

ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS INFORMATIKOS IR E. STUDIJŲ INSTITUTAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Justina Grigaliūnaitė

Mišu universalumo teoremos apibendrinimas

Magistro darbas

Darbo vadovas

Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas

Šiauliai, 2015

TURINYS

Įvadas	3
2. Tikimybių teorijos elementai	7
3. Ribinės teoremos dzeta funkcijoms	9
4. Matų atramos	11
5. Universalumo teoremų įrodymas	13
6. Išvados	16
Literatūra	17
Summary	18

Įvadas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Iš Dirichlė eilučių savybių turime, kad ši funkcija yra analizinė srityje $\sigma > 1$. Be to, yra gerai žinoma, kad funkcija $\zeta(s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1.

Rymano dzeta funkcija atlieka svarbų vaidmenį analizinėje skaičių teorijoje. Iš Oilerio tapatybės

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

pagal pirminius skaičius p , teisingos pusplokštumėje $\sigma > 1$, yra matomas šios funkcijos ryšys su pirminiais skaičiais. Iš tikrųjų, remiantis funkcijos $\zeta(s)$ nulių išdėstymu, yra įrodomas pirminių skaičių pasiskirstymo dėsnis

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \sim \int_2^x \frac{du}{\log u}, x \rightarrow \infty.$$

Funkcija $\zeta(s)$ yra naudojama sprendžiant daugelį kitų skaičių teorijos ir aplamai matematikos uždavinių. Ji turi pritaikymo ir kituose gamtos moksluose, pavyzdžiui, fizikoje.

Rymano dzeta funkcija turi visą eilę įdomių savybių, apie ją iškelta įvairių hipotezių. Viena funkcijos $\zeta(s)$ savybių, vadinama universalumu, sako, kad kiekvieną analizinę funkciją norimu tikslumu galima aproksimuoti postūmiais $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Šią savybę 1975 m. atrado S. M. Voroninas. Griežtam Voronino teoremos formulavimui yra reikalingi kai kurie žymenys.

Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, $\mathcal{K}$ yra juostos D kompaktinių aibių, turinčių jungųjį papildinį, klasė, o $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, yra funkcijų, tolydžių ir nevirstančių nulių aibėje K , ir analizinių aibės K viduje, klasė. Be to, tegul $meas A$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebegio matas. Tuomet šiuolaikinėje Voronino teoremos versija turi pavidalą.[3]

1.1 teorema. *Tarkime, kad $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su visais $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0; T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Teoremos nelygybė tvirtina, kad postūmių $\zeta(s + i\tau)$, aproksimuojančių duotą analizinę funkciją $f(s)$, aibė yra begalinė, ji netgi turi teigiamą apatinį tankį.

Rymanio dzeta funkcijos apibendrinimas yra Hurvico dzeta funkcija. Tegul α , $0 < \alpha \leq 1$, yra fiksuotas parametras. Tuomet Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}.$$

Ši funkcija, kaip ir funkcija $\zeta(s)$, yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Iš funkcijų $\zeta(s, \alpha)$ ir $\zeta(s)$ apibrėžimų matome, kad $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$ ir

$$\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = (2^s - 1)\zeta(s).$$

Funkcija $\zeta(s, \alpha)$ taip pat yra universali Voronino prasme, tačiau jos universalumas priklauso nuo parametro α ir šiek tiek skiriasi nuo funkcijos $\zeta(s)$ universalumo. Tegul $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, yra funkcijų, tolydžių aibėje K ir analizinių aibės K viduje klasė. Primename, kad skaičius α yra vadinamas transcendenčiuoju, jeigu jis nėra jokio polinomo su racionaliaisiais koeficientais šaknis. Priešingai, jei α yra polinomo su racionaliaisiais koeficientais šaknis, tai jis yra vadinamas algebriniu skaičiumi. Pavyzdžiui, $\sqrt{2}$ yra algebrinis skaičius, o π ir e yra transcendentieji skaičiai. Dabar formuluojuame 1.1 teoremos analogą funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ [2].

