



Matematikos mokymo tikslai: matematinis kompetentingumas ar matematinis raštingumas?

Rimas Norvaiša 

Taikomosios matematikos institutas, Vilniaus Universitetas
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: rimas.norvaisa@mif.vu.lt

Įteiktas gruodžio 30, 2020; publikuotas 2021 kovo 15

Santrauka. Straipsnyje aptariamos skirtingos mokyklinės matematikos turinio alternatyvos. Lietuvos visuomenėje paplitęs požiūris, kad mokyklinė matematika gali būti orientuota arba į akademinę matematiką, arba į matematikos taikymą. Realiai pastarasis turinio variantas reiškia matematikos mokymo lygio žeminimą tikintis, kad jis bus prieinamas visiems mokiniams. Tuo tarpu į akademinę matematiką orientuotas turinys prieinamas tik gabiausiems mokiniams. Straipsnyje apibūdinamas tarpinis turinio variantas, mūsų vadinamas matematinio samprotavimu grindžiama mokyklinė matematika. Tokia matematika supažindina vidutinių gabumų mokinius ir su matematinio samprotavimu, ir su matematikos taikymu realiame pasaulyje.

Raktiniai žodžiai: matematinis raštingumas; matematinis samprotavimas; matematinis kompetentingumas; matematikos mokymo filosofija

AMS: 97-02, 97B70, 97B50

Įvadas

Šio straipsnio pretekstu yra 2020 metais vykdytas pradinio ir pagrindinio matematinio ugdymo programos atnaujinimas. Aptariamas matematikos mokymo tikslų ir matematikos mokymo turinio pasirinkimas. Formaliai šis pasirinkimas turėjo vykti pagal bendrųjų programų atnaujinimo gaires [10] ir bendrųjų kompetencijų aprašus. Realiai pasirinkimas priklausė nuo konkretaus dalyko programą atnaujinančios darbo grupės sudėties. Tokiomis sąlygomis gali būti sunku iš anksto numatyti atnaujintos programos kryptį. Straipsnyje apibūdinamas alternatyvus tikslų ir turinio variantas.

Metodologine darbo aplinka yra matematikos mokymo filosofija. Joje konstatuojama ir apibūdinama matematikos mokymo tikslų ir matematikos mokymo turinio priklausomybė nuo ideologijos ir interesų grupių, t.y. kaip tikslai ir turinys priklauso nuo pasaulėžiūros žmonių kurie rengia ugdymo programą [7]. Matematinio raštingumo tikslas ir atitinkamas mokymo turinys iš esmės išreiškia progresyvosios pedagogikos (angl. *progressive pedagogy*) ideologiją [7, 188 p.]. Parodysime, kad alternatyvus, į matematinio kompetentingumo ugdymą orientuotas, tikslas ir turinys išreiškia skirtingas ideologijas.

1 Mokyklinės matematikos sąvokos

Esant skirtingiems požiūriams į matematikos prigimtį, ugdymo programoje deklaruojamas matematikos supratimas gali reikšti labai skirtingus dalykus. Savo ruožtu skirtingi požiūriai į matematikos prigimtį atspindi programos rengėjų ideologiją, pasaulėžiūrą ir vertybes [7]. Matematikos supratimas pasireiškia prasmėmis, kurios suteikiamos tokiems programoje naudojamiems bendriems terminams kaip matematikos sąvoka, apibrėžimas, teiginys, samprotavimas, įrodyti, pagrįsti ir panašiai.

Palyginsime prasmes suteikiamas keletai minėtų sąvokų matematikos didaktikos vadovėliuose.

[Matematikos] sąvoka – žodžiu (jų grupe) išreikštas apibendrintas daiktų ar reiškinių apibūdinimas [15, 51 p.].

