ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
INFORMATIKOS, MATEMATIKOS IR E. STUDIJŲ INSTITUTAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Ieva Žalytė

Diskrečioji ribinė teorema su svoriu periodinei Hurvico dzeta funkcijai

Magistro darbas

Darbo vadovė
prof. dr. Roma Kačinskaitė

Šiauliai, 2015

Turinys

1. Įvadas 3

2. Periodinė Hurvico dzeta ir svorio funkcijos 6

   2.1. Periodinė Hurvico dzeta funkcija 6

   2.2. Svorio funkcija 8

3. Pagrindinės teoremos formulavimas 9

4. Pagrindinės teoremos įrodymas 10

   4.1. Diskreti ribinė teorema su svoriu tore 10

   4.2. Diskreti ribinė teorema su svoriu absoliučiai konverguojančioms eilutėms 13

   4.3. Aproksimavimas vidurkiu 15

   4.4. 1 teoremos įrodymas 18

5. Išvados 21

6. Santrauka 22

7. Summary 23

Literatūra 24

Žymėjimai 26

1. Įvadas

Skaičių teorijoje viena iš žinomiausių ir daugiausiai tyrinėtų yra Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$. Ji pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą $\mathbb{C}$, $s = 1$ yra jos paprastasis polius su reziduumu 1.

Tarp dzeta fukcijų yra tokių, kurių statistinės savybės priklauso nuo tam tikrų parametrų, įeinančių į jų apibrėžimą, aritmetinės prigimties. Viena iš jų yra Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s,\alpha)$. Sakykime, kad α yra fiksuotas parametras, $0 < \alpha \leq 1$. Pusplokštumėje $\sigma > 1$ funkcija $\zeta(s,\alpha)$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą išskyrus paprastąjį polių su reziduumu 1 taške $s = 1$. Kai parametras $\alpha = 1$, Hurvico dzeta funkcija tampa Rymano dzeta funkcija, o, kai $\alpha = \frac{1}{2}$, ji yra užrašoma

$$\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = 2^s L(s,\chi);$$

čia $L(s,\chi)$ yra Dirichlė L funkcija, χ – charakteris mod 2. Kai $\alpha = \frac{a}{q}$, $a, q \in \mathbb{N}$, yra racionalusis skaičius, kuris nelygus nei $\frac{1}{2}$, nei 1, Hurvico dzeta funkciją galime išreikšti Dirichlė L funkcijų tiesine kombinacija

$$\zeta\left(s, \frac{a}{q}\right) = q^s \sum_{\chi} \chi(a) L(s,\chi);$$

čia χ Dirichlė charakteris moduliu q [5]. Bendru atveju funkcija $\zeta(s,\alpha)$ neturi išraiškos Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius. Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ statistinės savybės priklauso nuo parametro α aritmetinės prigimties. Paprasčiausias atvejis – kai α yra transcendentusis arba racionalusis skaičius.

Dar viena iš dzeta funkcijų, kurios elgesį įtakoja parametras – dzeta funkcija su periodiniais koeficientais, kurią 2006 m. apibrėžė A. Javtokas ir A. Laurinčikas [4]. Tegul $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ yra periodinė su mažiausiu periodu $k \in \mathbb{N}$ kompleksinių skaičių a_m seka, o $\alpha \in (0,1]$ yra fiksuotas parametras. Tada pusplokštumėje $\sigma > 1$

Dirichlė eilute galima apibrėžti tokią dzetą funkciją

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s}. \tag{1}$$

Ji yra vadinama periodine Hurvico dzeta funkcija.

Dzeta funkcijų asimptotinį elgesį galima aprašyti ribinėmis teoremomis silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme įvairiose funkcinėse erdvėse. $\mathcal{B}(S)$ pažymėkime erdvės S Borelio aibių klasę. Tegul P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S,\mathcal{B}(S))$. Tuomet tikimybinis matas P_n silpnai konverguoja į P, kai $n \to \infty$, jeigu teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f dP_n = \int_S f dP$$

visoms aprėžtoms, tolydžioms funkcijoms $f : S \to \mathbb{R}$.

Tolydžias ribines teoremas Hurvico dzeta funkcijai racionaliojo arba transcendenčiojo parametro α atžvilgiu įrodė A. Laurinčikas ir R. Garunkštis [7]. Periodinės Hurvico dezta funkcijos reikšmių pasiskirstymą nagrinėjo A. Javtokas, R. Kačinskaitė, A. Laurinčikas, R. Macaitienė, L. Stancevičiūtė ir kiti matematikai (žr. [3], [5], [8], [13]).

Ribinę teoremą su svoriu Hurvico dzeta funkcijai įrodė A. Makulavičius [10], o periodinei Hurvico dzeta funkcijai įrodė O. Lukašonok [9].

