Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, serija B
61 tomas, 2020, 21–28
https://doi.org/10.15388/LMR.2020.22717

Algebrinės sinusų ir kosinusų bei jų argumentų reikšmės

Edmundas Mazėtis[a], **Grigorii Melnichenko**[b]

[a] *Vilniaus universitetas, Matematikos institutas*
Naugarduko 4, LT-03225 Vilnius
[b] *Vytauto Didžiojo universitetas, Švietimo akademija*
K. Donelaičio g. 58, LT-44248 Kaunas
E. paštas: edmundas.mazetis@mif.vu.lt; gmelnicenko@gmail.com

Įteiktas December 30, 2020; publikuotas 2021 kovo 15

Santrauka. Straipsnis supažindina skaitytoją su keletu nuostabių trigonometrinių funkcijų savybių. Pasirodo, jei funkcijų $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ir $\operatorname{ctg} x$ argumentų reikšmės, išreikštos radianais, yra algebriniai skaičiai, tai šių funkcijų reikšmės yra transcendentiniai skaičiai. Iš čia išplaukia, kad pseudo Herono trikampių visų kampų didumai (atskiru atveju Pitagoro ir Herono trikampių visų kampų didumai), išreikšti radianais, yra transcendentiniai skaičiai. Jei sinusų ir kosinusų argumentai, išreikšti radianais, yra lygūs $x = r \cdot 2\pi$, čia r – racionalieji skaičiai, tai šių funkcijų reikšmės yra algebriniai skaičiai. Pažymėtina, kad šiuo atveju argumentas $x = r \cdot 2\pi$ yra transcendentinis, o išreikštas laipsniais jis tampa racionaliuoju skaičiumi.

Raktiniai žodžiai: trigonometrinės funkcijos $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ir $\operatorname{ctg}\alpha$; racionalieji skaičiai; algebriniai skaičiai; transcendentiniai skaičiai; Lindemann–Weierstrass teorema

AMS: 97F50, 97F60, 97C70

1 Įvadas

Iš mokyklinės matematikos žinoma, kad funkcijos $\sin x$ arba $\cos x$ visų pirma pasireiškia nustatant stačiųjų trikampių kampų ir kraštinių ryšius. Taip pat mokykliniame kurse nagrinėjami statieji Pitagoro trikampiai (pvz., egiptietiškasis statusis trikampis su kraštinėmis $3, 4, 5$), kurių kraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai, jų kampų sinusų ir kosinusų reikšmės yra racionalieji skaičiai, bet kampų didumai, išreikšti laipsniais, nėra racionalieji skaičiai, o išreikšti radianais jie yra transcendentiniai skaičiai [3]. Pasirodo, kad tokiomis savybėmis pasižymi ir Herono trikampiai.

Autoriai [5] darbe apibrėžė pseudo Herono trikampius, kurių visų kraštinių ilgių kvadratai yra sveikieji skaičiai, o dviguba ploto reikšmė yra sveikasis skaičius. Tokie trikampiai mokyklinėje geometrijoje sutinkami gana dažnai, pvz., trikampis, kurį sudaro trys Herono trikampio pusiaukraštinės. Be to, [5] darbe įrodyta, kad kiekvienas trikampis, kurio viršūnių koordinatės yra sveikųjų skaičių poros, yra pseudo Herono trikampis. Šiame darbe yra įrodoma, kad pseudo Herono trikampių kampų didumai, išreikšti radianais, yra transcendentiniai skaičiai.

Straipsnyje nagrinėjami klausimai iš esmės remiasi elementariosios matematikos metodais, iškyrus Lindemano-Vejerštraso (Lindemann–Weierstrass) teoremą. Autorių nuomone, tokie tyrinėjimai gali būti gera medžiaga įvairiems projektiniams darbams su matematikai gabiais vyresniųjų klasių moksleiviais, studentais ir magistrantais.

