VILNIAUS UNIVERSITETAS

Rokas
GYLYS

Lee ir Carterio mirtingumo prognozavimo modelis ir jo modifikacijos draudimo įmonės mokumui skaičiuoti

DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA

Gamtos mokslai,
Matematika (N 001)

VILNIUS 2021

Disertacija rengta 2016–2020 metais Vilniaus universitete.

Mokslinius tyrimus rėmė Lietuvos mokslo taryba, projektas Nr. S-MIP-20-16.

Mokslinis vadovas
prof. habil. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001).
Mokslinis konsultantas
prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001).

Gynimo taryba:
Pirmininkas – **prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius** (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001).
Nariai:
prof. habil. dr. Vydas Čekanavičius (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001);
prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001);
prof. habil. dr. Yuliya Mishura (Kijevo Taraso Ševčenkos nacionalinis universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001);
doc. dr. Kristina Šutienė (Kauno technologijos universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001).

Disertacija bus ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2021 m. gegužės 19 d. 15 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, 102 auditorijoje. Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva, tel. + 370 521 93 050; el. paštas: mif@mif.vu.lt

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu:
https://www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

VILNIUS UNIVERSITY

Rokas
GYLYS

Application of the Lee-Carter Mortality Projection Model and Its Modifications in the Modelling of an Insurance Company's Solvency Capital

SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION

Natural Sciences,
Mathematics (N 001)

VILNIUS 2021

This dissertation was written between 2016 and 2020 at Vilnius University.

The research was supported by grant No. S-MIP-20-16 from the Research Council of Lithuania.

Academic supervisor:
Prof. Habil. Dr. Jonas Šiaulys (Vilnius university, natural sciences, mathematics – N 001).
Academic consultant:
Prof. Habil. Dr. Remigijus Leipus (Vilnius university, natural sciences, mathematics – N 001).

Dissertation Defence Panel:
Chairman – **Prof. Habil. Dr. Kęstutis Kubilius** (Vilnius university, natural sciences, mathematics – N 001).
Members:
Prof. Habil. Dr. Vydas Čekanavičius (Vilnius university, natural sciences, mathematics – N 001).
Prof. Habil. Dr. Vigirdas Mackevičius (Vilnius university, natural sciences, mathematics – N 001).
Prof. Habil Dr. Yuliya Mishura (Taras Shevchenko National University of Kyiv, natural sciences, mathematics – N 001).
Assoc. Prof. Dr. Kristina Šutienė (Kaunas university of technology, natural sciences, mathematics – N 001).

The dissertation shall be defended at a public meeting of the Dissertation Defence Panel at 3 p.m. on 19th May 2021 in Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, room 102.
Address: Naugarduko str. 24, LT 03225, Vilnius, Lithuania.
Phone: +37052193050; e-mail: mif@mif.vu.lt

The text of this dissertation can be accessed at the Library of Vilnius University, as well as on the website of Vilnius University: *www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius*

DISERTACINIO DARBO APRAŠYMAS

1. Mokslinė problema, aktualumas ir tyrimo objektas

Europos Sąjungoje įsigaliojus „Mokumo II“ reikalavimams, draudimo įmonės privalėjo atnaujinti ir patobulinti kiekybinio rizikų vertinimo modelius. Įmonės šiuos modelius naudoja tiek mokumo kapitalo skaičiavimui, tiek vidiniam rizikų valdymui. Draudikų mokumas yra skaičiuojamas vadovaujantis teisės aktuose nustatyta standartine formule, įvardijančia galimus nepalankius scenarijus, kuriais remdamiesi draudikai privalo apskaičiuoti reikalaujamą mokumo kapitalą. Standartinė formulė apima pagrindines draudimo įmonei gresiančias rizikas. Ji parengta remiantis visos Europos Sąjungos draudikų statistika (žr. EIOPA, 2018), todėl gali nevisiškai tiksliai atspindėti atskirų šalių ir draudimo įmonių rizikų specifiką.

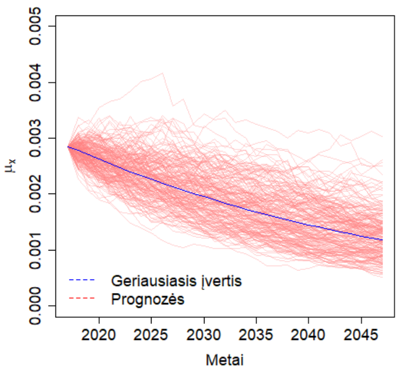
Šioje disertacijoje nagrinėjame draudimo įmonių matematinius modelius mirtingumo rizikai vertinti. Mirtingumo rizika yra viena svarbiausių gyvybės draudimo įmonėms. Apdraustųjų asmenų mirtingumas, darantis tiesioginę įtaką draudimo įmonių finansinei ir mokumo padėčiai, gali kisti tiek dėl bendrųjų tendencijų, susijusių su medicinos technologijų tobulėjimu ir pragyvenimo lygio pokyčiais, tiek dėl laikiną įtaką turinčių veiksnių, tokių kaip pandemijos ar panašūs trumpalaikiai socialinės ir ekonominės aplinkos pokyčiai.

