ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
INFORMATIKOS, MATEMATIKOS IR E. STUDIJŲ INSTITUTAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Diana Gedminaitė

Lercho dzeta funkcijos reikšmių pasiskirstymas

Magistro darbas

Darbo vadovė
Prof. dr. R. Macaitienė

Šiauliai, 2015

Turinys

ĮVADAS

Lercho (Lerch) dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$, $s = \sigma + it$, su parametrais $\lambda \in \mathbb{R}$ ir $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s},$$

visoje kompleksinėje plokštumoje – analizinio pratęsimo pagalba. Pirmą kartą Lercho dzeta funkcija apibrėžta nepriklausomuose [20] ir [21] darbuose.

Kai $\lambda \in \mathbb{Z}$, funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ tampa Hurvico (Hurwitz) dzeta funkcija

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}, \quad \sigma > 1,$$

kuri yra meromorfinė funkcija, turinti paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu $Res_{s=1}\zeta(s, \alpha) = 1$.

Kai $\lambda \in \mathbb{Z}$ ir $\alpha = 1$, tuomet $L(\lambda, 1, s) = \zeta(s)$, čia $\zeta(s)$ yra Rymano (Riemann) dzeta funkcija, kuri srityje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$.

Kai $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} L\left(\lambda, \frac{1}{2}, s\right) &= 2^s \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^s} = 2^s \left(\zeta(s) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)^s}\right) \\ &= 2^s \big(\zeta(s) - 2^{-s}\zeta(s)\big) = \zeta(s)(2^s - 1). \end{aligned}$$

Tais atvejais, kai $\lambda = \frac{1}{2}$, o $\alpha = 1$,

$$L\left(\frac{1}{2}, 1, s\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^s} = \zeta(s)(1 - 2^{1-s}).$$

Jei $\lambda \notin \mathbb{Z}$, tuomet funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, t.y., ji yra sveikoji funkcija. Šiuo atveju, neapribodami bendrumo, galime laikyti, kad $0 < \lambda < 1$.

Funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$, $0 < \lambda < 1$, su visais s tenkina funkcinę lygtį

$$L(\lambda, \alpha, 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^2}\Bigg(\exp\left\{\frac{\pi i s}{2} - 2\pi i \alpha \lambda\right\} L(-\alpha, \lambda, s)$$

$$+ \quad \exp\left\{-\frac{\pi i s}{2} + 2\pi i \alpha(1-\lambda)\right\} L(\alpha, 1-\lambda, s)\Bigg).$$

Žinomi keli šios lygties įrodymai, žr. [1], [4], [20], [24], [25]. Pirmąjį iš jų pateikė M. Lerchas 1887 metais. T. Apastolo (Apastol) įrodymas remiasi viena transformacijos formule ir skirtumine diferencialine lygtimi, kurią tenkina funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$. F. Oberhetingerio straipsnyje yra taikoma Puasono sumavimo formulė, tuo tarpu M. Mikolo straipsnyje naudojamas Furjė eilučių metodas. B. Berndtas (Berndt) pasiūlė paprastą įrodymą, paremtą kontūriniu integravimu bei Oilerio - Maklioreno sumavimo formulės taikymu.

Kurį laiką po Lercho ir kitų autorių darbų apie funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ funkcinę lygtį ši funkcija buvo pamiršta, tačiau 1987 m. D. Klušas (Klusch) pateikė [14] funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ modulio kvadrato vidurkio asimptotinę formulę

$$\int_0^T |L(\lambda, \alpha, \sigma + it)|^2 dt \sim \begin{cases} T \log T, & \text{jei } \ \sigma = \frac{1}{2}, \\ T\zeta(2\sigma, \alpha), & \text{jei } \ \frac{1}{2} < \sigma < 1, \end{cases}$$

kai $T \to \infty$. Po dvejų metų jis pateikė [15] ir integralo

$$\int_0^\infty |L(\lambda, \alpha, \sigma + it)|^2 e^{-\delta t} dt$$

asimptotinį skleidinį pagal δ. Minėti D. Klušo rezultatai buvo patikslinti R. Garunkščio, A. Laurinčiko ir J. Štaudingo (Steuding) darbe [10], naudojant funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ artutinę funkcinę lygtį. Šie rezultatai paskatino plėsti tikimybinius tyrimus Lercho dzeta funkcijos teorijoje.

Šiuolaikiška ir išsami funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ apžvalga pateikta A. Laurinčiko ir R. Garunkščio monografijoje [17], kurioje daug dėmesio skirta Lercho dzeta funkcijos statistinėms savybėms, pateiktos ribinės teoremos silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme įvairiose erdvėse.

Nors Lercho dzeta funkcija nėra tiek svarbi analizinėje skaičių teorijoje kaip, pavyzdžiui, Rymano dzeta funkcija ar Dirichlė L funkcijos, tačiau, iš kitos pusės, funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ yra klasikinė dzeta funkcija, kuri, išskyrus kai kuriuos jau aptartus specialius atvejus, neturi Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius, todėl yra įdomu palyginti jos savybes su dzeta funkcijų, turinčių Oilerio sandaugą, savybėmis. Be to, funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ priklauso nuo dviejų parametrų λ ir α ir yra įtakojama jų aritmetinės prigimties. Taigi, Lercho dzeta funkcija yra labai įdomus klasikinis matematikos objektas.

Darbe aptarsime Lercho dzeta funkcijos asimptotinį elgesį, kuris dažniausiai nusakomas ribinėmis teoremomis tikimybinių matų silpnojo konvergavimo prasme įvairiuose erdvėse. Tikimybinių metodų taikymo idėja dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo nagrinėjime priklauso H. Borui (Bohr). Jis numatė, kad sudėtingą dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymą galima aprašyti tikimybiniais dėsniais, o kartu su B. Jesenu (Jessen) ir A. Vintneriu (Wintner) pirmieji įrodė tikimybinio pobūdžio ribines teoremas dzeta funkcijoms. Paskutinieji dvidešimt metų yra naujas H. Boro idėjų plėtojimo etapas. D. Džoineris (Joyner) [13], B. Bagčis (Bagchi) [2], K. Macumotas (Matsumoto) [22], [23], J. Štaudingas (Steuding) [26], A. Laurinčikas [16] ir jo mokiniai I. Belovas, V. Garbaliauskienė, R. Garunkštis [17], J. Genys, J. Ignatavičiūtė, R. Kačinskaitė, R. Macaitienė, R. Šleževičienė sukūrė šiuolaikinę dzeta funkcijų tikimybinę teoriją, turinčią svarbių pritaikymų nagrinėjant universalumo klausimus. Tai dar kartą įrodo šios krypties tyrimų įtaką matematikos vystymuisi bei taikymams.