Sakykime, kad $w(t)$ yra teigiama aprėžtos variacijos funkcija intervale $[T_0, \infty]$, $T_0 > 0$, tokia, kad

$$\lim_{T\to\infty} U(T, w) = \lim_{T\to\infty} \int_{T_0}^{T} w(t)dt = +\infty.$$

Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$, $\sigma \neq 1$ ir visiems $v \in \mathbb{R}$ teisingas įvertis

$$\int_{T_0+v}^{T+v} w(u-v)|\zeta(\sigma + it, \alpha; \mathbf{a})|^2 dt \ll U(1 + |w|) \tag{2}$$

A teorema. Sakykime, kad α yra transcendentusis ir $\sigma > \frac{1}{2}$, o svorio funkcija tenkina (2) sąlygą. Tada erdvėje $(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas P toks, kad matas, kai $T \to \infty$,

$$\frac{1}{U} \int_{T_0}^{T} w(t) \mathbb{I}_{\{t:\zeta(\sigma+it,\alpha;\mathbf{a})\in A\}} dt, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$$

silpnai į jį koverguoja ($\mathbb{I}_A(t)$ žymi aibės A indikatorių).

Magistro darbo tikslas – įrodyti diskrečiąją ribinę teoremą su svoriu periodinei Hurvico dzeta funkcijai su transcendenčiuoju parametru α kompleksinėje plokštumoje be išreikštinio mato pavidalo. Ją suformuluosime 3 skyriuje.

Darbas yra sudarytas iš Įvado, 4 skyrių, išvadų, literatūros sąrašo, santraukos lietuvių bei anglų kalbomis bei naudojamų žymėjimų paaiškinimo. 4 skyriaus poskyrių pradžioje yra pateikiami sąvokų apibrėžimai bei žinomi rezultatai, kuriais vėliau pasinaudojame įrodant pagalbinius teiginius, reikalingus pagrindinės teoremos įrodymui.

2. Periodinė Hurvico dzeta ir svorio funkcijos

2.1. Periodinė Hurvico dzeta funkcija

Nagrinėkime (1) formule apibrėžtą kompleksines reikšmes įgyjančią dzeta funkciją $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$. Kadangi seka $\mathbf{a}$ yra periodinė, tai pusplokštumėje $\sigma > 1$ periodinę Hurvico dzeta funkciją galima užrašyti klasikinių Hurvico dzeta funkcijų tiesine kombinacija, t.y.

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \frac{1}{k^s} \sum_{r=0}^{k-1} a_r \zeta\left(s; \frac{r+\alpha}{k}\right). \tag{3}$$

Pažymėkime

$$a := \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} a_l.$$

Žinome, kad funkcija $\zeta(s, \alpha)$ turi paprastajį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Todėl (3) lygybės pagalba periodinė Hurvico dzeta funkcija yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus gal būt paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu a. Tuomet, jei $a = 0$ funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ yra analizinė visoje baigtinėje s-plokštumoje, t.y. funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ yra sveikoji funkcija.

Pateiksime keletą periodinės Hurvico dezta funkcijos sąryšių su kitomis dzeta funkcijomis.

Jei $\{a_m\} = \{1\}$ ir periodas $k = 1$, tai $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ yra Hurvico zeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$.

Sakykime, kad seka $\mathbf{a}_l = \{\exp(\frac{2\pi i l m}{k}), m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $(l, k) = 1$, yra periodinė su periodu k. Tada, jei $\mathbf{a} = \mathbf{a}_l$, tai $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ tampa Lercho dzeta funkcija su racionaliu parametru λ, t.y.

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp(2\pi i \lambda m)}{(m+\alpha)^s}, \quad \sigma > 1.$$

Viena iš įdomiausių dzeta ir L funkcijų savybių yra universalumas. 1975 m. S.M. Voroninas įrodė [14], kad kiekviena analizinė nevirstanti nuliu funkcija kompaktiniuose poaibiuose gali būti aproksimuojama Rymano dzeta funkcijos postūmiais. Egzistuoja Liniko-Ibrahimovo hipotezė teigianti, kad visos funkcijos, kurios tam tikroje pusplokštumėje yra apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis, analiziškai pratęsiamos į kairę absoliutaus konvergavimo pusplokštumę ir tenkinančios tam tikras augimo sąlygas, yra universalios.

Periodinės Hurvico dzeta funkcijos universalumą įrodė A. Laurinčikas ir A. Javtokas [4].

B teorema. *Tegul* α *yra trancententusis skaičius ir* $\min_{0 \le m \le k-1} |a_m| > 0$*. Tarkime, kad* K *yra kompaktiška juostos* $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ *aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija* $f(s)$ *yra tolydi aibėje* K *ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathbf{a}) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Čia $meas\{A\}$ pažymi mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą.

Universalumo nelygybė parodo, kad postūmių aibė turi teigiamą apatinį tankį.

2.2. Svorio funkcija

Tarkime duota funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pažymėkime $P = \{x_0, ..., x_n\}$ intervalo $[a, b]$ skaidinį, o

$$\triangle f_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Apibrėžimas. Funkcijos f pilnąja variacija intervale $[a, b]$ vadiname skaičių

$$v(f; a, b) := \sup \sum_i |f(x_i) - f(x_i - 1)|;$$

čia tikslųjį viršutinį rėžį skaičiuojame visų intervalo $[a, b]$ skaidinių atžvilgiu. Funkcija vadinama baigtinės variacijos funkcija, jei jos pilnoji variacija yra baigtinė.