„Mokumo II“ direktyvoje nustatyta, kad reikalaujamas mokumo kapitalo dydis turi būti pakankamas galimiems nuostoliams padengti vienerių metų laikotarpiu su 99,5 % tikimybe, t. y. reikalaujamas mokumo kapitalas yra apibrėžtas naudojant VaR (angl. *Value-at-Risk*) rizikos matą. VaR gali būti apskaičiuotas remiantis šia bendra formule (žr. McNeil et al., 2005):

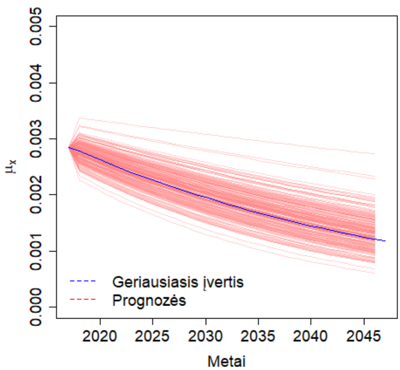
$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(NP) = \inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(NP > l) \leq \alpha\},$$

čia, mūsų atveju, *NP* yra atsitiktinis grynasis pelnas, o α = 0,995.

Tiek moksliniuose tyrimuose, tiek praktikoje nėra bendro sutarimo dėl vienodos VaR rodiklio skaičiavimo metodikos. Pavyzdžiui, VaR rodiklis gali būti skaičiuojamas atsižvelgiant į pinigų srautų kintamumą per visą draudimo sutarties laikotarpį (viso laikotarpio VaR) arba modeliuojant mirtingumo išmokas tik vienerių ateinančių metų perspektyvoje ir prognozuojant, koks kiekvieno scenarijaus atveju numatomas mirtingumas tų metų pabaigoje (vienerių metų VaR). 1 pav. pavaizduotos mirtingumo projekcijos, naudojamos VaR rodiklio skaičiavimams tiek viso laikotarpio, tiek vienerių metų metodais. Taikant vienerių metų VaR metodą numatomas mirtingumas, lemiantis prognozuojamą techninių atidėjinių dydį, gali būti skaičiuojamas įvairiais būdais: modeliuojant mirtingumo tendenciją atsitiktiniu procesu, įvertinant kiekvienam scenarijui perskaičiuotus modelio parametrus arba kitais būdais.



(a)



(b)

1 pav. Mirtingumo normos prognozės, naudojamos VaR skaičiavimams viso laikotarpio (a) ir vienerių metų (b) metodais.

Kaip matyti, VaR rodikliui apskaičiuoti yra reikalingos atsitiktinės mirtingumo tikimybių prognozės. Joms apskaičiuoti šioje disertacijoje yra plėtojami klasikinis, ekstrapoliacinis Lee ir Carterio mirtingumo prognozavimo modeliai. Pasak Lee ir Carter (1992), mirtingumo normos $m_{x,t}$, čia $x \in \{1, \dots, N\}$ yra amžiaus grupė, o $t \in \{1, \dots, T\}$ yra metai, gali būti modeliuojamos pagal šią formulę:

$$\log(m_{x,t}) = \alpha_x + \kappa_t \beta_x + e_{x,t}. \tag{1}$$

Čia α_x, κ_t ir β_x yra vertinamieji parametrai, o $e_{x,t}$ – nepriklausomos, vienodai pasiskirsčiusios atsitiktinės paklaidos. Atlikus pirminį parametrų vertinimą, nuo laiko priklausantis parametras κ_t toliau yra modeliuojamas taikant laiko eilučių metodus. Populiari Lee ir Carterio modelio modifikacija buvo sukurta Brouhns ir kitų (2002). Ši modifikacija mirtingumą modeliavo taikydama Puasono regresiją su dvitiesiu elementu (toliau –„Puasono Lee ir Carterio modelis“):

$$D_{x,t} \sim Poiss(E_{x,t} \lambda_{x,t}), \text{čia } \lambda_{x,t} = e^{\alpha_x + \kappa_t \beta_x}. \tag{2}$$

Čia $D_{x,t}$ ir $E_{x,t}$ yra amžiaus grupės, $x \in \{1, \dots, N\}$ atitinkamai mirčių skaičius ir populiacijos dydis $t \in \{1, \dots, T\}$ metais, o α_x, κ_t ir β_x yra vertinamieji parametrai.

Kartais klasikinis arba Puasono Lee ir Carterio modeliai yra per mažai lankstūs, kad atspindėtų konkrečios šalies mirtingumo duomenis. Pavyzdžiui, minėtuose modeliuose daroma prielaida, kad mirtingumas modeliuojamu laikotarpiu kinta tolygiai, o iš tikrųjų Lietuvoje, atkūrus šalies nepriklausomybę, mirtingumas pradėjo pastebimai mažėti. Taikant klasikinį arba Puasono Lee ir Carterio modeliuos taip pat daroma prielaida, kad bendros mirtingumo tendencijos dispersija visada yra pastovi, nors tikrovėje pasitaiko įvykių, tokių kaip pandemijos, lemiančių didelius svyravimus. Siekiant padaryti Lee ir Carterio modelį lankstesnį, šioje disertacijoje buvo pritaikyti būsenų erdvės (angl. *state space*) modeliai.

Tiesinis būsenų erdvės modelis gali būti išreikštas šiomis formulėmis:

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{Z}_t \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{U}_t \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t,$$

čia laiko momentu $t = 1, 2, \ldots$ vektorius $\boldsymbol{y}_t$ žymi modeliuojamus duomenis, vektorius $\boldsymbol{x}_t$ nusako nuo laiko priklausančius parametrus, $\boldsymbol{x}_0$ yra konstanta, $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{H}_t)$ ir $\boldsymbol{\eta}_t \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q}_t)$ – normaliai pasiskirsčiusios paklaidos, o $\boldsymbol{Z}_t$, $\boldsymbol{U}_t$, $\boldsymbol{H}_t$, $\boldsymbol{Q}_t$ – vertinamų parametrų matricos.