Lercho dzeta funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ su transcendenčiuoju arba racionaliuoju parametru α reikšmių pasiskirstymas išnagrinėtas pakankamai plačiai [9], [17], [18], [19], tačiau atvejis, kai parametras α yra algebrinis iracionalusis skaičius, išlieka neaiškus iki šių dienų. Tai susiję su informacijos apie aibės

$$L(\alpha) = \{\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0\},$$

kai α - algebrinis iracionalusis skaičius, tiesinį nepriklausomumą stoka. Žinoma [5], kad bent 51 procentas aibės $L(\alpha)$ elementų tankio prasme yra tiesiškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$.

Ribines teoremas Lercho dzeta funkcijai su algebriniu iracionaliuoju parametru α pradėjo studijuoti A. Laurinčikas, kurios kartu su V. Garbaliauskiene ir D. Geniene [8] straipsnyje, pateikė ribinę teoremą kompleksinėje plokštumoje silpnojo tikimybinių matų prasme.

Šio ir kitų rezultatų formulavimui reikalingi tam tikri apibrėžimai ir žymenys.

Tegul $I(\alpha)$ yra maksimalus tiesiškai nepriklausomas virš $\mathbb{Q}$ aibės $L(\alpha)$ poaibis. Tarkime, kad $I(\alpha) \neq L(\alpha)$ ir $D(\alpha) = L(\alpha) \backslash I(\alpha)$. Tuomet su kiekvienu elementu $d_m \in D(\alpha)$, aibė $I(\alpha) \cup \{d_m\}$ yra tiesiškai priklausoma virš $\mathbb{Q}$. Todėl egzistuoja baigtinis elementų $i_{m_i}, \ldots, i_{m_n} \in I(\alpha)$ skaičius ir tokie skaičiai $k_0(m), \ldots, k_n(m) \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, kad

$$d_m = -\frac{k_1(m)}{k_0(m)} i_{m_1} - \ldots - \frac{k_n(m)}{k_0(m)} i_{m_n}.$$

Kadangi $d_m = \log(m+\alpha)$ ir $i_{m_j} = \log(m_j+\alpha)$, $j = 1, \dots, n$, iš čia randame, jog

$$m+\alpha = (m_1+\alpha)^{-\frac{k_1(m)}{k_0(m)}} \dots (m_n+\alpha)^{-\frac{k_n(m)}{k_0(m)}}. \tag{1}$$

Apibrėžiame aibės $\mathbb{N}_0$ poaibius

$$\mathcal{M}(\alpha) = \{m \in \mathbb{N}_0 : \log(m+\alpha) \in I(\alpha)\},$$

$$\mathcal{N}(\alpha) = \{m \in \mathbb{N}_0 : \log(m+\alpha) \in D(\alpha)\}.$$

Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} :\mid s \mid= 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompeksinėje plokštumoje, o

$$\Omega = \prod_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} \gamma_m,$$

o $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathcal{M}(\alpha)$. Remiantis Tichonovo (Tikhonov) teorema, su sandaugos topologija ir pataškine daugyba begaliniamatis toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė, todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ galima apibrėžti tikimybinį Haro (Haar) matą m_H. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(m)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m, $m \in \mathcal{M}(\alpha)$. Kai galioja (1) lygybė, funkciją $\omega(m)$ pratęsiame į visą aibę $\mathbb{N}_0$ formule

$$\omega(m) = \omega^{-\frac{k_1(m)}{k_0(m)}}(m_1) \cdots \omega^{-\frac{k_n(m)}{k_0(m)}}(m_n), \quad m \in \mathcal{N}(\alpha). \tag{2}$$

Čia yra imamos pagrindinės šaknų reikšmės.

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, kai $\sigma > \frac{1}{2}$, apibrėžiame kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą

$$L(\lambda, \alpha, \sigma, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m} \omega(m)}{(m+\alpha)^\sigma},$$

o P_L žymime jo skirstinį, t.y.,

$$P_L(A) = m_H(\omega \in \Omega : L(\lambda, \alpha, \sigma, \omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Tuomet buvo įrodytas [8] toks tvirtinimas.

A teorema. *Tarkime, kad α yra algebrinis iracionalusis skaičius, o $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuomet tikimybinis matas*

$$\frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : L(\lambda, \alpha, \sigma + i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_L.

Čia $meas\{A\}$ žymi mačiosios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego (Lebesgue) matą.

Vėliau D. Genienė, A. Laurinčikas ir R. Macaitienė [12] pateikė A teoremos apibendrinimą analizinių srityje $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\}$ funkcijų erdvėje $H(D)$. Šis atvejis yra kur kas labiau komplikuotas, todėl buvo reikalaujama, kad skaičiai

$$\frac{k_1(m)}{k_0(m)}, \dots, \frac{k_n(m)}{k_0(m)}$$

(2) lygybėje būtų sveikieji su visais $m \in \mathcal{N}(\alpha)$. Remiantis šia sąlyga buvo įrodyta, jog $\{\omega(m) : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra poromis ortogonalių kompleksines reikšmes įgyjančių atsitiktinių dydžių, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, seka. Iš čia seka, jog pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$, eilutė

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda m}\omega(m)}{(m+\alpha)^{\sigma}} \tag{3}$$

konverguoja beveik visur Haro mato m_H atžvilgiu. Vadinasi,

$$L(\lambda, \alpha, s, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda m}\omega(m)}{(m+\alpha)^{s}}$$

yra $H(D)$ reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Pagal gerai žinomą Dirichlė eilučių savybę, (3) eilutė konverguoja tolygiai beveik visiems $\omega \in \Omega$ kompaktiškuose srities $A_r = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2} + \frac{1}{r}\}$, $r \in \mathbb{N}$, poaibiuose. Iš čia seka, jog ši eilutė beveik visiems $\omega \in \Omega$ konverguoja tolygiai kompaktiškuose srities D poaibiuose.

Šiuo atveju teisinga tokia teorema [12].