1.2 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis arba racionalusis skaičius $\neq 1, \frac{1}{2}$. Tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H(K)$. Tuomet su visais $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Atvejais $\alpha = 1$ ir $\alpha = \frac{1}{2}$ yra išmetami iš 1.2 teoremos, kadangi $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$ ir

$$\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = (2^s - 1)\zeta(s).$$

Šiais atvejais funkcija $\zeta(s, \alpha)$ taip pat yra universali, tiksliai yra reikalaujama, kad aproksimuojama funkcija aibėje K nevirstu nuliumi.

Apskritai, 1.2 teorema skiriasi nuo 1.1 teoremos tuo, kad joje nėra reikalaujama, kad aproksimuojama funkcija netūrėtų nulių. 2007 m. japonų matematikas H. Mišu įrodė [8] įdomią jungtinę universalumo teoremą funkcijoms $\zeta(s)$ ir $\zeta(s, \alpha)$. Šiuo atveju dvi analizinės funkcijos vienu metu yra aproksimuojamos postūmiais $(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha))$, $\tau \in \mathbb{R}$. Tikslus Mišu teoremos formulavimas yra toks.

1.3 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, $f_1(s) \in H_0(K_1)$ ir $f_2(s) \in H(K_2)$. Tuomet su visais $\varepsilon > 0$, yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + i\tau) - f_1(s)| < \varepsilon, \sup_{s \in K_2} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f_2(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Dzeta funkcijų universalumas yra naudinga savybė. Ji yra taikoma ne tik tiesiogiai aproksimuojant analizines funkcijas, bet ir įvairiuose teoriniuose uždaviniuose, pavyzdžiui, nagrinėjant dzeta funkcijų funkcinį nepriklausomumą, nulių pasiskirstymą, momentus. Todėl yra svarbu turėti kuo platesnę universalių funkcijų klasę. Universalių funkcijų klasę galima išplėsti nagrinėjant sudėtinės funkcijas $F(\zeta(s))$ bei $F(\zeta(s, \alpha))$ su kuriuo nors operatoriumi F , apibrėžtu analizinių funkcijų erdvėje.

Magistro darbo tikslas yra įrodyti sudėtinių funkcijų $F(\zeta(s), \zeta(s, \alpha))$ universalumą kai kurioms operatorių klasėms.

Tegul $H(G)$ yra analizinių funkcijų srityje G erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Šioje topologijoje seka $\{g_n(s)\} \subset H(G)$ konverguoja į funkciją $g(s) \subset H(G)$ tada ir tik tada, kai su bet kuria kompleksine aibe $K \subset G$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in K} |g_n(s) - g(s)| = 0.$$

Kai kurie universalumo sudėtinėms funkcijoms $F(\zeta(s), \zeta(s, \alpha))$, kai $F: H^2(D) \rightarrow H(D)$ yra tolydus operatorius, rezultatai buvo aptarti magistro darbuose [6],[7].

Iš pradžių mes nagrinėsime operatorių F , apibrėžtą siauresnėje erdvėje negu $H^2(D)$. Tarkime, kad V yra bet koks teigiamas skaičius,

$$D_V = \left\{ s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1, |t| < V \right\}$$

ir

$$S_V = \{g \in H(D_V) : g^{-1}(s) \in H(D_V) \text{ arba } g(s) \equiv 0\}.$$

Tegul $H^2(D_v, D) = H(D_V) \times H(D)$, čia $\times$ reiškia Dekarto sandaugą.

1.4 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis arba racionalusis skaičius $\neq 1, \frac{1}{2}$, $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H(K)$, o $V > 0$ yra toks skaičius, kad $K \subset D_V$. Tegul $F: H^2(D_V, D) \rightarrow H(D_V)$ yra toks tolydus operatorius, kad su bet koku polinomu $p = p(s)$ aibė $(F^{-1}\{p\}) \cap (S_v \times H(D))$ yra netusčia. Tuomet su bet koku $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Primename, kad $F^{-1}\{p\}$ yra polinomo p pirmavaizdis, t.y., aibė funkcijų, kurias operatorius F atvaizduoja į polinomą p . Nesunku matyti, kad operatorius