Pirmąja lygtimi išreiškę Lee ir Carterio modelio formulę (1), antrąja galime modeliuoti parametrą κ_t ir jam turinčius įtakos veiksnius. Tokiu būdu, atitinkamai parinkus parametrų matricas, Lee ir Carterio modelį galima būtų padaryti lankstesnį.

Būsenų erdvės Lee ir Carterio modelis taip pat padeda spręsti kitą problemą – prognozuojant mirtingumą leidžia atsižvelgti į parametrų įverčių neapibrėžtumą. Kadangi būsenų erdvės modelių parametrai yra vertinami Monte Karlo metodu, atlikę skaičiavimus gauname ne tik centrinį parametrų įvertį, bet ir atsitiktines parametrų projekcijas, kurias galime atsitiktinai parinkti skaičiuodami prognozuojamą mirtingumą.

Kita galima tiesinio būsenų erdvės modelio modifikacija yra būsenų erdvės modelis su kintančiais režimais. Šio modelio esmė – galimybė laikotarpiu t parinkti parametrų matricas atsižvelgiant į tuo laikotarpiu galiojantį režimą. Režimų pokyčiai yra modeliuojami darant prielaidą, kad režimų kaita nusakoma Markovo procesu su tam tikromis, iš anksto pasirinktomis, perėjimų tikimybėmis. Šioje disertacijoje šį modelį pritaikėme parametro κ_t dispersijos pokyčiams nustatyti.

2. Disertacijos tyrimo objektas ir tikslai

Disertacijoje analizuojamas klasikinis Lee ir Carterio modelis ir trys jo modifikacijos – Puasono, būsenų erdvės ir būsenų erdvės su kintančiais režimais. Šie modeliai taikomi Lietuvos ir Švedijos mirtingumo duomenims analizuoti ir prognozuojamo mirtingumo pasikliautiniesiems intervalams apskaičiuoti. Galiausiai, apskaičiuotos mirtingumo prognozės yra taikomos mirtingumo rizikos VaR rodikliams apskaičiuoti.

Pagrindiniai disertacijos uždaviniai yra:

- Sukurti matematinį mirtingumo prognozavimo modelį, leidžiantį atsižvelgti į mirtingumo tendencijos pokyčius, parametrų įverčių neapibrėžtumą ir dispersijos svyravimus.
- Parengti detalų mirtingumo rizikos VaR rodiklio skaičiavimo būdą, paremtą tiek vienerių metų, tiek viso laikotarpio metodais, kurį draudimo įmonės galėtų taikyti mokumui vertinti ir mirtingumo rizikai valdyti.
- Atlikti Lietuvos ir Švedijos mirtingumo analizę ir remiantis jos rezultatais patikrinti standartinėje formulėje nustatytus mirtingumo rizikos parametrus. Identifikuoti, kuriais atvejais apskaičiuoti VaR rodiklio dydžiai reikšmingai skiriasi nuo rezultatų, gautų skaičiuojant pagal standartinę formulę.

3. Darbo struktūra ir apimtis

Disertacija parašyta anglų kalba. Bendra darbo apimtis yra 103 puslapiai. Disertaciją sudaro įvadas, keturi skyriai, išvados ir joje cituojamos literatūros sąrašas.

Pirmame skyriuje pateikiama su disertacijos tema susijusių mokslinių tyrimų ir publikacijų apžvalga.

Antrame skyriuje pateikiami klasikinio Lee ir Carterio modelio ir analizuojamų jo modifikacijų apibrėžimai, aptariamos šių modelių savybės, aprašomi modelių parametrų vertinimo metodai ir mirtingumo, naudojant šiuos modelius, prognozavimo būdai. Būsenų erdvės Lee ir Carterio modeliams suformuluojamas šių modelių palyginimui naudojamas algoritmas. Šiame skyriuje pateikiamas modeliuose naudojamų matematinių formulių išvedimas ir formuluojami pagrindiniai su modeliais susiję matematiniai rezultatai.

Trečiame skyriuje, remiantis klasikiniu Lee ir Carterio modeliu ir nagrinėjamomis jo modifikacijomis, analizuojami empiriniai Lietuvos ir Švedijos mirtingumo duomenys. Atlikus modelių parametrų statistinį vertinimą, įverčiai yra lyginami tarpusavyje ir analizuojami skirtumai. Siekiant patikrinti parengtų modelių tinkamumą analizuojamiems duomenims, atliekami modelių tinkamumo testai ir aprašomi šių testų rezultatai.

Ketvirtame skyriuje aprašomi mirtingumo prognozių ir jų pasikliautinųjų intervalų skaičiavimo rezultatai, gauti taikant ankstesniame skyriuje nustatytus parametrus. Toliau gauti prognozių rezultatai yra naudojami mirtingumo rizikos VaR rodikliams skaičiuoti. Šiame skyriuje analizuojami tiek vienerių metų, tiek viso laikotarpio VaR rodiklio skaičiavimo būdai ir išvedamos VaR rodiklio apskaičiavimo formulės. Pasiūlytas naujas mirtingumo rizikos VaR rodiklio, paremto vienerių metų metodu, skaičiavimo modelis. Skyriuje taip pat pateikiami VaR rodiklių skaičiavimų naudojant Lietuvos ir Švedijos duomenis rezultatai.

4. Tyrimų metodika

Disertacijoje taikomi kelių matematikos sričių – matematinės statistikos, laiko eilučių analizės, finansų ir draudimo matematikos, algebros, matematinės analizės – metodai.