Šis matematikos sąvokos apibūdinimas nesiskiria nuo ne matematikos sąvokų apibūdinimo. Jis atitinka progresyvosios pedagogikos požiūrį į mokyklinę matematiką [7, 188 p.]. Šiuo atveju, apibrėžiant matematinį terminą, leidžiama ir rekomenduojama nesilaikyti matematikos apibrėžimams būdingo griežtumo.

Mokyklinėje matematikoje sąvokos yra apibrėžiamos įvairiai: klasikiniu apibrėžimu, genetiniu apibrėžimu ir pateikiant sąvokos aprašymą. [...] Kartais vienu sakiniu pateikiamas sąvokos apibrėžimas esti labai painus, sunkiai mokiniams suprantamas. Tada jį galima (o kartais ir tikslinga) pakeisti sąvokos aprašymu [15, 52 p.].

Kitame didaktikos tekste matematikos sąvoka siejama ne su daiktais ir reiškiniais, bet su jų esminėmis savybėmis.

Kaip logikos objektas, sąvoka yra mąstymo forma, išreiškianti esminius ir bendruosius objektų požymius [2, 24 p.]. Matematinės sąvokos yra realaus pasaulio esminių savybių, formų ir kiekybinių santykių atspindys žmogaus sąmonėje [2, 61 p.].

Savo ruožtu, toks sąvokos apibrėžimas reikalauja tam tikro griežtumo.

Kadangi sąvoka – mąstymo forma, tai būtina tiksliai skirti formalų loginį sąvokos apibrėžimą ir jos formavimą mokinių sąmonėje. [...] Kai kurie mokytojai painioja aiškinančiuosius aprašymus ir loginius apibrėžimus, pirmuosius laikydami pastaraisiais. Aiškinantieji aprašymai nėra matematiniai teiginiai, jie nenaudojami kaip argumentai įrodymuose, kaip tikrieji

loginiai apibrėžimai. Todėl nereikia versti mokinių išmokti tuos aprašymus, pakanka, kad jie mokėtų atpasakoti savais žodžiais. O apibrėžimus mokiniai turi mokėti formuluoti tiksliai [2].

Šiuose didaktikos tekstuose suteikiamos skirtingos prasmės ir kitiems bendriems matematikos terminams. Žmonėms, naudojantiems skirtingas terminų sampratą, ta pati matematinio ugdymo programa suprantama skirtingai.

Matematikos mokymosi sunkumai ir išskirtinumas glūdi matematiniam mąstyme. Jis iš esmės skiriasi nuo natūraliai ir be didelių pastangų besivystančio vaiko mąstymo apie realaus pasaulio daiktus ir reiškinius. Daiktų ir reiškinių esmines savybes apibūdinančias sąvokas dažnai įmanoma suvokti ir mąstyti intuityviai, pasitelkiant pojūčius. Tuo tarpu mokyklinės matematikos sąvokos yra abstrakčios ir vienareikšmės. Jos tik labai apytikriai paaiškinamos realaus pasaulio daiktais ar reiškiniais. Pavyzdžiui, dešimtinių trupmenų aiškinimas jų naudojimu realiame pasaulyje nėra pakankamas jų esminių savybių supratimui.

Savo ruožtu, matematinio mąstymo ypatumai yra susiję su matematikos prigimtimi. Apie paradoksalią matematikos žinių pobūdį rašė daug matematikų. Pavyzdžiui, pagal R. Duval [6], matematikos žinios iš esmės skiriasi nuo gamtos mokslų žinių. Skiriasi jos žmogaus galimybėmis pažinti objektus. Mes neturime tokių matematikos objektų išvalgos būdų, net pačių paprasčiausių objektų atveju, kokiais naudojamės suvokdami realaus pasaulio daiktus ar reiškinius. Nei mikroskopas, nei teleskopas nėra tinkamos matematikos objektų pažinimo priemonės. Matematiniai objektai neturėtų būti painiojami nei su jų simbolinėmis ir kalbinėmis reprezentacijomis, nei su matematinėmis modeliais pagalba pažįstamais realaus pasaulio objektais. Viską komplikuoja dar ir tai, kad intuityviai suvokiami matematikos objektai yra susieti žmogaus protui nenatūraliais loginiais ryšiais, trukdančiais aptikti objektų savybes ir jas įrodyti.