2 Algebriniai funkcijų $\sin\alpha$ ar $\cos\alpha$ argumentai

Kaip žinia, istoriškai matematikoje pirmiausia realieji skaičiai skirstomi į racionaliuosius ir iracionaliuosius.

1 apibrėžimas. Realusis skaičius yra vadinamas iracionaliuoju, jei jis nėra racionalusis, t. y. jis neišreiškiamas sveikųjų skaičių santykiu.

Matematikos istorijoje buvo nagrinėjami tik racionalieji skaičiai ir jų apibendrinimai – algebriniai skaičiai [2, 259 p.].

2 apibrėžimas. Kompleksinis skaičius α vadinamas algebriniu skaičiumi, jei α yra kurio nors daugianario su sveikaisiais koeficientais šaknis.

Visų algebrinių skaičių aibė sudėties ir daugybos atžvilgiu yra kūnas [2, 262 psl.], t. y. sudedant, atimant, dauginant, dalijant du algebrinius skaičius, irgi gaunami algebriniai skaičiai. Bet didžioji dalis realiųjų skaičių, pasižyminčių įdomiomis savybėmis, nėra algebriniai, ir jie vadinami transcendentiniais skaičiais.

3 apibrėžimas. Skaičius α vadinamas transcendentiniu skaičiumi, jei nėra jokio daugianario su sveikaisiais koeficientais, kurio šaknis yra skaičius α.

Aibių teorijos požiūriu transcendentinių skaičių yra gerokai daugiau, negu algebrinių skaičių, nes transcendentinių skaičių aibė yra kontinuumo galios, o algebrinių skaičių aibė yra skaičioji [2, 270 psl.].

Bet kuris transcendentinis skaičius yra iracionalusis, bet atvirkščiai, jei skaičius yra iracionalusis, jis nebūtinai yra transcendentinis. Pvz., iracionalusis skaičius $\sqrt{3}$ – algebrinis, nes jis yra daugianario su sveikaisiais koeficientais $x^2 - 3$ šaknis.

Funkcijos, kuriomis visų algebrinių skaičių aibė atvaizduojama į transcendentinių skaičių aibę, yra trigonometrinės funkcijos $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ir $\operatorname{ctg}\alpha$. Šio teiginio įrodymas seka iš Lindemano–Vejerštraso teoremos [2, 276 p.], [6, 117 p.].

1 teorema. *(Lindemann–Weierstrass) Sakykime, kad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – skirtingi algebriniai skaičiai, o $c_1, c_2, \dots, c_n$ – algebriniai skaičiai, iš kurių ne visi lygūs nuliui. Tuomet*

$$c_1 e^{\alpha_1} + c_2 e^{\alpha_2} + \dots + c_n e^{\alpha_n} \neq 0.$$

Šios teoremos išvados yra teiginiai, kad skaičiai e ir π – transcendentiniai ir Lindermano teorema, kad skaičius e^α – transcendentinis, jei α – algebrinis skaičius.

2 teorema. *Jei funkcijų* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ *ir* $\operatorname{ctg}\alpha$ *argumentai, išreikšti radianais, yra algebriniai skaičiai, tai šių funkcijų reikšmės yra transcendentiniai skaičiai.*

Įrodymas. Iš Muavro formulės $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$ išplaukia, kad $2i\sin\alpha e^0 + (-1)e^{i\alpha} + e^{i\alpha} = 0$. Tarę, kad $\sin\alpha$ yra algebrinis skaičius, iš 1 teoremos gauname prieštaravimą. Iš Muavro formulės $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ analogiškai išplaukia, kad teorema teisinga ir $\cos\alpha$ reikšmei. Kadangi $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})}$, tai $i\operatorname{tg}\alpha e^{i\alpha} + i\operatorname{tg}\alpha e^{-i\alpha} + (-1)e^{i\alpha} + e^{i\alpha} = 0$. Tuomet teiginys, kad $\operatorname{tg}\alpha$ yra algebrinis, prieštarauja 1 teoremai. Analogiškai teorema įrodoma ir dėl $\operatorname{ctg}\alpha$. $\square$