Klasikiniam Lee ir Carterio modeliui išvesti yra pritaikyti algebros ir matematinės statistikos metodai. Šio modelio parametrai yra vertinami spektrinio matricos išskaidymo metodu. Puasono Lee ir Carterio modelis paremtas bendrųjų tiesinių modelių teorija. Šio modelio parametrai yra vertinami pakaitomis taikomu IRLS (angl. *iteratively weighted least squares*) algoritmu. Klasikinio ir Puasono Lee ir Carterio modelių atveju parametras κ_t toliau yra modeliuojamas pagal laiko eilučių analizės metodus.

Sudarant būsenų erdvės Lee ir Carterio modelius daugiausia yra remiamasi būsenų erdvės statistiniais metodais: tiesiniu Gauso būsenų erdvės modeliu bei netiesiniu būsenų erdvės modeliu su kintančiais režimais. Būsenų erdvės modeliuose naudojamas Kalman (1960) filtras leidžia pagal ankstesnių laikotarpių laike kintančių modelio parametrų įverčius nesunkiai atnaujinti atsižvelgiant į kito laikotarpio duomenis. Būsenų erdvės modelių parametrų vertinimui taikomas Gibbso imčių (angl. *Gibbs sampler*) metodas, priklausantis Markovo grandinių Monte Karlo (angl. *Markov chain Monte Carlo* arba MCMC) metodų grupei. Būsenų erdvės modelių tarpusavio palyginimas yra atliekamas Bayeso metodais, o sąlyginio tikėtinumo funkcija yra vertinama taikant papildančio dalelių filtro (angl. *auxiliary particle filter*) metodą.

Draudimo rizikos kapitalo skaičiavimai yra atliekami remiantis finansų ir draudimo matematikos metodais.

Skaičiavimai yra atliekami specialiai šiam darbui sukurtu *R* programos kodu.

5. Moksliniai rezultatai

5.1. Lee ir Carterio modelio modifikacijos

Disertacijoje nagrinėjamos tokios Lee ir Carterio modelio modifikacijos:

- Puasono Lee ir Carterio modelis;
- tiesinis būsenų erdvės Lee ir Carterio modelis su mirtingumo tendencijos pokyčiu (toliau – būsenų erdvės Lee ir Carterio modelis arba tiesinis būsenų erdvės Lee ir Carterio modelis);
- būsenų erdvės Lee ir Carterio modelis su kintančiais mirtingumo tendencijos dispersijos režimais (toliau – būsenų erdvės Lee ir Carterio modelis su kintančiais režimais).

Puasono Lee ir Carterio modelio atveju, siekdami tiksliau sumodeliuoti mirtingumo prognozių pasikliautinuosius intervalus, Brouhns ir kitų (2002) pasiūlytą parametrų vertinimo metodą kiek pakeitėme ir pritaikėme Puasono regresijai su per didele dispersija (angl. *overdispersed*).

Pritaikę bendrą tiesinio būsenų erdvės modelio išraišką, būsenų erdvės Lee ir Carterio modelį nusakome lygybėmis:

$$\boldsymbol{y_t} = [\boldsymbol{\alpha} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{\beta}]\boldsymbol{x_t} + \boldsymbol{\varepsilon_t}, \quad \boldsymbol{\varepsilon_t} \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{H_t}),$$

$$\boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_t^{(I)} \\ \mu_t^{(II)} \\ \kappa_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbb{1}_{\{t>T_0\}} & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x_{t-1}} + \boldsymbol{\eta_t}, \qquad \boldsymbol{\eta_t} \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q_t}).$$

Čia $\boldsymbol{y_t}$ žymi $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ metų mirtingumo normų (logaritminėje skalėje) vektorių, turintį N koordinačių; N – pasirinktas amžiaus grupių skaičius; $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ ir κ_t – parametrų vektoriai, analogiški klasikinio Lee ir Carterio modelio parametrams; $\mu_t^{(I)}$ ir $\mu_t^{(II)}$ – bendros mirtingumo tendencijos parametro $\boldsymbol{\kappa_t}$ poslinkio parametrai, kur $\mu_t^{(II)}$ žymi papildomą poslinkį nuo tam tikro taško T_0; $\boldsymbol{H_t}$ ir $\boldsymbol{Q_t}$ – paklaidų kovariacijų matricos.

Būsenų erdvės Lee ir Carterio modelis su kintančiais režimais apibrėžiamas ta pačia formule kaip ir tiesinis modelis, tik kovariacijų matrica $\boldsymbol{Q_t}$ yra pakeičiama dviem atskiromis matricomis $\boldsymbol{Q_t^{(0)}}$ ir $\boldsymbol{Q_t^{(1)}}$:

$$\boldsymbol{Q}_t^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\sigma_Q^{(0)}\right)^2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q}_t^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\sigma_Q^{(1)}\right)^2 \end{bmatrix},$$

kurios yra taikomos modeliui pakaitomis pereinant tarp dviejų, didelės dispersijos ir mažos dispersijos, režimų. Šiame modelyje yra daroma prielaida, kad perėjimas tarp režimų vyksta pagal Markovo procesą, su pastoviomis išankstinėmis pasilikimo režime tikimybėms