B teorema. *Tarkime, kad α yra algebrinis iracionalusis skaičius, o (2) lygybėje*

$$\frac{k_1(m)}{k_0(m)}, \dots, \frac{k_n(m)}{k_0(m)} \tag{4}$$

yra sveikieji skaičiai su visais $m \in \mathcal{N}(\alpha)$. Tuomet

$$\frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : L(\lambda, \alpha, \sigma + i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $L(\lambda, \alpha, s, \omega)$ skirstinį.

Pastebėta, jog tuo atveju, kai vietoje erdvės $H(D)$ nagrinėjama erdvė $H(D_1)$, $D_1 = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$, minėtas apribojimas (4) sekos skaičiams nėra reikalingas.

Darbo tikslas – įrodyti besąlyginę ribinę teoremą Lercho dzeta funkcijai su algebriniu iracionaliuoju parametru α analizinių funkcijų erdvėje $H(D_1)$.

Tegul $L_1(\lambda, \alpha, s, \omega)$ yra atsitiktinio elemento $L(\lambda, \alpha, s, \omega)$ siaurinys erdvėje $H(D_1)$.

Pagrindinė teorema. *Tarkime, kad α yra algebrinis iracionalusis skaičius. Tuomet*

$$\frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : L(\lambda,\alpha,s+i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D_1)),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $L_1(\lambda,\alpha,s,\omega)$ skirstinį.

Magistro darbo pagrindu parengtas straipsnis priimtas publikuoti žurnale "Jaunųjų mokslininkų darbai" [11].

Darbe pateikiamos pagrindinės sąvokos ar teiginiai, tiesiogiai susiję su darbo įrodymu, formuluojami ir įrodomi pagalbiniai rezultatai bei įrodoma pagrindinė teorema. Darbo pabaigoje pateikiamos išvados, literatūros sąrašas ir santrauka anglų kalba.

Apibrėžimai, teoremos, lemos ir formulės numeruojami, nurodant skyriaus ir poskyriaus numerius bei apibrėžimo (teoremos, lemos) numerį tame poskyryje.

1. Pagrindinės sąvokos

1.1 Atsitiktiniai elementai

Tarkim $(\Omega, F, \mathbb{P})$ yra tikimybinė erdvė ir $(S, \mathcal{B}(S))$ – metrinė erdvė su savo Borelio aibių klase.

1.1.1 apibrėžimas. Tegul $X : \Omega \to S$. Jei $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in F$ visiems $A \in \mathcal{B}(S)$, tuomet X yra vadinamas $\mathcal{S}$-reikšmiu atsitiktiniu elementu, apibrėžtu erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.1.2 apibrėžimas. S-reikšmio atsitiktinio elemento X skirstiniu vadinamas apibrėžtas erdvėjė $(S, \mathcal{B}(S))$ tikimybinis matas P toks, kad

$$P(A) = \mathbb{P}(X^{-1}A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

visoms aibėms $A \in \mathcal{B}(S)$.

1.1.3 apibrėžimas. Atsitiktinių elementų seka $\{X_n\}$, kai $n \to \infty$ konverguoja pagal skirstinį į atsitiktinį elementą X (žymima $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$), jei elementų X_n skirstiniai silpnai konverguoja į elemento X skirstinį.

Tegul ρ yra metrika erdvėje S.

1.1.4 apibrėžimas. Tarkime S-reikšmiai atsitikiniai elementai X_n ir Y_n yra apibrėžti erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ir tegu erdvė S yra separabili. Jei $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, $n \to \infty$, ir bet kokiam $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\rho(X_{kn}, Y_n) \geqslant \epsilon = 0), \quad n \to \infty,$$

tai $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, $n \to \infty$. Teoremos įrodymą galima rasti [3].

1.1.5 apibrėžimas. Atsitiktinio elemento X vidurkis EX apibrėžiamas formule

$$EX = \int\limits_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}.$$

1.1.6 apibrėžimas. Atsitiktiniai elementai X ir Y vadinami ortogonaliais, jei $EXY = 0$.

1.1.7 teorema. Tarkime, atsitiktiniai elementai $X_1, X_2, ...$ yra ortogonalūs ir

$$\sum_{m=1}^{\infty} E|X_m|^2 \ln^2 m < 0.$$

Tada eilutė $\sum\limits_{m=1}^{\infty} X_m$ konverguoja beveik visur. Teoremos įrodymas pateiktas [6].

1.2 *H(D)* reikšmio elemento apibrėžimas

1.2.1 apibrėžimas. Tegu A yra bet kokia aibė, o aibė X_a yra apibrėžta visiems $a \in A$. Tuomet funkcijų f, apibrėžtų aibėje A ir tenkinančių sąlygą $f(a) \in X_a$, aibė vadinama aibių X_a Dekarto sandauga ir žymima

$$\prod_{a \in A} X_a.$$

Aibės X_a vadinamos koordinatinėmis aibėmis.

1.2.2 apibrėžimas. Sandaugos $\prod\limits_{a \in A} X_a$ projekcija P_a į koordinatinę aibę X_a apibrėžiama formule $P_a(f) = f(a)$.

1.2.3 apibrėžimas. Silpniausia topologija aibėje $\prod\limits_{a \in A} X_a$, kurios atžvilgiu visos projekcijos yra tolydžios, vadinama sandaugos topologija.

Tarkime, γ yra vienintelis apskritimas kompleksinėje plokštumoje, t.y. $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Tegu

$$\Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

$\gamma_m = \gamma$, visiems $m = 0, 1, ..\infty$. Yra žinoma, kad su pataškine daugyba ir sandaugos topologija Ω yra kompaktiška topologinė Abelio grupė, todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haar'o matas m_H [16]. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

Tegu $\omega(m)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m.