$$F(g_1, g_2) = c_1 g_1 + c_2 g_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}\{0\},$$

tenkina 1.4 teoremos sąlygas. Tikrai, jei

$$c_1 g_1(s) + c_2 g_2(s) = p(s)$$

tai

$$g_1(s) = \frac{p(s)}{c_1 - c_2 g_2(s)}.$$

Paėmę $g_2(s) = c$ su pakankamai dideliu $|c|$, turėsime, kad $g_1(s) \in H(D_V)$ ir $g_1(s) \neq 0$, nes polinomas $p(s)$ turi tik baigtinį skaičių šaknų.

Dabar formuluojuame, dar vieną magistro darbo universalumo teoremą. Tarkime, kad $a_1, \dots, a_r$ yra skirtingi kompleksiniai skaičiai. Be to, $S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ arba } g(s) \equiv 0\}$ ir

$$H_r(D) = \{g \in H(D) : (g(S) - a_j)^{-1} \in H(D), j = 1, \dots, r\}.$$

1.5 teorema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis arba racionalusis skaičius $\neq 1, \frac{1}{2}$, $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H(K)$, o $V > 0$ yra toks skaičius, kad $K \subset D_V$. Tegul, $F : H^2(D) \rightarrow H(D)$ yra toks tolydus operatorius, kad $F(S \times H(D)) \supset H_r(D)$. Jei $r = 1$, tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H(K)$ ir $f(s) \neq a_1$ aibėje K . Jei $r \geq 2$, tegul $K \subset D$ yra bet kuri kompaktiška aibė, o $f(s) \in H_r(D)$. Tuomet su bet kokiais $\varepsilon > 0$ teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Pavyzdžiui, paėmę $r = 1$ ir $a_1 = 0$, gauname, kad funkcija $e^{\zeta(s) + \zeta(s, \alpha)}$ yra universalė. Jei $r = 2$ ir $a_1 = 1$, o $a_2 = -1$, tai gauname funkcijos $\sin(\zeta(s) + \zeta(s, \alpha))$ universalumą. 1.4 ir 1.5 teoremų įrodymas remiasi tikimybinėmis ribinėmis teoremomis analizinių funkcijų erdvėje.

2 Tikimybių teorijos elementai

Iš pradžių prisiminsime kai kurias sąvokas ir apibrėžimus. Tarkime, kad X yra kuri nors metrinė erdvė, o $\mathcal{B}(X)$ yra šios erdvės Borelio σ - kūnas, t.y. mažiausias σ - kūnas, kuriam priklauso visos erdvės X atvirosios aibės. Tikimybiniu matu erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$ vadiname neneigiamą aibės funkciją P , apibrėžtą σ - kūne $\mathcal{B}(X)$ ir tenkinančią aksiomas

1. $P(X) = 1$;

2. Jei aibės $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}(X)$ ir kas dvi neturi bendrų elementų, tuomet

$$P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m).$$

Mums bus reikalinga silpnojo tikimybinių matų konvergavimo sąlyga. Tegul P_n , $n \in \mathbb{N}$ ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$. Yra sakoma, kad P_n , kai $n \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į P , jei su bet kokia realiatolydžiai aprėžta funkcija f erdvėje X galioja lygybė

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_x f dP_n = \int_x f dP.$$

Tikimybių teorijoje yra naudojami įvairūs tikimybinių matų silpnojo konvergavimo ekvivalentai. Magistro darbe naudosime tokį ekvivalentą formuluojamą atvirųjų aibių terminais.

2.1 lema. P_n , kai $n \rightarrow \infty$, konverguoja į matą P tada ir tik tada, kai su bet kuria erdvės X atvirąja aibe G yra teisinga nelygybė

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(G) \geq P(G).$$

Lemos įrodymas duotas [1] monografijoje.