$w(f)$ žymėsime baigtinės variacijos intervale $[0, \infty)$ funkciją. Jeigu $w(f) < +\infty$, tai funkciją f vadinsime aprėžtos intervale $[a, b]$ variacijos funkcija.

C teorema. *Jeigu $f = (f_1, ..., f_k)$ yra intervalo $[a, b]$ atvaizdavimas erdvėje $\mathbb{R}^k$, tai f yra aprėžtos intervale $[a, b]$ variacijos funkcija tada ir tik tada, kai kiekviena funkcija f_i yra aprėžtos intervale $[a, b]$ variacijos funkcija. Tada teisingas sąryšis*

$$w(f_i) \leq w(f) \leq \sum_{r=1}^{k} w(f_r),$$

su $1 \leq j \leq k$.

D teorema. *Jeigu f yra realioji aprėžtos intervale $[a, b]$ variacijos funkcija, tai egzistuoja tokios monotoniškai didėjančios intervale $[a, b]$ funkcijos p ir q, tokios kad $p(a) = q(a) = 0$ ir*

$$f(x) - f(a) = p(x) - q(x),$$

ir

$$v_f = p(x) + q(x),$$

kai $a \leqslant x \leqslant b$.

Funkcijas p ir q vadinsime funkcijos f atitinkamai teigiamos ir neigiamos variacijų funkcijomis. Matome, kad funkciją f galime užrašyti dviejų monotoninių funkcijų skirtumu.

C ir D teoremų įrodymus galima rasti [12].

3. Pagrindinės teoremos formulavimas

Sakykime, kad α yra transcendentusis skaičius, o $h > 0$ yra fiksuotas skaičius toks, kad $\exp\left(\frac{2\pi}{h}\right)$ yra racionalus.

Tarkime, kad $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sakykime, kad $w(l)$ yra realioji baigtinės variacijos intervale $[0, \infty)$ funkcija, tokia kad, kai $N \longrightarrow \infty$,

$$U = U(N, w) = \sum_{l=0}^{N} w(l) \longrightarrow \infty.$$

Tarkime, kad

$$\mu_{N,w}(A) = \frac{1}{U} \sum_{\substack{l=0 \\ \cdots}}^{N} w(l), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C});$$

vietoje daugtaškio įrašysime sąlygas, kurios tenkina l.

$P_{N,w}(A)$ pažymėkime tikimybinį matą erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, t. y.

$$P_{N,w}(A) = \mu_{N,w}(\zeta(\sigma + ilh, \alpha; \mathbf{a})) \in A, \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

Sakykime, kad svorio funkcija $w(l)$ ir periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ tenkina įvertį

$$\int_{\tau}^{T+\tau} w(t - \tau)|\zeta(\sigma + it, \alpha; \mathbf{a})|^2 dt = O(T(1 + |\tau|)) \tag{4}$$

su realiuoju τ.

1 teorema. *Sakykime, kad α, h, funkcijos $w(l)$ ir $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ tenkina anksčiau išvardintas sąlygas. Kai $\sigma > \frac{1}{2}$, erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas P, į kurį, kai $N \longrightarrow \infty$, silpnai konverguoja tikimybinis matas $P_{N,w}(A)$.*

4. Pagrindinės teoremos įrodymas

4.1. Diskreti ribinė teorema su svoriu tore

Apibrėžimas. Sakykime, kad Ω yra netuščia aibė. Tada Ω poaibių šeima F yra vadinamas Borelio kūnu (σ-kūnu), jeigu:

1. $\Omega \in F$,

2. $A^c \in F$, su $A \in F$,

3. $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in F$, su $A_m \in F$, $m = 1, 2, ...$

Apibrėžimas. Neneigiama funkcija P apibrėžta šeimoje F ir tenkinanti sąlygas:

1. $P(\Omega) = 1$,

2. $P(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m)$ visoms $A_m \in F$ tokioms, kad $A_k \bigcap A_l = \varnothing$, jei $k \neq l$

vadinama tikimybiniu matu.

Apibrėžimas. Sakykime, kad A yra aibių sistema. Mažiausias Borelio kūnas, kuriam priklauso A yra vadinamas Borelio kūnu sugeneruotu sistemos A.

Apibrėžimas. Aibė $A \subset S$ vadinama kompaktiška, jeigu kiekvienas jos atviras denginys turi baigtinį denginį.

Apibrėžimas. Borelio matas P, apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje grupėje G vadinamas invariantiniu, jeigu $P(A) = P(xA) = P(Ax)$ visiems $A \in \mathcal{B}(G)$ ir $x \in G$.

Apibrėžimas. Invariantinis Borelio matas, apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje grupėje, vadinamas Haro matu.

Apibrėžimas. Tikimybinio mato Q Furjė transformacija $g(k_1, ..., k_m)$ apibrėžiama formule

$$g(k_1, ..., k_m) = \int_{\gamma^m} x_1^{k_1} ... x_m^{k_m} dQ;$$

čia $k_j \in \mathbb{Z}, x \in \gamma, j = 1, ..., m$.

Sakykime, kad γ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje, t.y.

$$\gamma_m = \gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}.$$

γ^m pažymėkime m vienetinių apskritimų γ Dekarto sandaugą.