Tarkime,

$$\zeta(s, \omega, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega(m)}{(m + \alpha)^s}, \quad \omega \in \Omega, \quad s \in D.$$

1.2.4 lema. *$\zeta(s, \omega, \alpha)$ yra $H(D)$ reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.*

Įrodymas [16]. Kadangi šia lema remsimės įrodydami pagrindinę teoremą, pateikiame detalų jos įrodymą. Tarkime, $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ ir

$$\zeta_m(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega(m)}{(m + \alpha)^{\sigma_0}}.$$

Taigi, $\{\zeta_m(\omega)\}$ yra seka kompleksinių dydžių, apibrėžtų erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Nesunku matyti, jog

$$E|\zeta_m|^2 = \frac{1}{(m + \alpha)^{2\sigma_0}}$$

ir

$$E|\zeta_m\zeta_l| = \frac{1}{(m+\alpha)^{\sigma_0}(l+\alpha)^{\sigma_0}} \int\limits_{\Omega} \omega(m)\omega(l) d\omega = \begin{cases} 0, & \text{jei } \ l \neq m, \\ \frac{1}{(m+\alpha)^{2\sigma_0}}, & \text{jei } \ l = m. \end{cases}$$

Vadinasi, $\{\zeta_m\}$ yra poromis ortoganalių atsitiktinių dydžių seka. Kadangi $2\sigma_0 > 1$, tai eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} E|\zeta_m|^2 \ln^2 m$$

konverguoja, o eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m$$

konverguoja beveik visiems $\omega \in \Omega$ mato m_H atžvilgiu. Iš čia gaunama, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$ eilutė konverguoja tolygiai srities $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ kompaktiškuose poaibiuose. Taigi, ji apibrėžia funkciją, analizinę šioje srityje.

Kadangi eilutės nariai yra analizinės funkcijos, tai iš čia ir Vejerštraso teoremos gaunamas lemos tvirtinimas.

$\triangle$

Tarkime, P_ζ yra $H(D)$ reikšmio atsitiktinio elemento $\zeta(s, \omega, \alpha)$, apibrėžto erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, skirstinys.

1.2.5 teorema [16]. Tikimybinis matas P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į P_ζ.

1.3 Haro matas

1.3.1 apibrėžimas. Tegul aibėje G apibrėžta grupės bei topologinės struktūros. Aibė G vadinama topologine grupe, jeigu funkcija $h : G \times G \to G$, apibrėžiama lygybe $h(x, y) = xy^{-1}$, yra tolydi.

1.3.2 apibrėžimas. Topologinė grupė vadinama kompaktiška, jeigu jos topologija yra kompaktiška.

1.3.3 apibrėžimas. Borelio matas, apibrėžtas kompaktiškoje grupėje G vadinamas invariantiniu, jeigu $P(A) = P(xA) = P(Ax)$ visiems $A \in B(G)$ ir $x \in G$. Čia xA ir Ax yra atitinkamai aibės $\{xy : y \in A\}$ ir $\{yx : y \in A\}$.

1.3.4 apibrėžimas. Invariantinis Borelio matas, apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje erdvėje yra vadinamas Haro matu.

1.3.5 teorema [16]. Kiekvienoje kompaktiškoje topologinėje grupėje egzistuoja vienintelis Haar'o matas.

1.3.6 apibrėžimas. Tikimybinis matas P erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ vadinamas suspaustu, jeigu kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja tokia kompaktiška aibė $K \subset S$, kad

$$P(K) > 1 - \varepsilon.$$

2. Ribinė teorema Lercho dzeta funkcijai

Šiame skyriuje įrodysime ribines teoremas analizinių funkcijų erdvėje absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms, susietoms su funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$.

Dėl paprastumo, šiame ir kituose skyriuose naudosime keletą žymenų. Tegul $\mathcal{B}(S)$ yra erdvės S Borelio aibių klasė, $\mathbb{C}$ – kompleksinė plokštuma ir su visais $T > 0$,

$$\nu_T^\tau(...) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : ...\}.$$

Čia, kaip minėjome, meas{A} yra aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas, o vietoje daugtaškio rašomos sąlygos, kurias turi tenkinti τ.

Kaip jau minėjome įvade, tegul $D_1 = \{s \in \mathbb{C} : \ \sigma > 1\}$. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame $H(D_1)$ reikšmį atsitiktinį elementą

$$L(\lambda, \alpha, s, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m} \omega(m)}{(m + \alpha)^s}, \quad s \in D_1.$$

Akivaizdu, jog $L(\lambda, \alpha, s, \omega)$ yra $H(D_1)$ reikšmis atsitiktinis elementas, kadangi eilutė konverguoja tolygiai kompaktiškuose srities D_1 poaibiuose su visais $\omega(m)$.

Taigi, mūsų tikslas yra įrodyti silpną tikimybinio mato

$$P_T(A) = \nu_T^\tau(L(\lambda, \alpha, s + i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D_1)),$$

konvergavimą, kai $T \to \infty$.

2.1 Ribinė teorema Dirichlė polinomui

Šiame skyriuje nagrinėsime Dirichlė polinomus

$$L_n(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{n} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m + \alpha)^s}$$

ir

$$L_n(\lambda, \alpha, s, \omega_0) = \sum_{m=0}^{n} \frac{e^{2\pi i \lambda m} \omega_0(m)}{(m + \alpha)^s},$$

kur ω_0 yra fiksuota funkcija, nusakyta (2) formule.

Ribinės teoremos Dirichlė polinomams įrodymui, naudosime pagalbinį rezultatą.

2.1.1 lema. *Tarkime, kad α yra algebrinis iracionalusis skaičius. Tuomet tikimybinis matas Q_T*

$$Q_T(A) = \nu_T^\tau(((m + \alpha)^{-i\tau} : \ m \in \mathcal{M}(\alpha)) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.

Lemos įrodymas pateiktas A. Laurinčiko ir J. Staudingo straipsnyje [19] (5 teorema).

Dabar erdvėje $(H(D_1), \mathcal{B}(H(D_1)))$ apibrėžkime tikimybinius matus

$$P_{T,n}(A) = \nu_T^\tau(L_n(\lambda, \alpha, s + i\tau) \in A)$$

ir

$$\widehat{P}_{T,n}(A) = \nu_T^\tau(L_n(\lambda, \alpha, s + i\tau, \omega_0) \in A).$$

2.1.2 lema. *Tarkime, kad α yra algebrinis iracionalusis skaičius. Tuomet tikimybiniai matai $P_{T,n}$ ir $\widehat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą P_n erdvėje $(H(D_1), \mathcal{B}(H(D_1)))$.*

Įrodymas. Apibrėžkime funkciją $u_{n,\alpha} : \Omega \to H(D_1)$ formule

$$u_{n,\alpha}(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda m}\omega(m)}{(m+\alpha)^s}.$$

Funkcijos $u_{n,\alpha}$ tolydumas seka iš absoliutaus eilutės konvergavimo pusplokštumėje $\sigma > 1$. Nesunku pastebėti, jog

$$u_{n,\alpha}\left(\{(m+\alpha)^{-i\tau} : m \in \mathcal{M}(\alpha)\}\right) = L_n(\lambda, \alpha, s + i\tau).$$

Iš čia, remdamiesi 2.1.1 lema ir 5.1 teorema iš [3], gauname, kad matas $P_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į $m_H u_{n,\alpha}^{-1}$.