Pagal šią matematikos sampratą, labai apytikriai kalbant, matematikos sąvoka yra idėja suteikianti prasmę, pavyzdžiui, lygybei, problemai, formulei matematikoje. Skirtingai nuo matematikos fakto, kurį reikia atsiminti, matematikos sąvoka paaiškina kodėl kažkas matematikoje vyksta ar suprantama tam tikru būdu. Mokyklinės matematikos kontekste tikslesniam sąvokos apibūdinimui reikalingas sąvokos supratimo būdas. Pavyzdžiui, M.A. Simon [16] siūlo tokį mokyklinės matematikos sąvokos apibūdinimą.

Matematinė sąvoka yra konkretaus matematinio sąryšio matematinio (loginio) būtinumo žinojimas.

Greta apibrėžimo rekomenduojama tam tikra nuosekli veikla padedant palaiptai artėti prie sąvokos supratimo. Kitokio pobūdžio matematikos sąvokos sampratą, vadinamą sąvokiniu lauku, daugelyje straipsnių aiškina G. Vergnaud [18].

Dėl matematikos abstrakčios prigimties jos mokymasis turėtų būti grindžiamas visišku dalyko aiškumu. Tai pasiekama matematinio samprotavimu.

2 Matematinis samprotavimas

Pagal D.L. Bass ir H. Ball [3, 29 p.], subjektyvus prasmės pajautimas nereikia matematinį pagrįstumą. Prasmės pajautimas yra matematinės idėjos suvokimas, reiškiantis asmeniniu įsitikinimu grįstą supratimą. D.L. Bass ir H. Ball *samprotavimu*

vadina dalykui būdingų praktikų ir normų rinkinį. Jis turi koletyviškumo aspektą skirtingą nuo subjektyvaus pajautimo. Toks samprotavimas sukuria matematinį pagrįstumą. Individualus idėjos prasmės pajautimas nėra tas pat, kas samprotavimu įgytas supratimas suvokiamas visiems su kuriais idėja yra kritiškai aptariama.

Įvairioms žmogaus veiklos sritims būdingas disciplinuotas samprotavimas skatina pažinti ir įgalina suprasti. Toks samprotavimas iš esmės yra kritinis mąstymas ta prasme, kurią jam suteikia neurodidaktika (D.T. Willingham, [19]).

Jūs mąstote kritiškai, jei (1) jūsų mąstymas originalus, t.y. nekartojate iš atminties tai, kas buvo nuspręsta anksčiau panašiose situacijose, (2) jūs mąstote savarankiškai, t.y. nevykdote kieno nors kito pasiūlytus nurodymus ir (3) jūsų mąstymas veiksmingas, t.y. jūs laikotės tam tikrų pripažintų susitarimų, kurie paprastai mąstymą daro efektyviu.

Galima kalbėti apie kritinio mąstymo ugdymą konkrečiam dalykui būdingu samprotavimu. Šiame darbe mus domina matematinis samprotavimas

Bass ir Ball skiria du matematinio samprotavimo būdus. Vienas jų tarnauja dėsningumą paieškai ir hipotezių kėlimui, vadinamas tyrinėjančiu samprotavimu (angl. *reasoning of inquiry*). Matematikai panašų dalyką vadina euristiniu samprotavimu. Kitas samprotavimo būdas tarnauja hipotezių įrodymui; jis vadinamas pagrindžiančiu samprotavimu (angl. *reasoning of justification*). Abu samprotavimo būdai papildo vienas kitą. Praktiniai samprotavimų pavyzdžiai darbui su mokiniais aprašyti knygoje [17] skirtoje pradiniam ugdymui, bei knygoje [1] skirtoje pagrindiniam ir viduriniam ugdymui.

