai pagal $\theta\,\epsilon\,K$

$$P_\theta-\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t h(s)ds}{M\int_0^t h(s)ds}=1 \qquad (9)$$

Sąlyga C. Atsitiktinė funkcija $h(s)$ tokia, kad (9) teisinga.

3A sąlygos tikrinimas. $P_\theta-\lim_{t\to\infty}\mathbb{1}\left\{\left|\varphi_t(\theta)\dot{V}(\theta,\theta)\right|>E\right\}\left|\mu_t(\theta)\dot{V}(\theta,\theta)\right|^2\cdot\nu(\theta)_t=0$

pagal Linkovą [10], 3A sąlyga ekvivalenti tokiai sąlygai

$$\lim_{t\to\infty}\left(M\left|\varphi_t(\theta)\dot{V}(\theta,\theta)\right|^2\cdot\nu(\theta)_t\ \wedge\ M\left|\varphi_t(\theta)\dot{V}(\theta,\theta)\right|^3\cdot\nu(\theta)_t\right)=0$$

kur $a\wedge b=\min(a,b)$

Skaičiuosime dešinę dalį $\lim\limits_{t\to\infty} M\left|\varphi_t(\theta)\dot{V}(\theta,\theta)\right|^3 \cdot \nu(\theta)_t$, kadangi $\varphi_t(\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{H(t)}}$,

$\dot{V}(\theta,\theta) = \frac{1}{\theta}$, tai

$$M\left|\varphi_t(\theta)\dot{V}(\theta,\theta)\right|^3 \cdot \nu(\theta)_t = M\left|\sqrt{\frac{\theta}{H(t)}}\frac{1}{\theta}\right|^3 \cdot \nu(\theta)_t = \frac{M\int_0^t \theta h(s)ds}{H(t)\theta\sqrt{H(t)\theta}} = \frac{H(t)}{H(t)\sqrt{\theta}\sqrt{H(t)}} = \frac{1}{\sqrt{\theta H(t)}} \quad (10)$$

Kadangi esant (6) sąlygai, tai iš (9) seka, kad

$$\lim_{t\to\infty} M\left|\varphi_t(\theta)\dot{V}(\theta,\theta)\right|^3 \cdot \nu(\theta)_t = 0$$

3A sąlyga patenkinama.

4A sąlygos tikrinimas. Gautas išraiškas $\dot{V}(y,\theta,x) = \frac{1}{\theta}$, $\dot{V}(\theta,\theta,x) = \frac{1}{\theta}$, $V(y,\theta,x) = \frac{y}{\theta}$, $\varphi_t(\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{H(t)}}$ įsirašome į 4A sąlygą ir gauname:

$$\int_0^1 \left|\varphi_t(\theta)(\dot{V}(\theta+s\mu_t(\theta),\theta)-\dot{V}(\theta,\theta)\right|^2 + \left|\varphi_t(\theta)\left(\frac{\dot{V}(\theta+s\mu_t(\theta)u,\theta)}{V(\theta+s\mu_t(\theta)u,\theta)} - \dot{V}(\theta,\theta)\right)\right|^2 ds$$

$$\cdot (\theta)_t = \int_0^t\int_0^1 \left|\varphi_t(\theta)\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta}\right)\right| + \left|\varphi_t(\theta)\frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{\theta+s\mu_t(\theta)u}{\theta}} - \frac{1}{\theta}\right|^2 ds \cdot \nu(\theta,x)$$

$$= \varphi_t(\theta)\int_0^1 \left(\frac{1}{\theta+s\mu_t(\theta)u} - \frac{1}{\theta}\right)^2 ds \cdot \nu(\theta,t)$$

$$= \frac{\theta}{H(t)}\int_0^1 \left(\frac{1}{\theta+s\mu_t(\theta)u} - \frac{1}{\theta}\right)^2 ds\, \theta\int_0^t h(x)dx$$

Vadinasi

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^1 \left(\frac{1}{\theta+s\mu_t(\theta)u} - \frac{1}{\theta}\right)^2 ds = \int_0^1 \left(\frac{1}{\theta+\lim\limits_{t\to\infty}(\theta)u} - \frac{1}{\theta}\right)^2 ds = \int_0^1 \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta}\right)^2 ds = 0$$

nes $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_t(\theta) = 0$, todėl 4A sąlyga patenkinta.

5A sąlygos tikrinimas. Tikrindami 2A sąlygą gavome, kad

$$\varphi_t(\theta)\dot{V}(\theta,\theta,x)^2 \cdot \nu(\theta)_t \varphi_t(\theta) = \frac{\int_0^t h(s)ds}{M\int_0^t h(s)ds}$$

Vadinasi 5A sąlyga mūsų atveju virsta į tokią

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\,\epsilon\,R_+} \sup_{\theta\,\epsilon\,K} P_\theta \left(\frac{\int_0^t h(s)ds}{M\int_0^t h(s)ds} > N \right)$$

Pagal Čebyševo nelygybę, jei $X > 0$ $P(X > E) \leq \frac{MX}{\varepsilon}$

Mūsų atveju $P_\theta\left(\int_0^t h(s)ds > 0\right) = 1$, dėl (9) sąlygos, kai $t > 0$, todėl

$$0 \leq P_\theta \left(\frac{\int_0^t h(s)ds}{M\int_0^t h(s)ds} > N \right) \leq \frac{M\frac{\int_0^t h(s)ds}{M\int_0^t h(s)ds}}{N} = \frac{M\int_0^t h(s)ds}{N - M\int_0^t h(s)ds} = \frac{1}{N}$$

todėl be papildomų sąlygų

$$0 \leq \lim_{N\to\infty} P_\theta \left(\frac{\int_0^t h(s)ds}{M\int_0^t h(s)ds} > N \right) \leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} = 0$$

Vadinasi 5A patenkinta.