Silpnas tikimybinio mato $\widehat{P}_{T,n}$ konvergavimas gaunamas panašiai. Funkciją $\widehat{u}_{n,\alpha} : \Omega \to H(D_1)$ apibrėžkime tokiu būdu

$$\hat{u}_{n,\alpha}(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda m}\omega_0(m)\omega(m)}{(m+\alpha)^s}.$$

Tuomet, analogiškai kaip ir $P_{T,n}$ atveju, gauname, kad matas $\hat{P}_{T,n}$, $T \to \infty$ silpnai konverguoja į $m_H \hat{u}_{n,\alpha}^{-1}$. Lieka įrodyti, kad $m_H u_{n,\alpha}^{-1} = m_H \hat{u}_{n,\alpha}^{-1}$. Tam apibrėžiame pagalbinę funkciją $u_0 : \Omega \to \Omega$ sandauga $u_0(\omega) = \omega\omega_0$. Nesunku pastebėti, jog $\hat{u}_{n,\alpha}(\omega) = u_{n,\alpha}(u_0(\omega))$. Kadangi Haro matas m_H invariantiškas postūmių atžvilgiu, tai

$$m_H \hat{u}_{n,\alpha}^{-1} = m_H (u_{n,\alpha} u_0)^{-1} = (m_H u_0^{-1}) u_{n,\alpha}^{-1} = m_H u_{n,\alpha}^{-1}.$$

Iš čia turime, kad $P_n = m_H u_{n,\alpha}^{-1}$. Lema įrodyta.

$\triangle$

2.2 Ribinė teorema absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms

Tegul $A \in \mathcal{B}(H(D_1))$ ir $\omega \in \Omega$. Apibrėžkime tikimybinį matą

$$\widehat{P}_T(A) = \nu_T^\tau \left(L(\lambda, \alpha, s + i\tau, \omega) \in A\right).$$

Pagrindinės teoremos įrodymui, būtina žinoti, ar matai P_T ir $\widehat{P}_T$ konverguoja į tą patį matą. Norint įrodyti šių tikimybinių matų P_T ir $\widehat{P}_T$ silpną konvergavimą, reikalinga erdvėje $H(D_1)$ apibrėžti metriką su indukuota tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija.

Gerai žinoma (žiūrėti, pavyzdžiui [6]), kad srityje D_1 galima sukonstruoti kompaktiškų jos poaibių $\{K_l : \ l \in \mathbb{N}\}$ seką tokią, kad

1. $D_1 = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} K_l$;
2. $K_l \subset K_{l+1}, \quad l \in \mathbb{N}$;
3. Jei K yra kompaktiškas srities D_1 poaibis, tada $K \subseteq K_l$ tam tikriems l.

Tarkime $f, g \in H(D_1)$ ir

$$\rho(f, g) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup\limits_{s \in K_l} \mid f(s) - g(s) \mid}{1 + \sup\limits_{s \in K_l} \mid f(s) - g(s) \mid}.$$

Nesunku pastebėti, jog $\rho(f, g)$ ir yra reikalaujama erdvės $H(D_1)$ metrika su indukuota joje topologija.

2.2.1 lema. *Tarkime, kad α yra algebrinis irracionalus skaičius. Tada tikimybiniai matai P_T ir $\widehat{P}_T$ silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą P erdvėje $(H(D_1), \mathcal{B}(H(D_1)))$, kai $T \to \infty$.*

Įrodymas. 2.1.2 lemoje įrodėme, kad tikimybiniai matai $P_{T,n}$ ir $\widehat{P}_{T,n}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą P_n erdvėje $(H(D_1), \mathcal{B}(H(D_1)))$.

Turime įrodyti, kad tikimybinių matų šeima $\{P_n : \ n \in \mathbb{N}_{\not{0}}\}$ yra suspausta.

Tegul θ yra atsitiktinis dydis, tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 1]$, apibrėžtas tam tikroje tikimybinėje erdvėje $(\widehat{\Omega}, \mathcal{B}(\widehat{\Omega}), \mathbb{P})$, o

$$X_{T,n} = X_{T,n}(S) = L_n(\lambda, \alpha, s + iT\theta).$$

Pažymėkime $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ konvergavimą pagal pasiskirstymą. Tuomet iš 2.1.2 lemos turime, kad

$$X_{T,n} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} X_n. \tag{2.2.1}$$

kur $X_n = X_n(s)$ yra $H(D_1)$ reikšmis atsitiktinis elementas su pasiskirstymu P_n.

Tuomet, pasinaudoję integraline Koši formule, galime daryti prielaidą, jog egzistuoja teigiama konstanta C_l, kad

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \sup_{s\in K_l} \mid L_n(\lambda,\alpha,\sigma+i\tau)^2 \mid dt \ll C_l \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^{2\sigma}}, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{2.2.2}$$

Kadangi eilutė $L_n(\lambda,\alpha,s)$ konverguoja absoliučiai ir tolygiai kompaktiškuose srities D_1 poaibiuose, egzistuoja skaičius $0 < R_l < \infty$ toks, kad

$$\begin{aligned}
&\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \sup_{s\in K_l} \mid L_n(\lambda,\alpha,\sigma+i\tau)^2 \mid d\tau \\
\ll\; &\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \limsup_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \int\limits_0^T \sup_{s\in K_l} \mid L_n(\lambda,\alpha,\sigma+i\tau)^2 \mid^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant R_l, \quad l \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Pavyzdžiui, atsižvelgę į (2.2.2), R_l galime pasirinkti tokią:

$$R_l = \left(C_l \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^{\sigma_l}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Tarkime, $\epsilon > 0$ ir $M_{l,\epsilon} = 2^l R_l \epsilon^{-1}$. Tada, iš (2.2.3) seka, kad