1 lema. *Tegul $\{Q_n\}$ yra tikimybinių matų erdvėje $(\gamma^m,\mathcal{B}(\gamma^m))$ seka, o $\{g_n(k_1, ..., k_m)\}$ - atitinkamų Furjė transformacijų seka. Sakykime, kad kiekvienai sveikųjų skaičių sekai*

$(k_1, ..., k_m)$ egzistuoja riba

$$g(k_1, ..., k_m) = \lim_{n\to\infty} \{g_n(k_1, ..., k_m)\}.$$

Tada erdvėje $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$ egzistuoja tikimybinis matas Q toks kad, kai $n \to \infty$, tikimybinis matas Q_n silpnai konverguoja į Q. Be to, $g(k_1, ..., k_m)$ yra mato Q Furjė transformacija.

Teoremos įrodymą galima rasti [6] (1.3.19 teorema) arba [2] (1.4.2 teorema) šaltiniuose.

Apibrėžkime torą

$$\Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m;$$

čia $\gamma_m = \gamma$ visiems $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ apibrėžiame Haro matą m_H, tokiu būdu gaudami tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

Sakykime, kad

$$Q_{N,w}(A) = \mu_{N,w}(((m+\alpha)^{-ilh} : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega),$$

yra tikimybinis matas erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$.

2 teorema. *Tarkime, kad α ir h yra tokie patys kaip ir 1 teoremoje. Tada tikimybinis matas $Q_{N,w}(A)$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.*

Įrodymas. Duali grupė Ω yra izomorfinė

$$\bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathbb{Z}_m;$$

čia $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}$ visiems $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Elementas $\underline{k} = \{k_m : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \in \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathbb{Z}_m$ yra atvaizduojamas į Ω tokiu būdu

$$\omega \to \omega^{\underline{k}} = \prod_{m=0}^{\infty} \omega^{k_m}(m);$$

čia $\omega(m)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ir tik baigtinis kiekis sveikųjų skaičių k_m yra nenuliai. Mato $Q_{N,w}$ Furjė transformacija $g_{N,w}(\underline{k})$ yra apibrėžiama

$$g_{N,w}(\underline{k}) = \int_{\Omega} \prod_{m=0}^{\infty} \omega^{k_m}(m) dQ_{N,w};$$

čia tik baigtinis skaičius sveikųjų k_m yra nenuliai. Todėl iš $Q_{N,w}$ apibrėžimo gauname

$$g_{N,w}(\underline{k}) = \frac{1}{U} \sum_{l=0}^{N} w(l) \prod_{m=0}^{\infty} (m+\alpha)^{-ik_m lh} = \frac{1}{U} \sum_{l=0}^{N} w(l) \exp\Big\{ -ilh \sum_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha) \Big\}. \quad (5)$$

Kadangi α yra trancendentusis skaičius, aibė $\{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių lauko $\mathbb{Q}$. Todėl $\sum_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha) = 0$ tada ir tik tada, kai $\underline{k} = \underline{0}$. Be to

$$\exp\Big\{ \sum_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha) \Big\} = \prod_{m=0}^{\infty} (m+\alpha)^{k_m}$$

yra iracionalusis. Pagal h pasirinkimą, $\exp\{2\pi r/h\}$ yra racionalus skaičius visiems $r \in \mathbb{Z}$. Iš čia seka, kad, kai $\underline{k} \neq \underline{0}$,

$$\exp\Big\{ -ih \sum_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha) \Big\} \neq 1.$$

Be to, atsižvelgus į funkcijos $w(l)$ apibrėžimą, iš (5) lygybės seka, kad, kai $\underline{k} \neq \underline{0}$,

$$\sum_{l=0}^{N} w(l) \exp\{-ilh \sum_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha)\} =$$
$$= O\Big(\Big| U \sum_{m=0}^{\infty} k_m \log(m+\alpha) \Big|^{-1} \Big);$$

čia, kaip ir anksčiau tik baigtinis skaičius k_m yra nenuliai.

Vadinasi, iš (5) turime

$$\lim_{N\to\infty} g_{N,w}(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{kai } \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{kai } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Pritaikius 1 lemą, matas $Q_{N,w}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.

4.2. Diskreti ribinė teorema su svoriu absoliučiai konverguojančioms eilutėms

Silpnas tikimybinių matų konvergavimas gali būti užrašomas ekvivalenčiomis išraiškomis.

2 lema. *Sakykime, kad P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Tada šie teiginiai yra ekvalentūs:*

1. $P_n \Rightarrow P$;

2. $\int_S f dP_n \to \int_S f dP, \quad n \to \infty,$ *kiekvienai realiai aprėžtai funkcijai f iš S*;

3. $\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A),$ *visoms mato P tolydumo aibėms*;

4. $\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G),$ *visoms atviroms aibėms G*;

5. $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F),$ *visoms uždaroms aibėms F*;

Tai 2.1 teorema iš [1].