3 teorema. *Jei skaičius α yra racionalusis, o skaičius r yra transcendentinis, tai skaičius αr yra transcendentinis.*

Įrodymas. Tarkime, kad skaičius αr yra algebrinis. Sakykime, kad $\alpha = \frac{m}{n}$, čia $m, n \in \mathbb{Z}$. Tuomet egzistuoja daugianaris su sveikaisiais koeficientais, kurio šaknis yra $\alpha r = \frac{m}{n} r$, t. y. teisinga lygybė:

$$a_k\left(\frac{m}{n}r\right)^k + a_{k-1}\left(\frac{m}{n}r\right)^{k-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

iš kurios išplaukia lygybė

$$m^k a_k r^k + m^{k-1} n a_{k-1} r^{k-1} + \cdots + n^k a_0 = 0,$$

reiškianti, kad skaičius r yra daugianario su sveikaisiais koeficientais šaknis, taigi r yra algebrinis skaičius. Gavome prieštarą tam, kad skaičius r yra transcendentinis. $\square$

3 Algebrinės funkcijų $\sin\alpha$ ar $\cos\alpha$ reikšmės

Sakykime, kad $\alpha = \frac{m}{n}\cdot 2\pi$, čia $m, n \in \mathbb{Z}$. Nagrinėjame klausimus:

1) Su kuriomis α reikšmėmis $\sin x$ ir $\cos x$ yra racionalieji skaičiai?
2) Su kuriomis α reikšmėmis $\sin x$ ir $\cos x$ yra algebriniai skaičiai?

Šie klausimai seniai domina matematikus ir turi ilgą istoriją [1]. Jie yra ekvivalentūs, kai trigonometrinių funkcijų argumentai, išreikšti laipsniais, yra racionalieji skaičiai. Iš tikrųjų turime $\alpha = \frac{m}{n}\cdot 2\pi = \frac{360\cdot m}{n}\cdot\frac{\pi}{180} = \left(\frac{360\cdot m}{n}\right)^\circ$, kai kampo laipsninis matas $\alpha^\circ = \frac{360\cdot m}{n}$ yra racionalusis.

Gerai žinoma, kad $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ yra sinuso ir kosinuso specialios reikšmės, kurių kampų laipsniniai matai yra racionalieji skaičiai. Pasirodo, kad tai yra vieninteliai racionalieji skaičiai, pasižymintys šia savybe. [1] darbe pateiktos nuorodos į įvairius šio teiginio įrodymus. Mes šį teiginį įrodysime [7], o taip pat ir [4] darbuose pateiktu metodu. Pradėsime nuo lemos, kurios įrodymas remiasi kosinusų sumos formule.

1 lema. *Su bet kuriuo natūraliuoju k $2\cos k\alpha$ yra k-ojo laipsnio daugianaris su sveikaisiais koeficientais atžvilgiu $2\cos\alpha$:*

$$2\cos k\alpha = (2\cos\alpha)^k + a_{k-1}(2\cos\alpha)^{k-1} + a_{k-2}(2\cos\alpha)^{k-2} + \cdots + a_0. \tag{1}$$

Įrodymas. Kai $k=1$, tai $2\cos 1\alpha = 2\cos\alpha$, o kai $k=2$, tai $2\cos 2\alpha = (2\cos\alpha)^2 - 2 = (2\cos\alpha)(2\cos\alpha) - 2$. Sakykime, kad $\beta = (k+2)\alpha$, o $\gamma = k\alpha$, tuomet $\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{(k+2)\alpha+k\alpha}{2} = (k+1)\alpha$, o $\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{(k+2)\alpha-k\alpha}{2} = \alpha$. Tuomet kosinusų sumos formulė

$$\cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

kai $\frac{\beta+\gamma}{2} = (k+1)\alpha$, o $\frac{\beta-\gamma}{2} = \alpha$, tampa tokia

$$2\cos{(k+2)\alpha} = (2\cos\alpha)(2\cos{(k+1)\alpha}) - 2\cos k\alpha.$$

Iš čia išplaukia, kad pagal matematinės indukcijos principą lemos tvirtinimo teisingumas įrodytas. $\square$