Kadangi mes nagrinėjame sudėtines funkcijas, tai mums bus reikalingi silpnojo tikimybinių mato konvergavimo rezultatai, kai tarp dviejų erdvių yra duotas atvaizdis. Tarkime, kad turime dvi metrines erdves, X_1 ir X_2 su jų Borelio σ - kūnais $\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2)$. Yra sakoma, kad atvaizdis $h : X_1 \rightarrow X_2$ yra $(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2))$ matus, jei

$$h^{-1}(\mathcal{B}(X_2)) \subset \mathcal{B}(X_1).$$

Yra įrodoma [1], kad bet kuris tolydus atvaizdis $h : X_1 \rightarrow X_2$ yra ir $(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2))$ matus. Be to, jei h yra matus, tai bet kuris tikimybimis matas erdvėje $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$ apibrėžia vienintelį tikimybinių matą Ph^{-1} erdvėje $(X_2, \mathcal{B}(X_2))$ formule

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A), A \in \mathcal{B}(X_2).$$

Yra teisingas toks tvirtinimas [1].

2.2 lema. *Tarkime, kad P_n , kai $n \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į matą P erdvėje $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$, o atvaizdis $h : X_1 \rightarrow X_2$ yra tolydus. Tuomet ir $P_n h^{-1}$, kai $n \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į matą Ph^{-1} erdvėje $(X_2, \mathcal{B}(X_2))$.*

3 Ribinės teoremos dzeta funkcijoms

Šiame skyrelyje suformuluosime bei įrodysime ribines teoremas tikimybiniam matams, apibrėžtiems funkcijų $\zeta(s)$ ir $\zeta(s, \alpha)$ terminais. Visų pirma apibrėšime dvi topologines struktūras.

Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C}, |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje, apibrėžiamas du begaliniamais torus

$$\Omega_1 = \prod_p \gamma_p \text{ ir } \Omega_2 = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m.$$

Čia $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais skaičiais p , ir $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Aibė Ω_1 yra sudaryta iš visų funkcijų, atvaizduojančių visų pirminių skaičių aibę $\mathcal{P}$ vienetiniame apskritime γ , o aibė Ω_2 yra sudaryta iš visų funkcijų, atvaizduojančių aibę $\mathbb{N}_0$ vienetiniame apskritime γ . Pagal žinomą Tichonovo teoremą [9] aibės Ω_1 ir Ω_2 su sandaugos topologija ir pataškinės daugybos operacija yra kompaktinės topologinės Abelio grupės. Apibrėžiamas dar vienas Dekarto sandauga

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Tuomet Ω vėl pagal Tichonovo teoremą yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ galima apibrėžti tikimybinį Haro matą m_H . Šis matas išsiskiria iš kitų tikimybinių matų invariantiškumo savybe, kuri reiškia, kad su visomis aibėmis $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ ir visais $\omega \in \Omega$ yra teisingos lygybės

$$m_H(A) = m_H(\omega A) = m_H(A\omega).$$

Taigi, turime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega_1(p)$ yra elemento $\omega_1 \in \Omega_1$ projekcija į koordinatinę erdvę $\gamma_p, p \in \mathcal{P}$, o $\omega(m)$ yra elemento $\omega_2 \in \Omega_2$ projekcija į koordinatinę erdvę $\gamma_m, m \in \mathbb{N}_0$. Grupės Ω elementus žymėsime $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$.

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiamas $H^2(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $\underline{\zeta}(s, \omega)$ formule

$$\underline{\zeta}(s, \omega) = (\zeta(s, \omega_1), \zeta(s, \alpha, \omega_2)),$$

čia

$$\zeta(s, \omega_1) = \prod_p \left(1 - \frac{\omega_1(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

ir

$$\zeta(s, \alpha, \omega_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega_2(m)}{(m + \alpha)^s}.$$

Pastebime, kad šiose formulėse sandauga ir eilutė su beveik visais $\omega \in \Omega$, tolygiai konverguoja juostos D kompaktinėse aibėse ir todėl apibrėžia $H^2(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą. Tegul $P_{\underline{\zeta}}$

yra atsitiktinio elemento $\underline{\zeta}(s, \omega)$ pasiskirstymas, t.y. $P_{\underline{\zeta}}$ yra tikimybinis matas, apibrėžtas formule

$$P_{\underline{\zeta}}(A) = m_H(\omega \in \Omega : \underline{\zeta}(s, \omega) \in A), A \in \mathcal{B}(H^2(D)).$$