$$\begin{aligned}
&\limsup_{T\to\infty} P_{T,n} \left(\{ g \in H(D_1) :\ \sup_{s\in K_l} \mid g(s) \mid > M_{l,\epsilon} \} \right) \\
=\; &\limsup_{T\to\infty} \nu_T^{\tau} \left(\sup_{s\in K_l} \mid L_n(\lambda,\alpha,s+i\tau) \mid \geqslant M_{l,\epsilon} \right) \\
\leqslant\; &\frac{1}{M_{l,\epsilon}} \int\limits_0^T \sup_{s\in K_l} \mid L_n(\lambda,\alpha,s+i\tau) \mid d\tau \leqslant \frac{\epsilon}{2^l}, \quad l \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Dabar apibrėžkime funkciją $h:\ H(D_1) \to \mathbb{R}$,

$$h(g) = \sup_{s\in K_l} \mid g(s) \mid \qquad g \in H(D_1).$$

Iš funkcijos h tolydumo, 2.1.2 lemos ir 5.1 teoremos iš [3] seka silpnas tikimybinio mato

$$\nu_T^{\tau} \left(\sup_{s\in K_l} \mid L_n(\lambda,\alpha,s+i\tau) \mid \in A \right), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

kai $T \to \infty$, konvergavimas į matą $P_n h^{-1}$. Taigi, pasinaudoję 2.1 teorema iš [3] ir (2.2.4) nelygybe, gauname, kad

$$\begin{aligned}
& P_n\left(\{g \in H(D_1) : \sup_{s \in K_l} \mid g(s) \mid > M_{l,\epsilon}\}\right) \\
\leqslant\ & \liminf_{T \to \infty} P_{T,n}\left(\{g \in H(D_1) : \sup_{s \in K_l} \mid g(s) \mid > M_{l,\epsilon}\}\right) \\
\leqslant\ & \limsup_{T \to \infty} P_{T,n}\left(\{g \in H(D_1) : \sup_{s \in K_l} \mid g(s) \mid > M_{l,\epsilon}\}\right) \leqslant \frac{\epsilon}{2^l}, \quad l \in \mathbb{N}. \qquad (2.2.5)
\end{aligned}$$

Pažymėkime

$$K_\epsilon = \left\{g \in H(D_1) : \sup_{s \in K_l} \mid g(s) \mid \leqslant M_{l,\epsilon}, \quad l \in \mathbb{N}\right\}.$$

Tokiu atveju, funkcijų šeima K_ϵ yra aprėžta, vadinasi, ji yra ir kompaktiškas $H(D_1)$ poaibis. Be to, iš (2.2.5) seka, kad

$$\begin{aligned}
P_n(K_\epsilon) = 1 - P_n(K_\epsilon^C) \ &\geqslant\ 1 - \sum_{l=1}^{\infty} P_n\left(\{g \in H(D_1) : \sup_{s \in K_l} \mid g(s) \mid > M_{l,\epsilon}\}\right) \\
&\geqslant\ 1 - \epsilon \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1 - \epsilon
\end{aligned}$$

visiems $n \in \mathbb{N}_0$. Iš 1.3.6 apibrėžimo seka, kad tikimybinių matų šeima $\{P_n : \ n \in \mathbb{N}_0\}$ yra suspausta. Vadinasi, iš Prochorovo teoremos (žiūrėti, pavyzdžiui, [3] (6.1 teorema)) seka ir reliatyvus šeimos $\{P_n : \ n \in \mathbb{N}_0\}$ kompaktiškumas. Taigi, egzistuoja posekis $\{P_{n_k}\} \subset \{P_n\}$ toks, kad P_{n_k}, kai $k \to \infty$ silpnai konverguoja į tam tikrą tikimybinį matą P, aprėžtą erdvėjė $(H(D_1), \mathcal{B}(H(D_1)))$. Kadangi erdvė $H(D_1)$ seperabili, gauname sąryšį

$$X_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{\mathcal{D}} P. \qquad (2.2.6)$$

Dabar apibrėžkime atsitiktinį elementą

$$X_T = X_T(s) = L(\lambda, \alpha, s + iT\theta).$$

Taigi, gauname, kad kiekvienam $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \to \infty} \limsup_{T \to \infty} \mathbb{P}\left(\rho(X_T, X_{T,n}) \geqslant \epsilon\right) \\
=\ & \lim_{n \to \infty} \limsup_{T \to \infty} \nu_T^\tau\left(\rho(L(\lambda, \alpha, s + i\tau), L_n(\lambda, \alpha, s + i\tau)) \geqslant \epsilon\right) \\
\leqslant\ & \lim_{n \to \infty} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(L(\lambda, \alpha, s + i\tau), L_n(\lambda, \alpha, s + i\tau)) d\tau = 0.
\end{aligned}$$

Iš čia, (2.2.1), (2.2.6) ir 4.2 teoremos [3] seka, kad

$$X_T \xrightarrow[T \to \infty]{\mathcal{D}} P. \qquad (2.2.7)$$

Taigi, turime, kad tikimybinis matas P_T, kai $T \to \infty$ silpnai konverguoja į matą P.

Pastarasis sąryšis parodo, kad ribinis matas P yra nepriklausomas nuo sekos $\{P_{n_k}\}$. Kadangi $\{P_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ yra reliatyviai kompaktiška, gauname, jog

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{2.2.8}$$

Dabar apibrėžkime du atsitiktinius elementus

$$\hat{X}_{T,n} = \hat{X}_{T,n}(s) = L_n(\lambda, \alpha, s + iT\theta, \omega)$$

ir

$$\hat{X}_T = \hat{X}_T(s) = L(\lambda, \alpha, s + iT\theta, \omega).$$

Tada, mąstydami kaip ir anksčiau bei pasinaudoję 2.1.2 lema ir (2.2.8) sąryšiu, gauname, kad

$$\widehat{X}_T \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P.$$

t. y., matas $\widehat{P}_T$, kai $T \to \infty$ silpnai konverguoja į P. Teorema yra įrodyta.

2.3 Pagrindinės teoremos įrodymas

Liko įrodyti, kad matai P ir P_L sutampa.