3 lema. *Tegul $u : S_1 \to S_2$ yra tolydusis atvaizdis ir P_n silpnai konverguoja į P, kai $n \to \infty$. Tada ir $P_n u^{-1}$ silpnai konverguoja į Pu^{-1}.*

Tai atskiras 5.1 teoremos iš [1] atvejis.

Sakykime, kad $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius, o $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Apibrėžkime

$$v_n(m, \alpha) = \exp\left\{-\left(\frac{m+\alpha}{n+\alpha}\right)^{\sigma_1}\right\},$$

ir

$$\zeta_n(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m v_n(m, \alpha)}{(m+\alpha)^s}. \tag{6}$$

Buvo įrodyta [4], kad pastaroji eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$.

3 teorema. *Tarkime, kad α, h ir $w(l)$ yra tokie patys kaip 1 teoremoje. Tuomet, kai $N \to \infty$, tikimybinis matas*

$$P_{N,w,n}(A) := \mu_{N,w}(\zeta_n(s + ilh, \alpha; \mathbf{a}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$$

silpnai konverguoja į tam tikrą tikimybinį matą P_n apibrėžtą erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$.

Įrodymas. Funkciją $u_n : \Omega \to \mathbb{C}$ apibrėžkime formule

$$u_n(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \omega(m) v_n(m,\alpha)}{(m+\alpha)^s}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Ji yra tolydi, nes (6) eilutė konverguoja absoliučiai, o pastaroji eilutė dar ir tolygiai pagal ω pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$. Kadangi

$$u_n(\{(m+\alpha)^{-ihl} : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}) = \zeta_n(s+ilh, \alpha; \mathbf{a}),$$

todėl $P_{N,w,n} = Q_{N,w} u_n^{-1}$. Be to, pritaikę 2 ir 3 lemas, gauname, kad matas $P_{N,w,n}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į $m_H u_n^{-1}$.

Teorema įrodyta.

4.3. Aproksimavimas vidurkiu

Nuo absoliučiai konverguojančios eilutės $\zeta_n(s, \alpha; \mathbf{a})$ reikia pereiti prie $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$. Tam panaudosime aproksimavimą vidurkiu.

4 lema *(Melino transformacijos formulė). Visiems teigiamiems a ir b teisinga lygybė*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\Gamma(s)a^{-s}ds = e^{-a}.$$

Ši lema yra 5.4.1 iš [6].

5 lema *(Koši integralinė formulė). Jei funkcija $f(s)$ yra vienareikšmė ir analizinė srityje G, o $\mathbb{L}$ yra uždaroji ištiesinamoji Žordano kreivė, priklausanti sričiai G kartu su vidine sritimi D, tai*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{L}}\frac{f(s)ds}{s-a} = \begin{cases} f(a), & \text{kai } a \in D\,, \\ 0, & \text{kai } a \in G\backslash\overline{D}\,. \end{cases}$$

Tai 3.12 teorema iš [11].

6 lema *(reziduumų teorema). Jei funkcija $f(s)$ yra analizinė uždaroje srityje $\overline{D}$ išskyrus baigtinį skaičių izoliuotųjų ypatingųjų taškų $s_1, s_2, ..., s_n$ srities D viduje, tai*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta D} = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}_{s=s_k}f(s).$$

Tai 5.10 teorema iš [12].

4 teorema. *Sakykime, kad α, h ir $w(l)$ yra tokie patys kaip ir 1 teoremoje, o $\sigma > \frac{1}{2}$. Tada*

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N}w(l)|\zeta(s+ilh, \alpha; \mathbf{a}) - \zeta_n(s+ilh, \alpha; \mathbf{a})| = 0.$$

Įrodymas. Žinoma [4], kad teisingas įvertis

$$\int_0^T|\zeta(\sigma+it, \alpha; \mathbf{a})|^2dt = O(T).$$

Pasinaudojus 5 lema, tokiems pat σ turime

$$\int_0^T |\zeta'(\sigma+it,\alpha;\mathbf{a})|^2 dt = O(T). \tag{7}$$

Sakykime, kad $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ yra toks pat, kaip ir anksčiau, fiksuotas skaičius. Pažymėkime

$$l_n(s,\alpha) = \frac{s}{\sigma_1}\Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right)(n+\alpha)^s;$$

čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija.

Pritaikius 4 lemą, funkciją $\zeta_n(s,\alpha;\mathbf{a})$ galime užrašyt taip

$$\zeta_n(s,\alpha;\mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \zeta(s+z,\alpha;\mathbf{a}) l_n(z,\alpha)\frac{dz}{z}.$$

Sakykime, kad $\frac{1}{2} < \sigma_2 < 1$ ir $\sigma_2 < \sigma$. Pritaikius 6 lemą ir pastumdami integravimo tiesę į kairę, gauname

$$\zeta_n(s,\alpha;\mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-\sigma-i\infty}^{\sigma_2-\sigma+i\infty} \zeta(s+z,\alpha;\mathbf{a}) l_n(z,\alpha)\frac{dz}{z} + R_n(s,\alpha;\mathbf{a});$$

čia $R_n(s,\alpha;\mathbf{a}) = \mathrm{Res}_{z=1-s}\zeta(s+z,\alpha;\mathbf{a})l_n(z,a)z^{-1}$ (jei $a=0$, tai ir $R_n(s,\alpha;\mathbf{a})=0$).