Dabar formuluojuame ribinę teoremą tikimybiniam matui

$$P_T(A) = \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0; T] : \underline{\zeta}(s + i\tau) \in A\}$$

kai $A \in \mathcal{B}(H^2(D))$, ir

$$\underline{\zeta}(s) = (\zeta(s), \zeta(s, \alpha)).$$

3.1 lema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius. Tuomet, P_T , kai $T \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{\zeta}}$.*

Lemos įrodymas yra duotas [8] straipsnyje.

Dabar įrodysime ribinę teoremą sudėtinei funkcijai.

3.2 lema. *Tarkime, kad operatorius $F : H^2(D) \rightarrow H(D)$ yra tolydus tuomet*

$$P_{T,F}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : F(\underline{\zeta}(s + i\tau)) \in A\}, A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kai $T \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$.

Įrodymas. Iš matų P_T ir $P_{T,F}$ apibrėžimų turime, kad su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(H(D))$

$$\begin{aligned} P_{T,F}(A) &= \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : F(\underline{\zeta}(s + i\tau)) \in A\} = \\ &= \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \underline{\zeta}(s + i\tau) \in F^{-1}A\} = P_T(F^{-1}A), \end{aligned}$$

arba $P_{T,F} = P_T F^{-1}$. Kadangi atvaizdis F yra tolydus, ir pagal 3.1 lemą matas P_T , kai $T \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{\zeta}}$, tai iš 2.2 lemos išplaukia, kad matas $P_{T,F}$, kai $T \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$.

Tegul $V > 0$, o $P_{T,V}$ yra mato P_T siaurinis erdvėje $(H^2(D_V, D), \mathcal{B}(H^2(D_V, D)))$, o $P_{\underline{\zeta},V}$ yra mato $P_{\underline{\zeta}}$ siaurinis toje pat erdvėje. Tuomet yra teisingi tokie tvirtinimai.

3.3 lema. *Matas $P_{T,V}$, kai $T \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į $P_{\underline{\zeta},V}$.*

Įrodymas. Kadangi sritis D_V yra siauresnė už sritį D , tai aišku, kad atvaizdis $h_V : H^2(D) \rightarrow H^2(D_V, D)$, duotas formule

$$h_V(g_1(s), g_2(s)) = (g_1(s)_{s \in D_V}, g_2(s)), g_1, g_2 \in H(D),$$

yra tolydus. Todėl lemos tvirtinimas yra lemų 2.2 ir 3.1 išvada.

3.4 lema. *Tarkime, kad operatorius $F : H^2(D_V, D) \rightarrow H(D_V)$ yra tolydus. Tuomet matas*

$$\frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : F(\underline{\zeta}(s + i\tau)) \in A\}, A \in \mathcal{B}(H(D_V)),$$

kai $T \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{\zeta},V}F^{-1}$.

Įrodymas. Lema, kaip ir 3.3 lema, išplaukia iš 3.1 ir 2.2 lemų.

4 Matų atramos

Universalumo teoremų įrodymui yra reikalingos ribinių matų atramos 3.2 ir 3.4 lemos. Tarkime, kad X yra separabili metrinė erdvė, o P yra tikimybinis matas erdvėje $(X, \mathcal{B}(X))$. Tuomet mato P atrama yra tokia minimali uždara aibė $S_P \subset X$, kad $P(S_P) = 1$. Aibė S_P yra sudaryta iš visų tokių elementų $x \in X$, kad su bet kokia elemento x atvira aplinka G yra teisinga nelygybė

$$P(G) > 0.$$

Mūsų nagrinėjamos erdvės $H(D)$, $H^2(D)$, $H^2(D_V, D)$ yra separabilios, todėl joms tinka tikimybinų matų jose pateiktas atramos apibrėžimas.

Primename, kad

$$S = \{g \in H(D) : g^{-1}(s) \in H(D) \text{ arba } g(s) \equiv 0\}.$$

4.1 lema. *Mato $P_{\underline{\zeta}}$ atrama yra aibė $S \times H(D)$.*

Lemos įrodymas pateiktas [8] straipsnyje.