Tegul $A \in \mathcal{B}(H(D_1))$ yra fiksuota mato P tolydumo aibė. Tuomet iš 2.2.1 lemos ir 2.1 teoremos [3] seka sąryšis

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T^\tau \left(L(\lambda, \alpha, s + i\tau) \in A\right) = P(A). \tag{2.3.1}$$

Pasinaudosime keletu ergodinės teorijos elementų. Pažymėkime

$$a_\tau = \{(m + \alpha)^{-i\tau} : m \in \mathcal{M}(\alpha)\}, \quad \text{visiems} \quad \tau \in \mathbb{R},$$

ir aibėje Ω apibrėžkime transformacijų $\{\varphi_\tau : t \in \mathbb{R}\}$ šeimą, čia $\varphi_\tau(\omega) = a_\tau\omega$, $\omega \in \Omega$. Tuomet $\{\varphi_\tau : t \in \mathbb{R}\}$ yra mačiųjų matą išlaikančių transformacijų aibėje Ω vienparametrinė grupė. Priminsime, jog aibė $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ vadinama invariantine grupės $\{\varphi_\tau : t \in \mathbb{R}\}$ atžvilgiu, jei visiems $\tau \in \mathbb{R}$, aibės A ir $A_\tau = \varphi_\tau(A)$ gali skirtis viena nuo kitos ne daugiau kaip nulinio mato aibe. Taip pat primename, jog grupė $\{\varphi_\tau : t \in \mathbb{R}\}$ vadinama ergodine, jeigu jos invariantinių aibių σ-kūną sudaro aibės, kurių matas m_H lygus 0 arba 1.

A. Laurinčikas ir J. Staudingas [19] įrodė (7 lema), jog su algebriniu irracionaliuoju skaičiumi α, vienparametrinė grupė $\{\varphi_\tau : t \in \mathbb{R}\}$ yra ergodinė.

Erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame atsitiktinį dydį $\xi = \xi(\omega)$ formule

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{jei } \ L(\lambda, \alpha, s, \omega) \in A, \\ 0, & \text{jei } \ L(\lambda, \alpha, s, \omega) \notin A. \end{cases}$$

Pažymėkime $\mathbb{E}(\xi)$ atsitiktinio dydžio ξ vidurkį. Tuomet

$$\mathbb{E}(\xi) = \int\limits_{\Omega} \xi dm_H = m_H(\omega \in \Omega : \ L(\lambda, \alpha, s, \omega) \in A) = P_L(A). \tag{2.3.2}$$

Kadangi grupė $\{\varphi_\tau : t \in \mathbb{R}\}$ ergodinė, atsitiktinis procesas $\xi(\varphi_\tau(\omega))$ taip pat yra ergodinis. Tokiu atveju, pasinaudoję klasikine Birkhofo-Kinčino (Birkhoft-Khintchine) teorema [7], gauname, jog beveik visiems $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \xi\left(\varphi_\tau(\omega)\right) dt = \mathbb{E}(\xi). \tag{2.3.3}$$

Iš kitos pusės, remdamiesi atsitiktinio dydžio ξ ir transformacijos φ_T apibrėžimais, randame, kad

$$\frac{1}{T} \int\limits_0^T \xi\left(\varphi_\tau(\omega)\right) dt = \nu_T^\tau\left(L(\lambda, \alpha, s + i\tau, \omega) \in A\right).$$

Iš čia, (2.3.2) bei (2.3.3) randame, kad

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T^\tau\left(L(\lambda, \alpha, s + i\tau, \omega) \in A\right) = P_L(A)$$

su beveik visais $\omega \in \Omega$. Atsižvelgę į (2.3.1), gauname, jog $P(A) = P_L(A)$ visoms mato P tolydumo aibėms A. Kadangi tolydumo aibės sudaro apibrėžiančią klasę, turime, kad $P(A) = P_L(A)$ visoms $A \in \mathcal{B}(H(D_1))$. Teorema įrodyta.

Pastaba. Vienas svarbiausių aspektų, leidusių B teoremoje atsisakyti (4) reikalavimo buvo tai, jog funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ reikšmių pasiskirstymas nagrinėtas absoliutaus konvergavimo pusplokštumėje.

IŠVADOS

Baigiamąjame darbe pratęstas A. Laurinčiko, V. Garbaliauskienės, D. Genienės ir R. Macaitienės pradėtas Lercho dzeta funkcijos

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

reikšmių pasiskirstymo nagrinėjimas, kai α yra algebrinis iracionalusis skaičius, o $\lambda \notin \mathbb{Z}$.

Magistro darbe įrodyta ribinė teorema silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje, atsisakant vieno iš reikalavimų parametrui α, pateikto D. Genienės, A. Laurinčiko ir R. Macaitienės darbe (2008). Atsisakius papildomų sąlygų, susiaurinama teoremos galiojimo sritis – rezultatas teisingas funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ absoliutaus konvergavimo pusplokštumėje.

Literatūra

[1] Apostol T., On the Lerch zeta-function, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 161–167.

[2] Bagchi B., *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, PhD Thesis*, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

[3] Billingsley P., *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[4] Berndt B. C., Two new proofs of Lerch's functional equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **32** (2) (1972), 403–408.

[5] Cassels J. W. S., Footnote to a note of Davenport and Heilbronn, *J. London Math. Soc.*, **32** (1961), 177–184.

[6] Conway J. B., *Functions of One Complex Variables*, Springer-Verlag, New York, 1973.

[7] Cramér H. and Leadbetter M. R., *Stationary and Related Stochastic Processes*, John Wiley, New York, 1967.

[8] Garbaliauskienė V., Genienė D., Laurinčikas A., Value-distribution of the Lerch zeta-function with algebraic irrational parameter. I, *Lith. Math. J.*, **47** (2), 163–176, 2007.

[9] Garunkštis R. and Laurinčikas A., On the Lerch zeta-function, *Lith. Math. J.*, **36**(4) (1996), 337–348.

[10] Garunkštis R., Laurinčikas A., Steuding J., On the mean square of Lerch zeta-functions, *Arch. Math.* **80** (1) (2003), 47–60.

[11] Gedminaitė D., Macaitienė R., Lecho dzeta funkcijos reikšmių pasiskirstymas, *Jaunųjų mokslininkų darbai*, **43** (1) (2015) // priimtas.

[12] Genienė D., Laurinčikas A., Macaitienė R., Value-distribution of the Lerch zeta-function with algebraic irrational parameter. III, *Lith.Math. J.*, **48** (3), 282–293, 2008.

[13] Joyner D., *Distribution Theorems of L-functions*, Longman Scientific, Harlow, 1986.