Pritaikius 5 lemą ir atsižvelgdami į (4) įvertį gauname

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N} w(t)|\zeta(\sigma+it,\alpha;\mathbf{a}) - \zeta_n(\sigma+it,\alpha;\mathbf{a})| \\
&\ll \frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N} |R_n(\sigma+it+ilh,\alpha;\mathbf{a})| + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau,\alpha)\left(\frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N} w(l)|\zeta(\sigma_2+it+ilh+i\tau,\alpha;\mathbf{a})|\right)d\tau.
\end{aligned} \tag{8}$$

Žinome [8], kad galioja įverčiai

$$\sum_{l=0}^{N} |R_n(\sigma+it+ilh,\alpha;\mathbf{a})| = o(N). \tag{9}$$

ir

$$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N} |\zeta(\sigma_2+it+ilh+i\tau,\alpha;\mathbf{a}| \ll 1+|\tau| \tag{10}$$

Iš gautų (8), (9), (10) bei (4) turime

$$\frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N} w(l)|\zeta(\sigma+it,\alpha;\mathbf{a}) - \zeta_n(\sigma+it,\alpha;\mathbf{a})|$$

$$\ll \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_2 - \sigma + i\tau, \alpha)|(1 + |\tau|)d\tau + o(1) \tag{11}$$

Kadangi $\sigma_2 - \sigma < 0$, iš $l_n(s, \alpha)$ apibrėžimo seka, kad

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_2 - \sigma + i\tau, \alpha)|(1 + |\tau|)d\tau = 0.$$

Tuomet, pritaikius (11) įvertį, gauname teoremos tvirtinimą.

4.4. 1 teoremos įrodymas

Apibrėžimas. Tikimybinių matų šeima $\{P\}$ erdvėje $(S,\mathcal{B}(S))$ yra vadinama realiatyviai kompaktiška, jeigu bet kokia šeimos $\{P\}$ seka turi silpnai konverguojantį posekį.

Apibrėžimas. Erdvėje $(S,\mathcal{B}(S))$ apibrėžtų tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra vadinama suspausta, jeigu bet kokiam $\varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktiška aibė K tokia, kad $P(K) > 1-\varepsilon$ visiems P iš $\{P\}$.

7 lema *(Čebyševo nelygybė). Tegul X yra realiąją reikšmę įgyjantis atsitiktinis dydis, $u : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ yra neigiama funkcija ir $a > 0$. Tada .*

$$P\{w \in \Omega : u(X) \geq a\} \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}u(X). \tag{12}$$

Daugiau apie Čebyševo nelygybę galima sužinoti [11].

8 lema. *Jei tikimybinių matų šeima P yra suspausta, tai ji yra realiatyviai kompaktiška.*

9 lema. *Tegul S yra separabili pilna metrinė erdvė. Jei tikimybinių matų šeima $\{P\}$ erdvėje $(S,\mathcal{B}(S))$ yra realiatyviai kompaktiška, tai ji yra suspausta.*

Šios dvi lemos yra Prochorovo teoremos. Jų įrodymus rasti galima [1].

10 lema. *Tarkime, kad $X_{kn} \xrightarrow{D} X_k$, kai $n \to \infty$, kiekvienam k ir $X_k \xrightarrow{D} X$, kai $k \to \infty$. Jeigu kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\rho(X_{kn}, Y_n) \geq \varepsilon\} = 0,$$

tada $Y_n \xrightarrow{D} X, n \to \infty$

Tai 4.2 teoema iš [1].

Dabar esame pasiruošę įrodyti pagrindinę darbo teoremą, t.y. 1 teoremą. Priminsime, kad reikia įrodyti mato $P_{N,w}(A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$, silpną konvergavimą į matą, egzistuojantį erdvėje $(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$.

3 teoremoje buvo įrodyta, kad erdvėje $(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$ tikimybinis matas $P_{N,w,n}(A)$ silpnai konverguoja į tam tikrą tikimybinį matą P_n.

Tegul $X_n(\sigma)$ yra kompleksines reikšmes įgyjantis atsitiktinis elementas erdvėje $(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$, o jo skirstinys yra P_n. Be to, Θ_N tegul yra atsitiktinis kintamasis apibrėžtas tam tikroje tikimybinėje erdvėje $(\widehat{\Omega},\mathcal{B}(\widehat{\Omega}),\mathbb{P})$ ir jo skirstinys yra

$$\mathbb{P}(\Theta_N = lh) = \frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N} w(l), \quad l = 0, 1, ..., N.$$

Apibrėžkime kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą $X_{N,n}(s)$

$$X_{N,n} = \zeta_n(\sigma + i\Theta_N, \alpha; \mathbf{a}).$$

Pagal 3 teoremą turime, kad $X_{N,n}(\sigma)$ konverguoja pagal skirstinį į $X_n(\sigma)$, t.y.

$$X_{N,n}(\sigma) \xrightarrow[N\to\infty]{D} X_n(\sigma). \tag{13}$$

Dabar mes įrodysime, kad tikimybinių matų šeima $\{P_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ yra suspausta. Priminsime, kad P_n yra matas 3 teoremoje.