Svarbu vaidmenį universalumo teoremų įrodyme atlieka Mergeliano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais [5]. Ją formuluojame atskira lema.

4.2 lema. *Tarkime, kad $K \subset \mathbb{C}$ yra kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $g(s)$ yra tolydi aibėje K ir yra analizinė aibės K viduje. Tuomet bet koki $\varepsilon > 0$ atitinka toks polinomas $p(s)$, su kuriuo yra teisinga nelygybė*

$$\sup_{s \in K} |g(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

4.3 lema. *Mato $P_{\underline{\zeta}, V}$ atrama yra aibė $S_V \times H(D)$. Lemos įrodymas pažodžiui pakartoja 4.1 lemos įrodymą [8].*

4.4 lema. *Tarkime, kad yra išpildytos 1.4 teoremos sąlygos. Tuomet, mato $P_{\underline{\zeta}, V} F^{-1}$ atrama yra erdvė $H(D)$.*

Įrodymas. Yra žinoma [4], kad aproksimavimas analizinių funkcijų erdvėje yra suvedamas į aproksimavimą kompaktinėse aibėse. Be to, erdvėse $H(D)$ ir $H(D_V)$ kompaktines aibes galime pasirinkti taip, kad jos turėtų jungiuosius papildinius, pavyzdžiui, galime imti uždarus stačiakampius.

Tegul g yra bet kuris erdvės $H(D_V)$ elementas, o G yra jo bet kuri atviroji aplinka. Tarkime, kad $K \subset D_V$ yra kompaktinis poaibis, turintis jungųjį papildinį.

Remdamiesi 4.2 lema, turime, kad bet kuri $\varepsilon > 0$ atitinka toks polinomas $p(s)$, su kuriuo yra teisinga nelygybė

$$\sup_{s \in K} |g(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

Todėl, jei ε yra pakankamai mažas skaičius, tai galime tvirtinti, kad polinomas $p(s)$ priklauso aibei G . Vadinasi, pagal lemos sąlygą aibei $F^{-1}G$ priklauso kuris nors aibės $S_V \times H(D)$ elementas. Iš čia, 4.3 lemos ir mato atramos savybių gauname, kad

$$P_{\underline{\zeta},V}(F^{-1}G) = P_{\underline{\zeta},V}F^{-1}(G) > 0.$$

Kadangi elementas g ir jo aplinka G yra bet kaip parinkti, iš čia gauname lemos tvirtinimą.

4.5 lema. *Tarkime, kad $F : H^2(D) \rightarrow H(D)$ tenkina 1.5 teoremos sąlygas. Tuomet, mato $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$ atramai priklauso aibės $H_r(D)$ uždarinys. Įrodymas.* Pagal 1.5 teoremos sąlygas turime, kad $F(S \times H(D)) \supset H_r(D)$. Todėl bet kokį elementą $h \in H_r(D)$ atitinka toks elementas $(g_1, g_2) \in S \times H(D)$, kad $F(g_1, g_2) = h$. Tegul G yra bet kuri elemento h atviroji aplinka. Kadangi atvaizdis F yra tolydus, tai aibės G pirmavaizdis $F^{-1}G$ taip pat yra atvira aibė ir jai priklauso aibės $S \times H(D)$ elementas. Todėl pagal 4.1 lema $P_{\underline{\zeta}}(F^{-1}G) > 0$. Iš čia turime, kad

$$P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(G) = P_{\underline{\zeta}}(F^{-1}G) > 0.$$

Tai reiškia, kad elementas h priklauso mato $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$ atramai. Vadinasi, aibė $H_r(D)$ yra mato $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$ atramos poaibis. Tačiau pagal apibrėžimą atrama yra uždara aibė, todėl mato $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$ atramai turi priklausyti aibės $H_r(D)$ uždarinys. Lema įrodyta.

5 Universalumo teoremų įrodymas

Šiame skyriuje pateiksime 1.4 ir 1.5 teoremų, suformuluotų įvade, įrodymus.