Matematinį samprotavimą, kaip dalykui būdingų praktikų ir normų rinkinį, galima patikslinti. Sekdami H.-H. Wu [20] sakome, kad *mokyklinė matematika grindžiama matematiniu samprotavimu*, jei

1. kiekviena sąvoka yra apibrėžiama;
2. kiekvienas teiginys yra nedviprasmiškas ir formuluojamas taip, kad būtų aišku, kas yra žinoma ir kas nėra žinoma;
3. kiekvienas teiginys yra pagrindžiamas logiškai taisyklingu samprotavimu;
4. kiekviena nauja sąvoka formuojama turimų žinių pagrindu ir yra naujų žinių struktūros dalis;
5. matematikos žinios turi tikslą ir sprendžia kurią nors problemą.

Trupmenų sąvokos apibrėžimo problemos mūsų mokyklinėje matematikoje ir jų sprendimo galimybės svarstytos 2013 metų gairėse [4].

3 Raštingumas ar kompetentingumas?

Paskutinėje mūsų atnaujintos pradinio ir pagrindinio matematinio ugdymo programos redakcijoje turime tokią matematinio ugdymo tikslo sampratą [11].

Tikslas – sudaryti prielaidas ugdytis matematinį raštingumą, kuris šiame dokumente suprantamas kaip įgytas gebėjimas matematiškai samprotauti, taikyti ir interpretuoti matematiką sprendžiant problemas įvairiuose realiuose, aktualiuose ir mokiniams suprantamuose kontekstuose.

Pridursiu, kad matematinis raštingumas panašiai suprantamas ir EBPO organizuojamame tarptautiniame mokinių pasiekimų tyrime PISA 2021 [14, 23 skirsnis].

Ką žinome apie matematinį raštingumą (angl. *mathematical literacy*)? Edukologinėje literatūroje rašoma [5, p. 183]: „Matematika yra apibendrinanti, abstrakti, nepriklausoma nuo konteksto ir nuo visuomenės, apolitinė, tiksli, nuspėjama. Matematinis raštingumas – atvirkščiai: konkretus, realaus konteksto, priklausantis nuo visuomenės, politinis, aproksimuojantis, nenuspėjamas“. Konkretumo matematinio raštingumo sampratai suteikė E. Jablonka [8] analizė (taip pat žiūrėti [9]). Jos teigimu tenka pripažinti, kad matematinis raštingumas negali būti apibrėžtas matematikos žinių terminais. Faktiškai matematinis raštingumas apibūdina matematikos žinių paskirtį. Ši sąvoka yra apie individo pasirengimą naudoti matematikos žinias praktinėje veikloje už matematikos ribų. Skirtingose šalyse požiūriai į matematinį raštingumą priklauso nuo švietimo tikslų. E. Jablonka klasifikavo šiuos požiūrius į penkias kategorijas.

Kartais matematinio raštingumo mokoma greta matematikos. Pavyzdžiui, Pietų Afrikos mokyklose 2006 metais matematinis raštingumas įvestas kaip atskiras dalykas ir alternatyva matematikai, kurio mokomasi 10–12 klasėse. Matematinio raštingumo dalyko turinį sudaro matematikos taikymai realiame gyvenime siekiant išugdyti besimokančiojo pasitikėjimą savimi, skaičių jausmą, erdvinį mąstymą, gebėjimą interpretuoti ir kritiškai vertinti kasdienes situacijas, bei spręsti problemas. Šis dalykas rekomenduojamas mokiniams turintiems silpną matematikos mokymosi patirtį, kompetenciją ir pasitikėjimą.