[14] Klusch D., Asymptotic equalities for the Lipschitz-Lerch zeta-function, *Arch. Math.*, **49** (1987), 38–43.

[15] Klusch D., A hybrid version of a theorem of Atkinson, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **34** (8) (1989), 721–728.

[16] Laurinčikas A., *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer, Dordrecht, London, Boston, 1996.

[17] Laurinčikas A. and Garunkštis R., *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, London, Boston, 2002.

[18] Laurinčikas A. and Matsumoto K., Joint value-distribution theorems on Lerch zeta-functions, *Lith. Math. J.*, **38**(3) (1998), 238–249 //*Liet. mat. rink.* **38**(3) (1998), 312–326.

[19] Laurinčikas A. and Steuding J., A limit theorem for the Hurwitz zeta function with an algebraic irrational parameter, *Archiv Math.*, **85** (2005), 419–432.

[20] Lerch M., Note sur la fonction $K(\omega, x, s) = \sum\limits_{n \geq 0} exp\{2\pi inx\} \cdot (n + \omega)^{-s}$, *Acta Math.*, **11** (1887), 19–24.

[21] Lipschitz R., Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe, *J. Reine Angew. Math.*, **105** (1889), 127–156.

[22] Matsumoto K., Value-distribution of zeta-functions, *Lecture Notes Math.*, **1434** (1990), 178–187.

[23] Matsumoto K., Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions, *Sugahu Expositions*, **17** (2004), 51–71.

[24] Mikolás M., New proof and extension of the funktional equality of Lerch's zeta-function, *J. Ann. Univ. Sci. Budapest. Séct. Math.*, **14** (1971), 111–116.

[25] Oberhettinger F., Note on the Lerch zeta-function, *Pacific J. Math.*, **6** (1956), 117–120.

[26] Steuding J., *Value-Distribution of L-Functions*, Lecture Notes Math., **1877**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.

SUMMARY

VALUE DISTRIBUTION OF THE LERCH ZETA-FUNCTION

This work is a continuation of the investigation of the Lerch zeta function $L(\lambda, \alpha, s)$, $s = \sigma + it$, with algebraic irrational parameter α, $0 < \alpha \leqslant 1$, initiated by A. Laurinčikas, V. Garbaliauskienė, D. Genienė, R. Macaitienė. We recall that the function $L(\lambda, \alpha, s)$ is defined, for $\sigma > 1$, by

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

and by analytic continuation elsewhere. We consider the case $\lambda \notin \mathbb{Z}$ only. In this case, $L(\lambda, \alpha, s)$ is analytically continuable to an entire function and without loss of generality we can suppose that $0 < \alpha < 1$.

Limit theorems in the sense of weak convergence of probability measures on the complex plane and in the space of analytic in some region functions for the function $L(\lambda, \alpha, s)$ with algebraic irrational parameter α has been obtained.

Let

$$L(\alpha) = \{\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0\},$$

where, as usual, $\mathbb{N}_0$ is the set of nonnegative integers. For algebraic irrational α, Cassels proved that at least 51 percent of elements of the set $L(\alpha)$ are linearly independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$. Denote by $I(\alpha)$ a maximal linearly independent over $\mathbb{Q}$ subset of $L(\alpha)$, and suppose that $I(\alpha) \neq L(\alpha)$. Moreover, let $D(\alpha) = L(\alpha) \backslash I(\alpha)$. Then, for any element $\log(m + \alpha) \in D(\alpha)$, there exist a finite number of elements $\log(m_1 + \alpha), \dots, \log(m_n + \alpha) \in I(\alpha)$ and numbers $k_0(m), \dots, k_n(m) \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ such that

$$m + \alpha = (m_1 + \alpha)^{-\frac{k_1(m)}{k_0(m)}} \dots (m_n + \alpha)^{-\frac{k_n(m)}{k_0(m)}}. \tag{1}$$

Now denote by $\mathcal{B}(S)$ the class of Borel sets of a space S and define

$$\Omega = \prod_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} \gamma_m,$$

where $\gamma_m = \{s \in \mathbb{C} : |\, s \,| = 1\} = \gamma$ for all $m \in \mathcal{M}(\alpha) = \{m \in \mathbb{N}_0 : \log(m + \alpha) \in I(\alpha)\}$. Then Ω is a compact topological Abelian group. Therefore, on $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, the probability Haar measure m_H can be defined, and this gives the probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Denote by $\omega(m)$ the projection of $\omega \in \Omega$ to the coordinate space γ_m, $m \in \mathcal{M}(\alpha)$, and

extend the function $\omega(m)$ to the whole set $\mathbb{N}_0$ by putting, for $m \in \mathcal{N}(\alpha) = \{m \in \mathbb{N}_0 : \log(m+\alpha) \in D(\alpha)\}$,

$$\omega(m) = \omega^{-\frac{k_1(m)}{k_0(m)}}(m_1) \cdots \omega^{-\frac{k_n(m)}{k_0(m)}}(m_n)$$

if (1) takes place. Note that here the principal values of roots are taken. For a given algebraic irrational α, there is no concrete information on the system $L(\alpha)$. Therefore, all hypotheses are possible. In the paper of D. Genienė, A. Laurinčikas and R. Macaitienė (2008) was supposed that the numbers

$$\frac{k_1(m)}{k_0(m)}, \dots, \frac{k_n(m)}{k_0(m)} \tag{2}$$

must be integer for all $m \in \mathcal{N}(\alpha)$.

The aim of this work is to obtain an analogue of Theorem given by D. Genienė, A. Laurinčikas, R. Macaitienė (Lith. Math. J., 48(3), 2008) in the space of analytic on $D = \{s \in \mathbb{C} : \ \sigma > 1\}$ functions without (2) restriction.

Denote by $H(D)$ the space of analytic on D functions equipped with the topology of uniform convergence on compacta and define, for $s \in D$ and $\omega \in \Omega$,

$$L(\lambda, \alpha, s, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}\omega(m)}{(m+\alpha)^s}.$$

Then $L(\lambda, \alpha, s, \omega)$ is an $H(D)$-valued random element defined on the probability space $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

Main Theorem. *The probability measure*

$$P_T(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : L(\lambda, \alpha, \sigma + i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

converges weakly to the distribution P_L of the random element $L(\lambda, \alpha, s, \omega)$ as $T \to \infty$.