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \pi^{(0)} \\ \pi^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Atsižvelgdami į modelių apibrėžimus ir panaudodami Carter ir Kohl (1994), Pedroza (2006), Kim ir Nelson (1999), Fung ir kitų (2017), taip pat kitų autorių gautus rezultatus, išvedėme algoritmus būsenų erdvės Lee ir Carterio modelių parametrams apskaičiuoti taikant Gibbso imčių metodą. Glaustai būsenų erdvės Lee ir Carterio modelio su kintančiais režimais algoritmas nusakomas tokia veiksmų seka:

i. algoritmas pradedamas tam tikru pradiniu vertinamų parametrų rinkiniu $\boldsymbol{\psi}^{(s)} = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma_Q}, \boldsymbol{\sigma_H}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\pi}\}$, čia $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(I)} \\ \boldsymbol{\mu}^{(II)} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\sigma_Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_Q^{(0)}} \\ \boldsymbol{\sigma_Q^{(1)}} \end{bmatrix}$, neinformatyvių priorinių parametrų rinkiniu ir tam tikru pradiniu $\boldsymbol{T}$ ilgio indeksų vektoriumi $\boldsymbol{s}$, kur 0 ir 1 žymi skirtingus režimus;

ii. naudojant filtravimo pirmyn, atsitiktinio parinkimo atgal algoritmą (toliau – FFBS; angl. *Forward Filtering Backward Sampling*), atsitiktinai parenkamas $\boldsymbol{\kappa} \mid \boldsymbol{\psi}^{(s)}$, čia $\boldsymbol{\kappa}$ yra parametrų $\boldsymbol{\kappa_t}$ vektorius, $\boldsymbol{t} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{T}\}$;

iii. naudojant FFBS modifikaciją, atsitiktinai parenkamas $\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\sigma_Q}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\pi}$;

iv. naudojant beta skirstinį, atsitiktinai parenkamas $\boldsymbol{\pi} \mid \boldsymbol{s}$;

v. naudojant daugiamatį normalųjį skirstinį, atsitiktinai parenkamas $\boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\sigma_Q}$;

vi. naudojant atvirkštinį gama skirstinį, atsitiktinai parenkamas $\boldsymbol{\sigma_Q} \mid \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\mu}$;

vii. naudojant daugiamatį normalųjį skirstinį, atsitiktinai parenkami $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\sigma_H}$;

viii. naudojant atvirkštinį gama skirstinį, atsitiktinai parenkamas $\boldsymbol{\sigma_H} \mid \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$;

ix. parametrai standartizuojami;

x. parametrų rinkinys yra atnaujinamas parinktais parametrais, ir algoritmas vėl kartojamas nuo žingsnio (ii).

Disertacijoje pateikiamas panašus algoritmas ir tiesiniam būsenų erdvės Lee ir Carterio modeliui, kurio algoritmas yra paprastesnis, nes nereikia parinkti būsenų vektoriaus $\boldsymbol{s}$.

Pritaikius Pitt ir Shephard (1999), Kaufman (2000) ir kitų autorių tyrimų rezultatus, sudaryti būsenų erdvės Lee ir Carterio modelių tikėtinumo funkcijos apskaičiavimo algoritmai, skirti šiems modeliams palyginti.

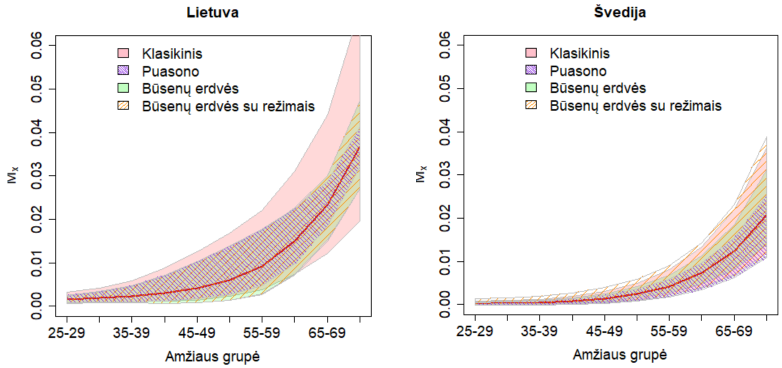
5.2. Mirtingumo duomenų analizė naudojant skirtingas Lee ir Carterio modelio modifikacijas

Klasikinį Lee ir Carterio modelį ir tris jo modifikacijas – Puasono, būsenų erdvės ir būsenų erdvės su kintančiais režimais – pritaikėme Lietuvos ir Švedijos mirtingumo duomenų analizei. Analizei naudojome turėtus XX ir XXI a. duomenis, kurie Lietuvos atveju apėmė 1959–2017 m., o Švedijos atveju – 1900–2017 m. Šių šalių mirtingumo istorija labai skiriasi. Lietuvos mirtingumas kito netolygiai, ypač šaliai atkūrus nepriklausomybę, kai prasidėjo ekonominė ir socialinė šalies pertvarka. Šiam pereinamajam laikotarpiui pasibaigus, mirtingumas pradėjo mažėti. Švedijoje nagrinėjamu laikotarpiu mirtingumas mažėjo labai tolygiai, išskyrus XX a. pradžioje kilusios ispaniškojo gripo pandemijos metus.

Palyginę skaičiavimų rezultatus nustatėme, kad atskirų modelių parametrų įverčių skirtumus daugiausia nulėmė modelių skirtumai ir pirmiau aprašytos naudojamų duomenų išimtys. Modelių lyginamieji diagnostiniai testai neparodė daugiau modelių trūkumų nei buvo tikėtasi. Kaip galima buvo numatyti iš modelio apibrėžimo, klasikinis Lee ir Carterio bei Puasono Lee ir Carterio modeliai negalėjo tinkamai atvaizduoti pasikeitusios mirtingumo tendencijos Lietuvoje atkūrus nepriklausomybę. Šie modeliai taip pat negalėjo atsižvelgti į padidėjusius mirtingumo svyravimus Švedijoje ispaniškojo gripo metais. Būsenų erdvės modelių atveju reikšmingų modelių trūkumų nenustatyta.