2 lema. *Jei daugianario su sveikaisiais koeficientais vyriausias narys lygus* 1*, tai to daugianario racionaliosios šaknys yra sveikieji skaičiai.*

Įrodymas. Sakykime, kad racionalusis skaičius $x_0 = \frac{p}{q}$, čia p ir q – tarpusavyje pirminiai sveikieji skaičiai, yra daugianario su sveikaisiais koeficientais

$$x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

racionalioji šaknis. Tuomet

$$\frac{p^k}{q^k} + a_{k-1}\frac{p^{k-1}}{q^{k-1}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Padauginę abi šios lygybės puses iš q^{k-1}, gauname, kad

$$\frac{p^k}{q} + a_{k-1}p^{k-1} + \cdots + a_1pq^{k-1} + a_0q^{k-1} = 0.$$

Kadangi kairiojoje lygybės pusėje visi dėmenys, pradedant antruoju, yra sveikieji skaičiai, tai skaičius $\frac{p^k}{q}$ irgi yra sveikasis. Kadangi skaičiai p ir q yra tarpusavyje pirminiai, tai $q = \pm 1$, taigi x_0 – sveikasis skaičius. $\square$

4 teorema. *Sakykime, kad* $\alpha = \frac{m}{n}$*, čia* $m, n \in \mathbb{Z}$*. Skaičiai* $\cos\alpha$ *ir* $\sin\alpha$ *yra racionalieji tik tada, kai*

$$\cos\alpha \in \Big\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\Big\}, \sin\alpha \in \Big\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\Big\}.$$

Visais kitais atvejais skaičiai $\cos\alpha$ *ir* $\sin\alpha$ *yra iracionalieji skaičiai.*

Įrodymas. Nemažindami bendrumo tarkime, kad $m > 0$. (1) lygybėje įrašę $\alpha = \frac{m}{n}\cdot 2\pi$ ir pažymėję $2\cos\big(\frac{m}{n}\cdot 2\pi\big) = x$ gauname, kad

$$2\cos m\cdot 2\pi = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \cdots + a_0.$$

Atsižvelgę į tai, kad $2\cos\big(m\cdot 2\pi\big) = 2$ turime

$$x^k + a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \cdots + a_0 - 2 = 0. \tag{2}$$

Iš 2 lemos išplaukia, kad (2) daugianario racionalioji šaknis yra sveikasis skaičius, taigi skaičius $x = 2\cos\left(\frac{m}{n} \cdot 2\pi\right)$ yra sveikasis. Akivaizdu, kad sveikoji (2) lygties šaknis nelygi nuliui. Kadangi $-1 \le \cos\frac{m}{n} \cdot 2\pi \le 1$, tai skaičius $2\cos(\frac{m}{n} \cdot 2\pi)2\cos\alpha$, kuris yra (2) lygties sveikoji šaknis, įgyja tik reikšmes $\pm 1, \pm 2$.

Taigi įrodėme, kad skaičiai $\cos\left(\frac{m}{n} \cdot 2\pi\right)$ su visais $m, n \in \mathbb{Z}$ yra iracionalieji skaičiai išskyrus atvejus, kai šie skaičiai yra lygūs $0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}$. Taikydami lygybę $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ gauname, kad $\sin\alpha \in \left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\right\}$, t. y. kai $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 2\pi$, čia $m, n \in \mathbb{Z}$. Taigi įrodėme, kad skaičiai $\cos\left(\frac{m}{n} \cdot 2\pi\right)$ ir $\sin\left(\frac{m}{n} \cdot 2\pi\right)$ su visais $m, n \in \mathbb{Z}$ yra iracionalieji išskyrus tuos atvejus, kai jie lygūs $0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}$. Teorema įrodyta. □

Tačiau iracionalieji skaičiai gali būti ir algebriniai, ir transcendentiniai. Pasirodo, kad skaičiai $\cos\left(\frac{m}{n} \cdot 2\pi\right)$ ir $\sin(\frac{m}{n} \cdot 2\pi)$ yra algebriniai skaičiai su visais $m, n \in \mathbb{Z}$.