Erdvėje $\mathbb{C}$ metrika yra apibrėžiama

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2};$$

čia $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2$[6].

Sakykime, kad $M > 0$ yra bet koks skaičius. Pagal 7 lemą gauname, kad:

$$\begin{aligned} P_{N,w,n}(\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\} &= \mu_{N,w}(|\zeta_n(\sigma + ilh, \alpha; \mathbf{a})| > M) \\ &\ll \frac{1}{MU}\sum_{l=0}^{N} w(l)|\zeta_n(\sigma + ilh, \alpha; \mathbf{a})|. \end{aligned} \tag{14}$$

Analogiškai, kaip ir 4 teoremos atveju galime gauti

$$\frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N} w(l)|\zeta_n(\sigma + ilh, \alpha; \mathbf{a})| = O(1). \tag{15}$$

Be to, pasinaudojus 4 teorema ir (4) įverčiu, gauname

$$\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{U}\sum_{l=0}^{N} w(l)|\zeta_n(\sigma + it, \alpha; \mathbf{a})| \le R < \infty. \tag{16}$$

Atsižvelgus į (14) ir (16) sąryšius bei 3 lemą, turime

$$P_n\Bigg(\{s \in \mathbb{C} : |s| > M_\varepsilon\}\Bigg) \le \limsup_{N\to\infty} P_{N,w,n}(\{s \in \mathbb{C} : |s| > M_\varepsilon\}) \le \varepsilon; \tag{17}$$

čia M_ε imame tokį, kad $M_\varepsilon = M = \frac{R}{\varepsilon}$, o $\varepsilon > 0$ bet koks skaičius.

Apibrėžkime funkciją $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ formule $u(z) = |z|$. Ji yra tolydi, todėl iš (12) ir 3 lemos gauname sąryšį

$$|X_{N,n}(\sigma)| \to |X_n(\sigma)|.$$

Iš pastarosios nelygybės bei atsižvelgus į (17) turime

$$\mathbb{P}(|X_n(\sigma)| > M_\varepsilon) \leq \varepsilon. \tag{18}$$

Apibrėžkime aibę K_ε

$$K_\varepsilon = \{s \in \mathbb{C} : |s| \leq M_\varepsilon\}.$$

Aibė H_ε yra tolygiai aprėžta, todėl ji yra kompaktas. Atsižvelgus į (17) įvertį gauname

$$P_n(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$

su visais $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tai parodo, kad šeima $\{P_n\}$ yra suspausta. Pagal Prochorovo teoremą ji yra realityviai kompaktiška. Vadinasi egzistuoja posekis $\{P_{n_1}\} \subset \{P_n\}$, toks kad, kai $n_1 \to \infty$, P_{n_1} silpnai konverguoja į tam tikrą tikimybinį matą P erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. Vadinasi,

$$X_{n_1} \xrightarrow[n_1 \to \infty]{D} P. \tag{19}$$

Paga 7 lemą ir 4 teoremą, kiekvienam $\varepsilon > 0$ turime

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mu_{N,w}(|\zeta(\sigma + ilh, \alpha; \mathbf{a}) - \zeta(\sigma + ilh, \alpha; \mathbf{a})| \geq \varepsilon) \leq \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{U\varepsilon} \sum_{l=0}^{N} w(l) |\zeta(\sigma + it, \alpha; \mathbf{a}) - \zeta_n(\sigma + it, \alpha; \mathbf{a})| = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

Paėmę $X_N(\sigma) = \zeta(\sigma + i\theta_N, \alpha; \mathbf{a})$ gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}(|X_{N,n}(s) - X_N(s)| \geq \varepsilon) = 0.$$

Pastaroji lygybė, (19) bei 10 lema parodo, kad

$$X_N \xrightarrow[N \to \infty]{D} P.$$

Tai reiškia, kad matas $P_{N,w}$ silpnai konverguoja į matą P, kai $N \to \infty$.

Teorema įrodyta.

5. Išvados

Magistro darbe nagrinėjama periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s};$$

čia $\mathbf{a} = \{a_m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka, o α – transcendentusis skaičius, $0 < \alpha \leq 1$. Tada įrodyta, kad funkcijai $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ teisinga diskrečioji ribinė teorema su svoriu tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme kompleksinėje plokštumoje be išreikštinio mato pavidalo, kai svorio funkcija $w(l)$ bei aritmetinės progresijos žingsniai h tenkina tam tikras papildomas sąlygas.

6. Santrauka

Diskrečioji ribinė teorema su svoriu periodinei Hurvico dzeta funkcijai

Magistro darbe nagrinėjamas periodinės Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s,\alpha;\mathbf{a})$ su transcendenčiuoju parametru $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, diskretusis reikšmių pasiskirstymas kompleksinėje plokštumoje, kai papildomai yra naudojama svorio funkcija $w(x)$.