Panašiai yra mūsų matematinio ugdymo programoje, kuri buvo atnaujinta 2008 metais. Būtent, bazinių žinių ir matematinio raštingumo siekta tik vidurinio ugdymo bendrajame kurse. Tuo tarpu išplėstinis kursas skirtas mokinių žinių ir suvokimo bei gebėjimų gilinimui. 2008 metų pradinio ir pagrindinio matematinio ugdymo programa deklaravo supaprastintą kai kurių matematikos kompetencijų danų prasme variantą. Matematikos vadovėlių analizė [13] rodo, kad dabartinis mokyklinės matematikos turinys orientuojamas į bazines žinias ir į matematinį raštingumą nesirūpinant aukštesnės eilės mąstymo gebėjimų ugdymu. Turint galvoje programoje naudojamų bendrų matematikos terminų supratimą, dabartinį programos atnaujinimą reikėtų vertinti kaip šio siekinio įteisinimą.

Pasikeitus dabartiniam ideologiniam balansui švietimo sistemoje gali atsirasti poreikis keisti matematikos mokymo tikslus. Pavyzdžiui, matematikos mokymo tikslu galėtų būti matematinio kompetentingumo ugdymas. Pastarasis terminas čia naudojamas danų kompetencijų projekto prasme [12].

Matematinis kompetentingumas yra individo įžvalgus pasirengimas atitinkamai veikti atsiliepiant į su esama situacija susijusius įvairiausius matematinius iššūkius.

Matematinį kompetentingumą sudaro aštuonios sudedamosios dalys, vadinamos matematinėmis kompetencijomis. Jomis siekiama atskleisti matematikos epistemines žinias, t.y. žinias apie dalyką, supratimą, kaip mąsto ir dirba matematikai, matematinės veiklos ir procesų aprašą. Būtent, sekančios aštuonios matematinės kompetencijos įveiklina mokyklinės matematikos žinias [12]:

1. Matematinio mąstymo kompetencija – įsitraukimas į matematinį tyrimą:

2. Matematinų uždavinių nagrinėjimo kompetencija – matematinių uždavinių sudarymas ir sprendimas;
3. Matematinio modeliavimo kompetencija – nematematinio konteksto ir situacijų modelių analizė ir konstravimas;
4. Matematinio samprotavimo kompetencija – matematinio teiginio pagrindimo vertinimas ir konstravimas;
5. Matematinės reprezentacijos kompetencija – nagrinėja skirtingas matematinio objekto reprezentacijas;
6. Matematinio simbolizmo ir formalizmo kompetencija – matematinių simbolių ir formalizmo naudojimas;
7. Matematinio komunikavimo kompetencija – komunikavimas matematikos viduje, su ja ir apie ją;
8. Matematinų priemonių ir įrankių kompetencija – materialų priemonių ir įrankių naudojimas matematinei veiklai.

Matematinis kompetentingumas, kaip matematikos mokymo tikslas yra suderinamas su ideologija, kurioje grynoji matematika yra esmine kultūros dalimi. Šis tikslas taip pat suderinamas su ideologine nuostata „matematika visiems“, kai mokyklinė matematika grindžiama matematinio samprotavimu. Naudojant [7] ideologijų klasifikaciją, pirmoji nuostata priklauso „seniesiems humanistams“ [7, 176 p.], o antroji nuostata priklauso „visuomenės švietėjams“ [7, 207 p.].

4 Išvados

Pirma, mokyklinės matematikos programa rengiama neatsižvelgiant į tai, kad matematikos mokymo tikslo ir mokymo turinio pasirinkimas priklauso nuo programą rengiančių žmonių ideologijos, pasaulėžiūros ir vertybių.

Antra, skirtingi mokyklinės matematikos didaktikos tekstai baziniams terminams suteikia skirtingas prasmes ir šiuos skirtumus ignoruoja.

Trečia, gilus matematikos mokymas visiems įmanomas skatinant mokyklinę matematiką grindžiama matematinio samprotavimu. Toks mokymas sudarytų mokiniams vienodas galimybes mokytis nepriklausomai nuo jų socialinės ekonominės ir kultūrinės aplinkos.