Palyginę tarpusavyje būsenų erdvės Lee ir Carterio modelius nustatėme, kad Lietuvos duomenims modeliuoti geriau tiko tiesinis būsenų erdvės Lee ir Carterio modelis, o Švedijos duomenims modeliuoti – būsenų erdvės Lee ir Carterio modelis su kintančiais režimais.

Atlikus pirmiau paminėtų modelių parametrų įverčių palyginimą, buvo suskaičiuoti ir palyginti mirtingumo projekcijų pasikliautinieji intervalai. Jie yra pavaizduoti 2 pav.



(a) (b)

2 pav. Prognozuojamų (15-os metų laikotarpiui) mirtingumo normų 99,5 % pasikliautinieji intervalai pagal amžiaus grupes, apskaičiuoti naudojant įvairias Lee ir Carterio modelio modifikacijas Lietuvos (a) ir Švedijos (b) duomenims.

Prognozuojamų mirtingumo normų pasikliautinųjų intervalų plotis daugiausia priklauso nuo naudoto modelio. Iš paveikslėlių matyti, kad, taikant klasikinį Lee ir Carterio modelį, pasikliautinieji intervalai, ypač Lietuvos atveju, yra platūs, juos lemia didelė paklaidų dispersija. Švedijoje būsenų erdvės Lee ir Carterio modelis su kintančiais režimais turi plačiausius pasikliautinuosius intervalus dėl to, kad modelyje taikomas dviejų normaliųjų skirstinių mišinys (angl. *mixture*).

5.3. Mirtingumo rizikos VaR rodiklio skaičiavimo modeliai

Disertacijoje išvedėme mirtingumo rizikos VaR rodiklio skaičiavimo, tiek vienerių metų, tiek viso laikotarpio metodais, formules.

Viso laikotarpio metodu VaR rodiklis laikotarpio T pabaigos datai apskaičiuojamas taip:

$$\mathrm{VaR}_{0.995}\left(\sum_{i=1}^{K} CF_{T+i}\right) = \inf\left\{l \in \mathbb{R} :\ \mathbb{P}\left(BE_T - \sum_{i=1}^{K} CF_{T+i} > l\right) \leq 0{,}995\right\}.$$

Čia: BE_T – draudiko techniniai atidėjiniai laikotarpio T pabaigoje; CF_t – draudiko pinigų srautas žaloms padengti laikotarpiu t; K – draudimo sutarties likęs galiojimo laikotarpis metais.

Mūsų pasiūlytas vienerių metų VaR rodiklio skaičiavimo būdas buvo parengtas atsižvelgiant į prognozuojamus mokumo kapitalo pokyčius per vienerius metus. Šis būdas leidžia atsižvelgti į tai, kokia dalimi aktuarai įtraukia naujausius mirtingumo statistikos duomenis nustatydami mirtingumo prielaidas. Atsižvelgdami į bendrą mokumo kapitalo apibrėžimą, vienerių metų VaR rodiklį laikotarpio T pabaigos datai apibrėžėme taip:

$$VaR_{0.995}(\Delta BOF_{T+1}) = inf\{l \in \mathbb{R} :\ \mathbb{P}\{BE_T - \left(CF_{T+1} + E(BE_{T+1}|\mathcal{F}_T)\right) > l\} \leq 0{,}995\}.$$

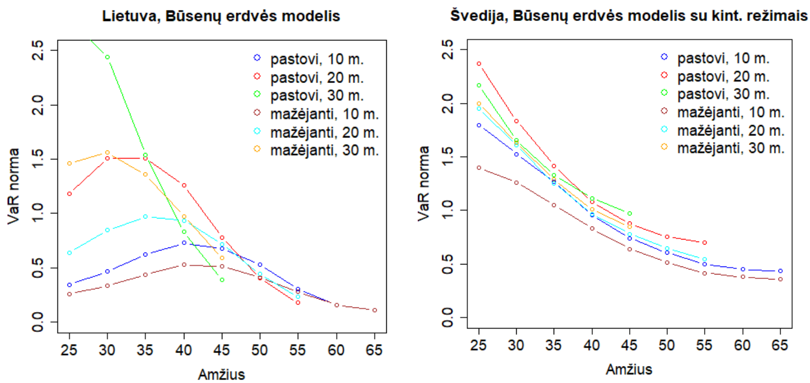
Čia ΔBOF_{T+1} žymi draudimo įmonės mokumo kapitalo pasikeitimą per metus $T+1$; BE_T – draudiko techniniai atidėjiniai laikotarpio T pabaigoje; CF_{T+1} – draudiko pinigų srautas žaloms padengti laikotarpiu $T+1$, $E(BE_{T+1}|\mathcal{F}_T)$ – tikėtini draudiko techniniai atidėjiniai laikotarpio $T+1$ pabaigoje, atsižvelgus į visą turimą informaciją laikotarpio T pabaigoje.

Mūsų pasiūlytoje metodikoje draudiko techniniai atidėjiniai $E(BE_{T+1}|\mathcal{F}_T)$ yra modeliuojami atsižvelgiant į šio dydžio sąsają su draudiko pinigų srautu CF_{T+1}. Taigi kiekvienai atsitiktinei mirtingumo projekcijai naudojamas mirtingumo tendencijos parametras μ yra koreguojamas atsižvelgiant į patikimumo faktorių δ, nustatantį techninių atidėjinių jautrumą vėliausiai mirtingumo statistikai.