Tegul $w(x)$ yra realioji baigtinės variacijos funkcija intervale $[0, +\infty)$ tokia, kad

$$U = \sum_{l=0}^{N} w(l) \to \infty, \quad N \to \infty.$$

Sakykime, kad aritmetinės progresijos žingsnis $h > 0$ yra toks, kad $\exp\{\frac{2\pi}{h}\}$ yra racionalus skaičius. Tada, kai $\sigma > \frac{1}{2}$, tikimybinis matas

$$\frac{1}{U} \sum_{\substack{l=0 \\ \zeta(\sigma+ilh,\alpha;\mathbf{a})\in A}}^{N} w(l), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į tam tikrą erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuojantį tikimybinį matą P.

7. Summary

Discrete limit theorem with weight for the periodic Hurwitz zeta-function

In Master Thesis, we investigate the discrete value distribution of periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ with a transcendental parameter $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, in the complex plane when the weight function $w(x)$ is used.

Let $w(x)$ be a function of bounded variation on $[0, +\infty)$ such that

$$U = \sum_{l=0}^{N} w(l) \to \infty, \quad N \to \infty.$$

Suppose that step $h > 0$ of arithmetical progression is such that $\exp\{\frac{2\pi}{h}\}$ is rational number. Then, for $\sigma > \frac{1}{2}$, on $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, there exists a probability measure P such that the measure

$$\frac{1}{U} \sum_{\substack{l=0 \\ \zeta(\sigma+ilh,\alpha;\mathbf{a})\in A}}^{N} w(l), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

converges weakly to P as $N \to \infty$.

Literatūra

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[2] H. Heyer, *Probability Measure on Locally Compact Groups*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[3] A. Javtokas, A. Laurinčikas, A joint universality theorem for periodic Hurwitz zeta-functions, *Bul. Austral. Math. Soc.*, **78**, 13-33 (2008).

[4] A. Javtokas, A. Laurinčikas, On the periodic Hurwitz zeta-function, *Hardy-Ramanujan Journal*, **29**, 18-39 (2006).

[5] R. Kačinskaitė, Joint universality of periodic zeta-functions: continuous and discrete cases, *RIMS Kokyurokus*, **1806**, 79-93 (2012).

[6] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrech, Boston, London, 2002.

[7] A. Laurinčikas, R. Garunkštis, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002.

[8] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta function, *Integral Transf. Spec. Funct*, **20**(**9**), 673-686 (2009).

[9] O. Lukašonok, A weighted limit theorem for periodic Hurwitz zeta-function, Liet. Mat. Rink., **53**, 60-65 (2012).

[10] A. Makulavičius, *Diskrečioji ribinė teorema su svoriu Hurvico dzeta funkcijai su algebriniu iracionaliuoju parametru*, Magistro darbas, Šiaulių Universitetas, Šiauliai, 2012.

[11] A. Nagelė, L. Papreckienė, *Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija*, Žara, Vilnius, 1996.

[12] V. Rudinas, *Matematinės analizės pagrindai*, Mokslas,Vilnius, 1978.

[13] L. Stancevičiūtė, *Periodinės Hurvico dzeta funkcijos universalumas*, Magistro darbas, Šiaulių Universitetas, 2009.

[14] S.M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, **39**, 475-486 (1975).

Žymėjimai

$\mathbb{N}$	- natūraliųjų skaičių aibė
$\mathbb{Z}$	- sveikųjų skaičių aibė
$\mathbb{Q}$	- racionaliųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}$	- realiųjų skaičių aibė
$\mathbb{C}$	- kompleksinių skaičių aibė
a, b, k, l, m, j	- natūralieji skaičiai
$s = \sigma + it$	- kompleksinis kintamasis
$\mathrm{Re}s = \sigma$	- realioji kompleksinio kintamojo s dalis
$\mathrm{Im}s = t$	- menamoji kompleksinio kintamojo s dalis
i	- menamasis vienetas, $i =\sqrt{-1}$
$\xrightarrow{D}$	- konvergavimas pagal skirstinį
$\mathcal{B}(\mathbb{C})$	- erdvės S Borelio aibių klasė
Γ(s)	- Oilerio gama funkcija, ji pusplokštumėje $\sigma > 0$ apibrėžiama $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$
χ	- Dirichlė charakteris moduliu q
$P_n \Rightarrow P$	- tikimybinis matas P_n silpnai konverguoja į tikimybinį matą P
$O(x)$	- „O didysis". Sakykime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžtos aibėje $D \subset \mathbb{R}$,o taškas a yra ribinis aibės D taškas ir egzistuoja toks skaičius $M > 0$, kad $\lvert f(x)\rvert \leq M\lvert g(x)\rvert$ taško a aplinkoje $U(a;\varepsilon)$. Tada funkcija f yra vadinama aprėžta funkcijos g atžvilgiu taško a aplinkoje $U(a;\varepsilon)$ ir žymima $f(x) = O(g(x))$, kai $x \to a$
$\ll$	- „O didžiojo" atitikmuo
$o(x)$	- „o mažasis". Jei $\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, tai funkcija α vadinama aukštesnės eilės negu β nykstamąja funkcija ir žymima $\alpha(x) = o(\beta(x))$, kai $x \to a$
$\mathbb{I}_A(x)$	- aibės A indikatorius, t.y.

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \in A\,, \\ 0, & \text{kai } x \notin A\,. \end{cases}$$