1.4 teoremos įrodymas. Dar kartą pasinaudoję 4.2 lema, randame, tokį polinomą $p(s)$ su kuriuo yra teisinga nelygybė

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.1)$$

Apibrėžiame aibę

$$G = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Iš 4.4 lemos išplaukia, kad polinomas $p(s)$ yra mato $P_{\zeta, V} F^{-1}$ atramos elementas. Kadangi G yra polinomo $p(s)$ atvirosi aplinka, tai iš šių pastabų turime, kad $P_{\zeta, V} F^{-1}(G) > 0$. Todėl iš 3.4 ir 2.1 lemų gauname, kad

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \{ \tau \in [0, T] : F(\zeta(s + i\tau)) \in G \} \geq P_{\zeta, V} F^{-1}(G) > 0.$$

Vadinasi, iš aibės G apibrėžimo išplaukia, kad

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} > 0. \quad (5.2)$$

Lieka šioje nelygybėje polinomą $p(s)$ pakeisti funkcija $f(s)$. Tarkime, kad $\tau \in \mathbb{R}$, tenkina nelygybę

$$\sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tuomet, tokiems τ iš (5.1) nelygybės gauname, kad

$$\begin{aligned} & \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - f(s)| \leq \\ & \leq \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - p(s)| + \\ & + \sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ši nelygybė rodo, kad

$$\begin{aligned} & \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \subset \\ & \subset \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Todėl iš (5.2) nelygybės ir mato monotoniškumo galutinai gauname

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Teorema įrodyta.

1.5 teoremos įrodymas. Atskirai nagrinėsime atvejus $r = 1$ ir $r \geq 2$.

Tegul $r = 1$. Tuomet, pagal 4.2 lemą egzistuoja toks polinomas $p(s)$, kad

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5.3)$$

Kadangi $f(s) \neq a_1$ aibėje K , tai turime, kad ir $p(s) \neq a_1$ aibėje K , jeigu ε yra pakankamai mažas skaičius. Todėl galime apibrėžti tolydžią funkcijos $\log(p(s) - a_1)$ šaką, kuri bus analizinė funkcija aibės K viduje. Dar kartą pritaikę 4.2 lemą, randame polinomą $q(s)$, su kuriuo galioja nelygybė

$$\sup_{s \in K} |p(s) - a_1 - e^{q(s)}| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5.4)$$

Tegul trumpumo dėlei $h_{a_1}(s) = e^{q(s)} + a_1$. Aišku, kad $h_{a_1}(s) = H(D)$ ir $h_{a_1}(s) \neq a_1$, nes $e^{q(s)} \neq 0$. Pagal 4.5 lemą tai reiškia, kad funkcija $h_{a_1}(s)$ yra mato $P_{\zeta}F^{-1}$ atramos elementas.

Todėl, apibrėžę aibę

$$G_1 = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - h_{a_1}(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

kuri yra funkcijos $h_{a_1}(s)$ atviros aplinka, gauname, kad $P_{\zeta}F^{-1}(G_1) > 0$. Iš čia ir 3.2 bei 2.1 lemų gauname, kad

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - h_{a_1}(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} > 0. \quad (5.5)$$

Iš (5.3) ir (5.4) nelygybių gauname, kad

$$\sup_{s \in K} |f(s) - h_{a_1}(s)| \leq \sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| + \sup_{s \in K} |p(s) - h_{a_1}(s) - e^{q(s)}| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.6)$$

Tarkime, kad $\tau \in \mathbb{R}$ tenkina nelygybę

$$\sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - h_{a_1}(s)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tuomet, atsižvelgę į (5.6), tiems τ turime, kad

$$\begin{aligned} & \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - f(s)| \leq \\ & \leq \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - h_{a_1}(s)| + \sup_{s \in K} |f(s) - h_{a_1}(s)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Todėl turime sąryšį

$$\begin{aligned} & \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - h_{a_1}(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \subset \\ & \subset \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Iš čia bei (5.5) ir mato monotoniškumo gauname teoremos tvirtinimą

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Atvejis $r \geq 2$ yra paprastesnis. Apibrėžiame aibę

$$G_2 = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Kadangi funkcija $f(s) \in H_r(D)$, tai pagal 4.5 lemą ji yra mato $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$ atramos elementas, vadinasi $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}(G_2) > 0$. Iš čia ir 3.4 bei 2.1 lemy turime

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Teorema įrodyta.