Mūsų VaR rodiklio skaičiavimo modeliai, tiek taikant vienerių metų, tiek viso laikotarpio metodus, atsižvelgia į draudimo išmokos – pastovios arba laikui bėgant mažėjančios – formulę, o tai leidžia atlikti tikslesnius VaR rodiklio skaičiavimus, palyginti su standartine formule.

5.4. Mirtingumo rizikos VaR rodiklio vertinimo rezultatai

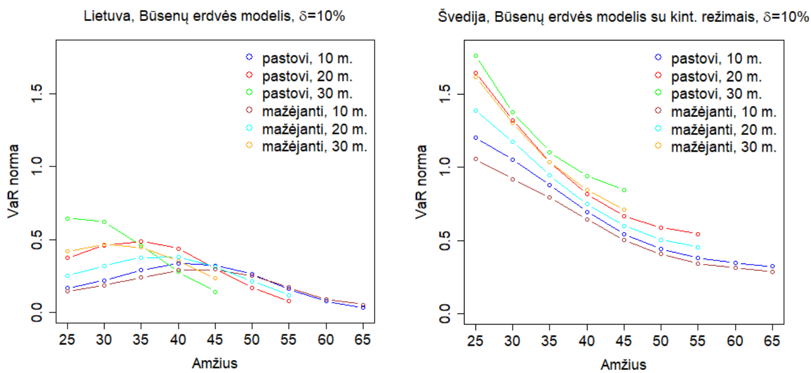
Mirtingumo rizikos VaR rodiklio norma (toliau – VaR norma) parodo, kiek kartų reikia padidinti geriausiąjį mirtingumo tikimybių įvertį, kad perskaičiuoti techniniai atidėjiniai taptų lygūs mirtingumo rizikos VaR rodiklio dydžiui. VaR normas, naudodami pagal skirtingas Lee ir Carterio modelio modifikacijas generuotas mirtingumo projekcijas, suskaičiavome viso laikotarpio ir vienerių metų metodais. 3 ir 4 pav. pateiktos šių skaičiavimų rezultatų iliustracijos.



(a) (b)

3 pav. VaR normos, apskaičiuotos viso laikotarpio VaR metodu, naudojant Lietuvos (a) ir Švedijos (b) duomenis, esant įvairiam apdraustųjų amžiui ir draudimo sutarčių trukmei, taikant dvi skirtingas išmokų formules.

Mirtingumo rizikos VaR skaičiavimai parodė, kad šio rodiklio dydžiui didelę įtaką turi šalies mirtingumo statistika, draudimo sutarties galiojimo laikotarpis, apdraustojo amžius sutarties sudarymo metu ir draudimo išmokos formulė. Palyginę skaičiavimų rezultatus taikant skirtingus VaR metodus (vienerių metų ar viso laikotarpio), nustatėme, kad VaR normų kreivių formos yra santykinai panašios, tačiau vienerių metų VaR rodiklio dydžiui didelę įtaką turi faktoriaus δ dydis, ypač ilgo laikotarpio sutartims. Taip pat nustatėme reikšmingą pasirinkto mirtingumo modelio įtaką VaR rodiklių skaičiavimų rezultatams.



(a) (b)

4 pav. VaR normos, apskaičiuotos vienerių metų VaR metodu **($\boldsymbol{\delta} = \mathbf{10}$ %)**, naudojant Lietuvos (a) ir Švedijos (b) duomenis, esant įvairiam apdraustųjų amžiui ir draudimo sutarčių trukmei, taikant dvi skirtingas išmokų formules.

Mūsų apskaičiuotas VaR normos įvertis daugeliu atvejų yra didesnis nei standartinėje formulėje nustatytas nepalankaus mirtingumo scenarijaus rodiklis, o tai reiškia, kad mirtingumo rizika standartinėje formulėje yra vertinama nepakankamai. Pagrindinės šio skirtumo priežastys yra tos, kad vertindami modelių parametrus įtraukėme didesnio mirtingumo svyravimo (pandemijų, ekonominių-socialinių pokyčių) laikotarpius ir atsižvelgėme į parametrų neapibrėžtumą. Mūsų skaičiavimų rezultatai gali būti naudingi tiek draudimo įmonių aktuarams, tiek priežiūros institucijoms siekiant realiai vertinti draudikų prisiimtą mirtingumo riziką bei mokumo kapitalo poreikį.

6. Darbo mokslinis naujumas ir aktualumas

Disertacijoje gauti rezultatai papildo mokslinę literatūrą apie Lee ir Carterio mirtingumo modelius, Lietuvos ir Švedijos mirtingumo tyrimus ir mirtingumo rizikos VaR rodiklio skaičiavimo modelius.

Disertacijoje buvo sukurtos dvi naujos būsenų erdvės Lee ir Carterio modelio modifikacijos. Be to, buvo išvesti algoritmai, skirti modelio parametrų vertinimui, modelių palyginimui ir mirtingumo prognozavimui. Taip pat buvo patobulintas Puasono Lee ir Carterio modelis – pritaikytas prognozavimui atsižvelgiant į per didelę dispersiją.

Disertacija papildė ir iki šiol atliktus Lietuvos ir Švedijos mirtingumo tyrimus. Naujai sukurti modeliai leidžia atsižvelgti į mirtingumo tendencijos pokytį ir kintančią mirtingumo tendencijos dispersiją. Šitaip buvo nustatytos realesnės mirtingumo prognozės ir rasti jų pasikliautinieji intervalai.

Disertacijoje buvo pasiūlytas naujas mirtingumo rizikos VaR rodiklio skaičiavimo vienerių metų metodu modelis. Taip pat buvo išvestos detalios VaR rodiklio skaičiavimo formulės atsižvelgiant į amžių, draudimo sutarties formulę ir draudimo išmokos formulę. Aprašyti modeliai ir atlikti mirtingumo rizikos VaR rodiklio skaičiavimai gali padėti draudimo įmonių aktuarams ir rizikos specialistams geriau vertinti mirtingumo riziką draudimo įmonėse.