Literatūra

- [1] F. Arbaugh et al. *We Reason and We Prove for All Mathematics. Building Students Critical Thinking, Grades 6-12*. Corwin Mathematics, 2019.
- [2] A. Ažubalis. *Logika ir mokyklinė matematika*. Vilnius, 2008.
- [3] D.L. Ball, H. Bass. Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick et al.(Ed.), *A Research Companion to Principals and Standards for School Mathematics*, pp. 27–44. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2005.
- [4] Darbo grupė. *Matematinio ugdymo bendrojo ugdymo mokykloje gairės*. Vilnius, 2013.
- [5] J. Dudaitė. Matematinio raštingumo samprata. *Acta Paedagogica Vilnensia*, **18**:170–187, 2007.

- [6] R. Duval. Basic issues for research in mathematics education. In *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)(24th, Hiroshima, Japan, July 23–27, 2000)*, Vol. 1, 2000.
- [7] P. Ernest. *The Philosophy of Mathematics Education*. Routledge, 1991.
- [8] E. Jablonka. Mathematical literacy. In A.J. Bishop et al.(Ed.), *Second International Handbook of Mathematics Education*, pp. 75–102. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [9] E. Jablonka, M. Niss. Mathematical literacy. In S. Lerman et al.(Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, pp. 391–396. Dordrecht: Springer, 2014.
- [10] LR ŠMS Ministras. *Įsakymas dėl bendrujų programų atnaujinimo gairių patvirtinimo*. 2019-11-18, Nr. V-1317.
- [11] E. Mazėtis, V. Sičiūnienė, A. Apynis, D. Gudelienė, R. Rimšalienė. *Pradinio ir pagrin-
dinio ugdymo matematikos bendrosios programos projektas*. 2020-12-14.
- [12] M.A. Niss, T. Højgaard. Mathematical competencies revisited. *Educ. Stud. Math.*, **102(1)**:9–28, 2019.
- [13] R. Norvaiša. Why do we teach the mathematics that we do? The case of Lithuanian school mathematics. *Liet. matem. rink. Proc. LMS Ser. A*, **60**:21–26, 2019.
- [14] OECD Governing Board. *PISA 2021 Mathematics Framework (first draft)*. Stockholm, Sweden. 23–25 April 2018.
- [15] V. Sičiūnienė. *Matematikos didaktika*. VPU leidykla, 2010.
- [16] M.A. Simon. Explicating mathematical concept and mathematical conception as theoretical constructs. *Educ. Stud. Math.*, **94(2)**:117–137, 2017.
- [17] A.J. Stylianides. *Proving in the Elementary Mathematics Classroom*. Oxford University Press, 2016.
- [18] G. Vergnaud. The theory of conceptual fields. *Hum. Develop.*, **52**:83–94, 2009.
- [19] D.T. Willingham. *How to Teach Critical Thinking*. NSW Department of Education, Australia, 2019.
- [20] H.-H. Wu. The content knowledge mathematics teachers need. In Y.Li et al.(Ed.), *Mathematics Matters in Education, Advances in STEAM Education*, pp. 43–92. Springer International Publishing AG, 2018.

SUMMARY

The aims of teaching mathematics: mathematical literacy vs mathematical reasoning

R. Norvaiša

We discuss different alternatives of the content of school mathematics. According to the prevalent public opinion in Lithuania school mathematics can be oriented either to the academic mathematics or to the applications of mathematics. In reality the second alternative means lowering of the level of teaching in the hope that school mathematics will be accessible to all students. While the content oriented to the academic school mathematics is accessible only to gifted students. In this article we describe a middle alternative content which we call school mathematics based on mathematical reasoning. We argue that such school mathematics serves all students and makes acquaintance with mathematical reasoning and with applications of mathematics to the real world. Reasoning makes mathematics reasonable for all.

Keywords: mathematical literacy; mathematical reasoning; mathematical competence; philosophy of mathematics education