Visos sąlygos patenkintos, todėl galioją teoremos 2 rezultatas ir Puasono tipo taškinis procesas tenkina LAN sąlygas ir daleidžia (4) pavaizdavimą, kur

$$\eta_{t,\theta} = \sqrt{\frac{\theta}{H(t)}\frac{1}{\theta}} \cdot (\mu - \nu(\theta))_t = \frac{1}{\sqrt{H(t)\theta}}(N(t) - \nu(\theta,t)) = \int_0^t h(s)ds$$

$$\eta_{t,\theta} = \frac{N(t)-\nu(\theta,t)}{\sqrt{H(t)\theta}} \Rightarrow N(0,1),\ t \to \infty \qquad (11)$$

čia $N(t) = \mu([0,t] \cdot 1)$ – taškinis procesas, turintis Puasono tipo kompensatorių $A(\theta,t)$ pavidalo $A(\theta,t) = \nu(\theta,t) = \theta\int_0^t h(\theta,s)ds$, kur $\int_0^t h(x)dx$ tenkina (6) sąlygą.

Pastebėsime, kad $\frac{N(t)-\nu(\theta,t)}{\sqrt{H(t)\theta}}$ yra lokalus martingalas. Todėl (10) formulė reškia centrinę ribinę teorema lokaliam martingalui.

Išvada. Kai taškinis procesas $N(t)$ turi Puasono tipo intensyvumo funkciją $h(\theta,x)$ pavidalo $\theta h(x)$, kur $h(x)$ tenkina sąlygą $P_\theta\left(\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(s)ds=\infty\right)=1$, jo tikėtinumo funkcijai $\frac{dP_{\theta u}^t}{dP_\theta^t}$ tolygiai pagal $\theta \epsilon K,\ \ K$ - kompaktas, galioja LAN pavidalas su martingalu $\eta_{t,\theta}=\frac{N(t)-\nu(\theta,t)}{\sqrt{H(t)\theta}}$. Čia atsitiktinė funkcija $\eta_{t,\theta}$ galioja centrinė ribinė teorema pavidalo

$$\eta_{t,\theta}=\frac{N(t)-\nu(\theta,t)}{\sqrt{H(t)\theta}}\Longrightarrow N(0,1),\ \ t\to\infty,$$

čia dvi sąlygos

$$P_\theta\left(\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(s)ds=\infty\right)=1;$$

$$P_\theta-\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t h(s)ds}{M\int_0^t h(s)ds}=1.$$

IŠVADOS

1. Tiriant žymių taškinį procesą, gautos A sąlygos, kada galioja tolygus kompakte LAN.
2. Patikrintos A sąlygos Nehomogeniniam Puasono procesui. Ištirtas Freše diferencijuojamumas konkrečiuose pavyzdžiuose.
3. Patikrintos A sąlygos atstatymo procesui. Ištirtas Freše diferencijuojamumas pagal tikimybę konkrečiuose pavyzdžiuose.

LITERATŪRA

1. БОРОВКОВ А. А. *Теория вероятностей.* Москва, 1976.
2. НИКОЛЬСКИЙ С.М. *Курс математического анализа, т. II.* Москва, 1975.
3. KANIŠAUSKAS V. *Tikimybių teorijos ir matematikos pagrindai.*Šiauliai, 2002.
4. KANIŠAUSKAS V. *Atsitiktinių procesų asimtotinis parametrų įvertinimas ir paprastų hipotezių atskyrimas,* daktaro disertacija, Vilnis, 1998.
5. КАНИШАУСКАС В. *Асимптотическое оценивание параметров мультивариантныхточечных процессов.* Lietuvos Matematikos rinkinys, 1997, nr. 37, 467-482.
6. ШИРЯЕВ А. Н. *Вероятность.* Москва, 1989.
7. ВУЛИХ Б. З. *Краткий курс теории функций вещественной переменной*. Москва, 1973.
8. ЛИПЦЕР Р.Ш., ШИРЯЕВ А.Н. *Теория мартингалов*. Москва, 1986.
9. ЖАКОД Ж., ШИРЯЕВ А. *Предельные теоремы для случайных процессов*. Москва, 1994.
10. ЛИНЬКОВ Ю.Н. *Асимптотические методы статистики случайных процессов.* Киев, 1993.
11. LE CAM L. *Locally asymptotically normal families of distributions*. Univ. Calif. Publ. Statist., 3, 27-98 (1960).
12. КУТОЯНЦ Ю. А. *Оценивание параметров случайных процессов*. Ереван, 1980.
13. KRUOPIS J. *Matematinė statistika.* Vilnius, 1977.

FRECHET DERIVATIVE IN ACCORDANCE WITH PROBABILITY IN REGULAR STATISTICAL EXPERIMENTS

SUMMARY

In this work we consider class of marked point processes with continuously compensator of regular statistical experiments. There introduce random differentiation function to the probability in the normed space.

Sufficient conditions to establish the local asymptotic normality (LAN) of the model are presented. Such conditions are obtained abstracted, so the question, then this conditions valid in the specific marked processes.

In this work for example taken Poisson type marked process, this process intensity function of the parameter depends linearly. After detailed proof of the conditions, it was found, that this marked processes satisfied LAN conditions and allows normed likelihood function gain in the form of LAN with local marked martingale process.