Išvados

Yra žinoma, kad Rymano $\zeta(s)$ ir Hurvico $\zeta(s, \alpha)$ funkcijos universalios ta prasme, kad jų postūmiai aproksimuoja plačią funkcijų klasę. Šioms dviem funkcijoms galioja ir jungtinė universalumo teorema. Magistro darbe nustatyta, kad kai kurioms tolydžių operatorių F analizinių funkcijų erdvėje klasei sudėtine funkcija $F(\zeta(s), \zeta(s, \alpha))$ taip pat yra universali.

Literatūra

- [1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Willey, New York, 1968, Second ed., Wiley-Interscience, 1999.
- [2] S. M. Gonek, *Analytic properties of zeta and L- Functions*, Thesis, University of Michigan, 1979.
- [3] A. Laurinćikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta - Functions*, Kluwer, Dordrecht, 1996.
- [4] A. Laurinćikas, *Universality of composite functions*, Functions in Number Theory and Their Probabilistics Aspects, RIMS Kokyuroku, 2012, P. 191–204.
- [5] S. N. Mergelian, *Uniform approximation to functions of complex variable*, Ups. Mat. Wauk 7, 1952, p. 31-122 in Russian.
- [6] L. Meška, *Jungtinio Hurvico dzeta funkcijų universalumo išvados*, Magistro darbas, ŠU, Šiauliai, 2013.
- [7] A. Miltinienė, *Kai kurių sudėtinių funkcijų universalumas*, Magistro darbas, ŠU, Šiauliai, 2013.
- [8] H. Mishou, *The joint value - distribution of the Riemann zeta- function and Hurwitz zeta- functions*, Lith. Math. J. **47**, 2007, p. 32-47.
- [9] V. Paulauskas, A. Račkauskas, *Funkcinė analizė I knyga* Erdvės, UAB "Vaistų žinios", Vilnius, 2007.

Summary

A Generalization of the Mishou Universality Theorem

Let $s = \sigma + i\tau$ be a complex variable, and α , $0 < \alpha \leq 1$, be a fixed parameter. The Riemann and Hurwitz zeta - functions $\zeta(s)$ and $\zeta(s, \alpha)$ are defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

and

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s},$$

and were meromorphically continued to the whole complex plane.

It is known that functions $\zeta(s)$ and $\zeta(s, \alpha)$ are universal in the sense of that, their shifts $\zeta(s+i\tau)$ and $\zeta(s+i\tau, \alpha)$ approximate every analytic function. H. Mishou proved joint universality theorem on the approximation of a pair of analytic functions by shifts $(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau, \alpha))$.

In the masters degree work, we consider the universality of composite functions $F(\zeta(s), \zeta(s, \alpha))$ for some operators F . Let $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, $H(D)$ be the square of analytic functions on D equipped with the topology of uniform convergence on compact. Let $\mathcal{K}$ be the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and let $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, be the class of continuous functions on K which are analytic in the interior of K . For complex numbers $a_1, \dots, a_r$ define

$$H_r(D) = \{g \in H(D) : (g(s) - a_j)^{-1} \in H(D), j = 1, \dots, r\}.$$

and let

$$S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ or } g(s) \equiv 0\}$$

Then one of proved theorems is of the following form.

Theorem. Suppose that α is transcendental or rational number $\neq 1, \frac{1}{2}$, and that $F(S \times H(D)) \supset H_r(D)$. If $r = 1$, let $K \in \mathcal{K}$, and $f(s) \in H(K)$ and $f(s) \neq a_1$ on K . If $r \geq 2$, let $K \subset D$ be an arbitrary compact set, and $f(s) \in H_r(D)$. Then for every $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau, \alpha)) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$