Dauguma disertacijoje pristatytų rezultatų yra originalūs ir iš esmės atitinka dviejų mokslinių publikacijų (žr. skyrių „Publikacijos“) turinį. Disertacijoje gauti rezultatai buvo sėkmingai pristatyti tarptautinėse konferencijose.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

C. K. Carter and R. Kohn, On Gibbs sampling for state space models, *Biometrika* **81** (1994), 541–553.

N. Brouhns, M. Denuit, and J. K. Vermunt, A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables, *Insurance: Mathematics and Economics* **31** (2002), no. 3, 373–393.

EIOPA, EIOPA's Second Set of Advice to the European Commission on Specific Items in the Solvency II Delegated Regulation, EIOPA-BoS-18/075 (2018), https://eiopa.europa.eu/Publications/Consultations/EIOPA-18-075-EIOPA_Second_set_of_Advice_on_SII_DR_Review.pdf

M. C. Fung, G. W. Peters, and P. V. Shevchenko, A unified approach to mortality modelling using state-space framework: characterization, identification, estimation and forecasting, *Annals of Actuarial Science* **11** (2017), no. 2, 343–389.

R. E. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems, *Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering* (Series D) **82** (1960), 35–45.

S. Kaufmann, Measuring business cycles with a dynamic Markov switching factor model: An assessment using Bayesian simulation methods, *Econometrics Journal* **3** (2000), no. 1, 39–65.

C. J. Kim and C. R. Nelson, *State Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs Sampling Approaches with Applications*, Cambridge, MA: MIT Press, 1999.

R. D. Lee and L. R. Carter, Modeling and forecasting US mortality, *Journal of the American Statistical Association* **87** (1992), no. 419, 659–671.

A. J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts, *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton: Princeton University Press, 2005, p. 38.

C. Pedroza, A Bayesian forecasting model: Predicting U.S. male mortality, *Biostatistics* **7** (2006), no. 4, 530–550.

M. K. Pitt and N. Shephard, Filtering via Simulation: Auxiliary Particle Filters, *Journal of the American Statistical Association* **94** (1999), no. 446, 590–599.

PUBLIKACIJOS

Gylys, Rokas, and Jonas Šiaulys. Revisiting Calibration of the Solvency II Standard Formula for Mortality Risk: Does the Standard Stress Scenario Provide an Adequate Approximation of Value-at-Risk? *Risks* 7 (2019), 58.
https://www.mdpi.com/2227-9091/7/2/58

Gylys, Rokas, and Jonas Šiaulys. Estimation of Uncertainty in Mortality Projections Using State-Space Lee-Carter Model. *Mathematics* 8 (2020), 7.
https://www.mdpi.com/2227-7390/8/7/1053

KONFERENCIJOS

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šiose mokslinėse konferencijose:

R. Gylys, Modelling uncertainty in human mortality projections using state-space Lee-Carter, *StatMod2020: Statistical Modeling with Applications* “Gheorghe Mihoc-Caius Iacob” Institute of Mathematical Statistics and Applied Mathematics, Romania and Laboratory of Mathematics Raphael Salem, University of Rouen-Normandy, France, internetinė konferencija, 2020 m. lapkričio mėn.

R. Gylys, State space representation of Lee-Carter stochastic mortality model: application to modelling of insurers’ solvency capital, *Data Analysis Methods for Software Systems*, Vilniaus universitetas, Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas, Lietuvos mokslų akademija ir Lietuvos kompiuterininkų sąjunga. Druskininkai, 2019 m. lapkričio mėn.

R. Gylys, Draudimo įmonės mokumo kapitalo reikalavimo mirtingumo rizikai vertinimas VaR metodu, *Lietuvos matematikų draugijos LX konferencija*, Vilnius, 2019 m. birželio mėn.

TRUMPOS ŽINIOS APIE DISERTANTĄ

Gimimo data ir vieta:

1976 sausio 31 d., Vilnius.

Išsilavinimas ir kvalifikacija:

1983–1994 m. Vilniaus m. Tuskulėnų vidurinė mokykla.

1994–1998 m. Vilniaus universiteto Ekonomikos fakultetas, Ekonomikos studijų programos bakalauras.

1998–2000 m. Vilniaus universiteto Ekonomikos fakultetas, Bankininkystės studijų programos magistras.

2016–2021 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos doktorantūra.

Darbo patirtis:

1998–2003 m. UAB „PricewaterhouseCoopers“, auditoriaus asistentas, vyresnysis auditoriaus asistentas.

2003–2005 m. „PricewaterhouseCoopers“ (Naujoji Zelandija), vyresnysis konsultantas.

2005–2012 m. UAB „PricewaterhouseCoopers“, darbo grupės vadovas, vyresnysis darbo grupės vadovas.

2009–2017 m. Lietuvos aktuarų draugija, pirmininkas.

2012–2016 m. UAB „Baltic Actuarial Consulting“, direktorius.

2016–2019 m. UAB „SEB gyvybės draudimas“, finansų direktorius, generalinis direktorius.

2019 – iki šiol *SEB Life and Pension Baltic SE*, finansų direktorius.

Vilniaus universiteto leidykla
Saulėtekio al. 9, III rūmai, LT-10222 Vilnius
El. p.: info@leidykla.vu.lt, www.leidykla.vu.lt
Tiražas 35 egz.