5 teorema. *Jei $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 2\pi$, čia $m, n \in \mathbb{Z}$, tai skaičiai $\cos\alpha$ yra algebriniai.*

Įrodymas. Nemažindami bendrumo tarkime, kad $m > 0$. Kadangi $\cos n\alpha = \cos m \cdot 2\pi = 1$, tai iš 1 lemos išplaukia, kad

$$2 = (2\cos\alpha)^k + a_{k-1}(2\cos\alpha)^{k-1} + a_{k-2}(2\cos\alpha)^{k-2} + \cdots + a_0,$$

t. y.

$$P_k(\cos\alpha) = 2^k(\cos\alpha)^k + a_{k-1}2^{k-1}(\cos\alpha)^{k-1} + a_{k-2}2^{k-2}(\cos\alpha)^{k-2} + \cdots + a_0 - 2.$$

Taigi skaičius $\cos\alpha$ yra nenulinio daugianario $P_k(x)$ su sveikaisiais koeficientais šaknis, todėl $\cos\alpha$ – algebrinis skaičius. □

6 teorema. *Jei $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 2\pi$, čia $m, n \in \mathbb{Z}$, tai skaičiai $\sin\alpha$ yra algebriniai.*

Įrodymas. Akivaizdu, kad

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{1}{4} \cdot 2\pi - \frac{m}{n} \cdot 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n - 4m}{4n} \cdot 2\pi\right),$$

be to $(n - 4m), 4n \in \mathbb{Z}$. Tuomet pagal 5 teoremą skaičius $\sin\alpha$ – algebrinis. □

4 Trikampio kampų transcendentinės reikšmės, kampų racionalieji sinusai ir kosinusai

[3] darbe yra suformuluoti rezultatai Pitagoro trikampio smailiesiems kampams. Šiame skyrelyje pateiskime analogiškus rezultatus pseudo Herono trikampiams (tame tarpe Herono trikampiams). Visų pirma pateiksime keletą apibrėžimų.

4 apibrėžimas. Statusis trikampis, kurio kraštinių ilgiai ir plotas yra sveikieji skaičiai, vadinamas Pitagoro trikampiu.

5 apibrėžimas. Trikampis, kurio kraštinių ilgiai ir plotas yra sveikieji skaičiai, vadinamas Herono trikampiu.

Apibrėšime pseudo Herono trikampių sąvoką, kurios atskiras atvejis yra Herono trikampiai.

6 apibrėžimas. Trikampis, kurio kraštinių ilgių kvadratai yra sveikieji skaičiai, o dviguba ploto reikšmė – irgi sveikasis skaičius, vadinamas pseudo Herono trikampiu.

Iš mokyklinės geometrijos žinomi trikampiai, kurių kampai $30° - 60° - 90°$, $60° - 60° - 60°$ ir $30° - 30° - 120°$, kurių kampų kosinusų arba sinusų reikšmės yra racionalieji skaičiai. Nagrinėsime klausimą ar yra pseudo Herono trikampių, kurių kampų sinuso ar kosinuso reikšmės yra racionalieji skaičiai.

7 teorema. *Neegzistuoja pseudo Herono trikampiai* (*o atskiru atveju ir Herono trikampių, ir Pitagoro trikampių*), *kurių kampų didumai išreikšti laipsniais yra racionalieji skaičiai, dviejų kampų sinusai arba kosinusai yra racionalieji skaičiai, o trečiojo kampo ir sinuso ir kosinuso reikšmės yra racionalieji skaičiai.*

Įrodymas išplaukia iš 4 teoremos. Pastebėkime, kad trikampis, kurio kampai $30° - 60° - 90°$, statinių ilgiai 1 ir $\sqrt{3}$, o įžambinė lygi 2, netenkina 7 teoremos sąlygos, nes jis nėra pseudo Herono trikampis – jo dvigubas plotas nėra racionalusis skaičius.

8 teorema. *Neegzistuoja nė vieno pseudo Herono trikampio* (*o atskiru atveju ir Herono trikampių, ir Pitagoro trikampių*), *kurio kampų laipsniniai matai yra racionalieji skaičiai, o kiekvieno kampo sinuso ar kosinuso reikšmės yra racionalieji skaičiai.*

Įrodymas seka iš 4 teoremos. Nei lygiakraštis trikampis su kampais $60° - 60° - 60°$ ir kraštinės ilgiu lygiu 1, nei lygiašonis trikampis su kampais $30° - 30° - 120°$ ir šoninėmis kraštinėmis lygiomis 1, o trečia kraštine lygia $\sqrt{3}$, netenkina 8 teoremos sąlygų, nes jų dvigubi plotai nėra racionalieji skaičiai.

9 teorema. *Pseudo Herono trikampių* (*o atskiru atveju ir Herono trikampių, ir Pitagoro trikampių*) *kampų laipsniniai matai yra iracionalieji skaičiai.*

Įrodymas išplaukia iš 7 ir 8 teoremų.

10 teorema. *Pitagoro ir Herono trikampių kampų didumai, išreikšti radianais, yra transcendentiniai skaičiai.*

Įrodymas. Visų pirma įrodysime teiginį Pitagoro trikampiams. Pitagoro trikampių sinuso ir kosinuso reikšmės yra racionalieji skaičiai. Jei smailiųjų kampų didumai, išreikšti radianais, būtų algebriniai skaičiai, tai prieštarautų 2 teoremai, teigiančiai, kad tuo atveju tų kampų sinusų ir kosinusų reikšmės yra transcendentiniai skaičiai.

Pastebėkime, kad iš 3 teoremos gauname, kas stačiojo kampo $90° = \frac{\pi}{2}$ dydis radianais – skaičius $\frac{\pi}{2}$ yra transcendentinis, nes jis yra racionaliojo skaičiaus $\frac{1}{2}$ ir transcendentinio skaičiaus π sandauga.

Įrodysime teiginį Herono trikampiui. Sakykime, kad a, b ir c – Herono trikampio kraštinių ilgiai, kurie pagal apibrėžima yra sveikieji skaičiai. Tuomet iš kosinusų teoremos gauname, kad $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Iš čia seka, kad visų trikampio kampų kosinusai yra racionalieji skaičiai. Tarę, kad šių kampų didumai, išreikšti radianais yra algebriniai skaičiai, gauname prieštaravimą 2 teoremai, kuri teigia, kad kosinusų reikšmės tokiu atveju yra transcendentiniai skaičiai. □

11 teorema. *Pseudo Herono trikampio kampų didumai, išreikšti radianais, yra transcendentiniai skaičiai.*

Įrodymas. Sakykime, kad a, b ir c yra pseudo Herono trikampio kraštinių ilgiai, kurių kvadratai pagal apibrėžimą yra sveikieji skaičiai, o S – jo plotas, ir čia $2S$ – sveikasis skaičius. Tuomet teisingos lygybės: $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\sin\alpha = \frac{2S}{bc}$, $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\sin\beta = \frac{2S}{a}$, $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $\sin\gamma = \frac{2S}{ab}$. Iš jų išplaukia, kad visų pseudo Herono trikampio kampų tangentai yra racionalieji skaičiai. Tuomet iš 2 teoremos išplaukia, kad trikampio kampų didumai, išreikšti radianais, yra transcendentiniai skaičiai. $\square$

12 teorema. *Trikampių, kurių viršūnių koordinatės yra sveikųjų skaičių poros, radianais išreikšti kampų didumai yra transcendentiniai skaičiai.*

Įrodymas. Autoriai [5] darbe įrodė, kad trikampis, kurio viršūnės yra sveikaskaitės gardelės taškuose, yra pseudo Herono trikampis. Tuomet pagal 10 teoremą jo kampų didumai, išreikšti radianais, yra transcendentiniai skaičiai.

Iš 10 teoremos gauname, kad Pitagoro trikampio smailiųjų kampų α ir β didumai, išreikšti radianais, yra transcendentiniai skaičiai, be to, pagal 7 teoremą jie neišreiškiami pavidalu $\frac{m}{n}\cdot 2\pi$, čia $m, n \in \mathbb{Z}$. Įdomu būtų nustatyti, kaip Pitagoro trikampio kiekvieno iš smailiųjų kampų α ir β didumai susiję su skaičiumi π. Kol kas šis klausimas yra atviras, viena žinoma tik kad $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

10 teoremos įrodymai naudojama Lindemano–Vejerštraso 1 teoremą, kurios įrodymas yra netrivialus. Įdomu būtų rasti paprastesnį 10 teoremos įrodymą.

Baigiant pažymėsime, kad reikalaudami, jog trikampiai pasižymtų tam tikra prasme geromis savybėmis (pvz., kad visų trikampio kraštinių ilgiai būtų sveikieji skaičiai kaip Pitagoro ar Herono trikampiai), gauname kampus, kurių didumai išreikšti radianais, yra transcendentiniai skaičiai. Taigi jau Egipto piramidžių statytojai, kurie stačiojo kampo nustatymui naudojo egiptietiškuosius trikampius su kraštinėmis 3, 4 ir 5, susidurdavo su transcendentiniais jo smailiųjų kampų didumais. Stačiojo kampo dydį, išreiškiamą transcendentiniu skaičiumi $\frac{\pi}{2}$ žmonija apeidavo įvesdama laipsninų matą $\frac{\pi}{2} = 90°$. $\square$

Literatūra

[1] A. Berger. On linear independence of trigonometric numbers. *Carpathian J. Math.*, **34**:157–166, 2018.

[2] A.A. Buhshtab. *Teoriya chisel.* Prosveshchenie, Moscow, 1966 (in Russian).

[3] J.S. Calcut. Grade school triangles. *Amer. Math. Monthly*, **117**:673–685, 2010.

[4] J. Mačys. Kodėl cos 180°/17 iracionalus? *Alfa plius omega*, **2**:62–64, 2002.

[5] E. Mazetis, G. Melničenko. Trikampio kampų kotangentų racionaliosios reikšmės. *Liet. matem. rink., LMD darbai, ser. B.*, **54**:151–154, 2013.

[6] I. Niven. *Irrational Numbers, The Carus Mathematical Monographs 11.* Wiley, New York, 1956.

[7] I. Niven, H.S. Zuckerman, H.L. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers, 5th ed.* JohnWiley and Sons, New York, 1991.

SUMMARY

Algebraic values of sines and cosines and their arguments

E. Mazėtis, G. Melnichenko

The article introduces the reader to some amazing properties of trigonometric functions. It turns out that if the values of the arguments of the functions $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ and $\operatorname{ctg} x$, expressed in radians, are algebraic numbers, then the values of these functions are transcendental numbers. Hence, it follows that the values of all angles of the pseudo-Heronian triangle, including the values of all angles of the Pythagoras or Heron triangle, expressed in radians, are transcendental numbers. If the arguments of functions $\sin x$ and $\cos x$, expressed in radians, are equal to $x = r \cdot 2\pi$, where r are rational numbers, then the values of the functions are algebraic numbers. It should be noted that in this case the argument $x = r \cdot 2\pi$ is transcendental and, if expressed in degrees, becomes a rational.

Keywords: trigonometric functions $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ir $\operatorname{ctg} \alpha$; rational numbers; algebraic numbers; transcendental numbers; Lindemann–Weierstrass theorem